LA CONSTANCE DE DÉLOS
La racine cubique de 2
Duplication d'un cube

Hervé Stève

Docteur en mathématiques, ingénieur dans l'aéronautique, membre fondateur du Kafemath

Herve.steve@hotmail.fr

G4G à la Commune d'Aligre du 21/10/2025

CYCLADES

Athens
Αθήνα
Rafina
Ραφήνα
Lavrio
Λαύριο
Ermoupoli
Ερμούπολη
Naxos
Νάξος

Archaeological Museum Delos
Δήλος

Définitions

- La **constance de Délos** (Île grecque) est un **nombre irrationnel** x tel que son **cube** (multiplié deux fois par lui même) vaut l'entier 2 i.e. $x^3 = 2$.

ainsi $x = \sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$ est la racine cubique réelle de 2

- **Irrationalité** : preuve par l'absurde, on suppose que $x = p/q$ avec p,q entiers irréductibles (n'ont pas de facteurs communs), et ainsi ils ne peuvent tous les 2 pairs. Comme $x = p/q$ alors $x^3 = p^3 / q^3 = 2 \Rightarrow p^3 = 2q^3$

donc p est pair et peut s'écrire $p = 2r$

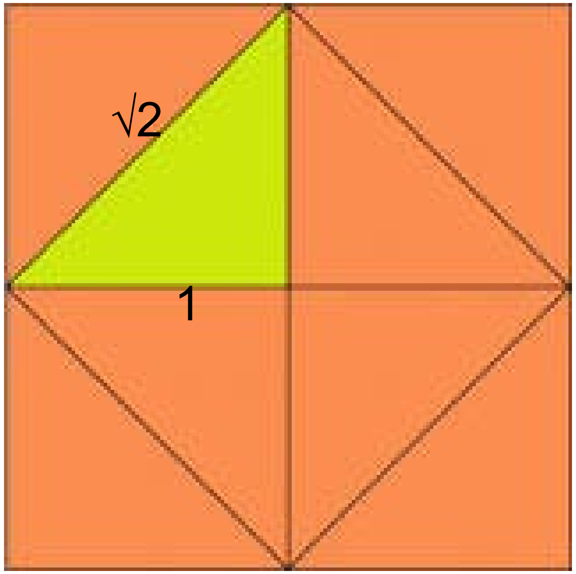
Ainsi $p^3 = 8r^3 = 2q^3 \Rightarrow q^3 = 4r^3$ donc q est aussi pair ce qui est impossible

Racine carré de 2

- **La racine de 2 est aussi irrationnelle**, c'est la diagonale d'un carré de côté 1 (relation de Pythagore) que l'on peut construire avec une règle et un compas.

- **Duplication d'un carré** : la surface de ce carré est 1 et il est possible de construire un autre carré de surface double c'est à dire 2 en prenant la diagonale du premier carré ($\sqrt{2}$) comme côté du nouveau carré car $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

Réponse OUI : problème de Ménon du dialogue de Platon

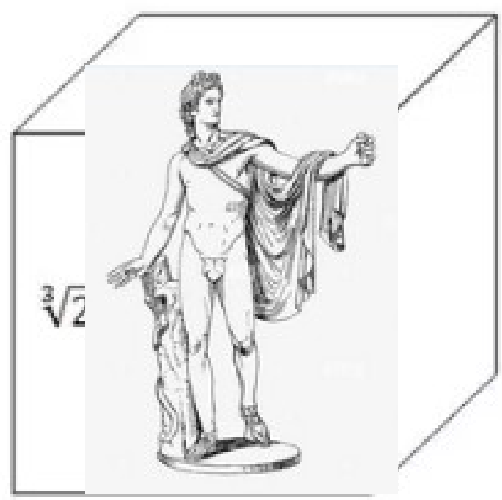


Duplication d’un cube

Soit un cube de côté 1 et de volume 1, peut-on construire avec une règle (non graduée) et un compas un cube de volume double 2 ?

- **La réponse est NON** d’après le **théorème de Wantzel** (1837) : seul les problèmes se ramenant à une équation du second degré sont constructibles.

- **Problème de Délos en -430 A.J.C** : selon Ératosthène et Théon de Smyrne. une épidémie de peste a frappé Délos. L’oracle de Delphes propose aux habitants de faire doubler l’autel cubique (cube parfait) d’Apollon. Pas de solutions, ils demandent à **Platon** qui leur dit que le dieu n’a pas besoin d’un autel doublé … mais qu’ils devraient mieux apprendre la géométrie !



Propriétés

- **Développement décimal** : $\sqrt[3]{2}$ = 1,25992104989…

- **Conjecture** : $\sqrt[3]{2}$ est un **nombre normal**, toute suite finie de décimales consécutives (ou séquence) apparaît avec la même fréquence limite que toute séquence de même longueur

- **Développement fraction continue** : $\sqrt[3]{2}$ = [1 ; 3 , 1 , 5 , 1 , 1 , 4 , 1 , 8 , 1 , …] est une suite non périodique car nombre non quadratique :

$$\sqrt[3]{2}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}}$$

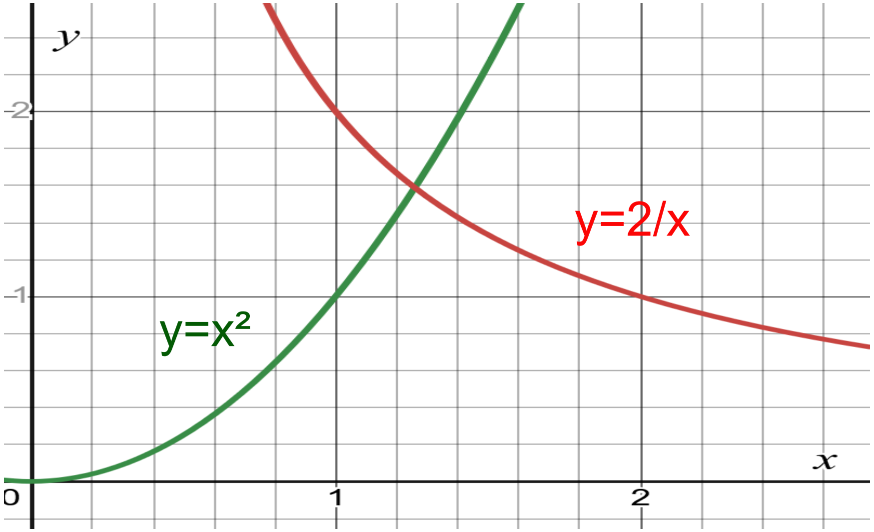
Fractions réduites : 1 ; 4/3=1,3333... ; 5/4=1,2500... ; 29/23=1,2608... ; 34/27=1,2592… ; 63/50=1,2600… ; 286/227=1,2599...

Propriétés

- **Formule** : $x = \sqrt[3]{2} = \sqrt{2/\sqrt{2/\sqrt{2/\cdots}}}$

en effet $x^3 = 2 \Rightarrow x^2 = 2/x \Rightarrow x = \sqrt{2/x} \Rightarrow x = \sqrt{2/\sqrt{2/x}}$ …

- Intersection entre **une parabole et une hyperbole** : on pose $y = x^2 = 2/x$



Construction

Avec un compas et une règle graduée … méthode de Huygens par exemple :

- Soit le rayon d'un cercle OA=1, soit D sur le cercle tq DA=OA=1
- Soit E sur le cercle et F l'intersection entre les segments CD et EA tq CE CE=FD=y (utilisons une règle graduée). Calculons x=AF :
- Le triangle ADC est rectangle : $CD^2+DA^2=AC^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}$
- Le triangle ADF est rectangle : $FD^2+AD^2=AF^2 \Rightarrow y^2+1=x^2$
- Les triangles rectangles ADF et CEF sont semblables (mêmes angles) ainsi

$EC/CF = AD/AF = 1/x \Rightarrow FD/(CD-FD) = y/(\sqrt{3}-y) = 1/x \Rightarrow y = \sqrt{3}/(x+1)$

Ainsi $3/(x+1)^2 = x^2-1 \Rightarrow (x+2)(x^3-2) = 0$ et on trouve $x = \sqrt[3]{2}$