



LES NOMBRES DE BERNOULLI

Hervé Stève

Docteur en mathématiques, ingénieur dans
l'aéronautique, membre fondateur du Kafemath

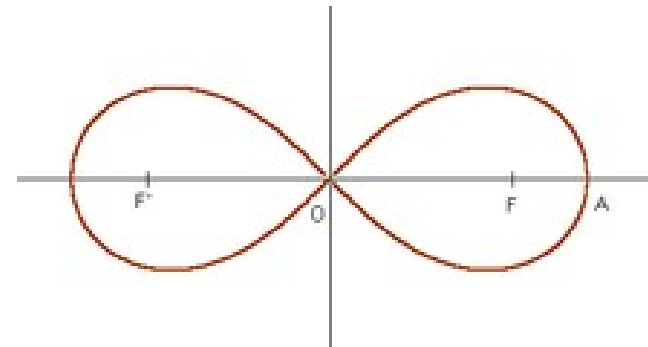
Herve.steve@hotmail.fr

Avant le spectacle ADA ou la beauté des nombres

Du jeudi 3 juillet 2025 AÏRE ONA

Jacques Bernoulli

- Jakob, né le 27 décembre 1654 à Bâle (Suisse)
- Mort le 16 août 1705 à Bâle
- Famille de mathématiciens/physiciens : **Jean** son frère, **Daniel** et **Nicolas** ses neveux
- Travaux sur l'algèbre, la logique, la géométrie et les probabilités
- Il montre que $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots < 2$, c'est **Euler** en 1737 qui trouve la somme $= \pi^2/6$
- Équation différentielle dite de Bernoulli, résolu par **Leibniz** : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^m(x)$
- **Lemniscate** de Bernoulli : $MF \times MF' = OF^2$
- Trouve la constante $e \approx 2,718$ (**exponentielle**) sur une étude sur les intérêts composés : 1€ rapport $t=100\%$ d'intérêts soit 2€ ; mais composé par mois $(1+t/12)^{12} \approx 2,613\text{€}$, puis par jour on trouve 2,714..€



Artis Conjectandi

- Publication post mortem en 1713 en latin par Nicolas Bernoulli **Artis Conjectandi** : travail donc inachevé
- Travail important sur les **probabilités**, avec une revue assez complète et une théorie sur les **permutations et les combinaisons**
- Travail sur la **dérivation** (analyse)
- Les nombres de Bernoulli apparaissent avec un étude sur l'**exponentielle** (théorie des nombres)



Sommes de Faulhaber

- **Johann Faulhaber** est un mathématicien allemand, né le 5 mai 1580 à Ulm et mort le 10 septembre 1635 à Ulm



- **Formule de Faulhaber :**

on note $S_m(n) = \sum_k k^m = 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \dots + (n-1)^m$

- Cette formule se réécrit en fonction des **coefficients binomiaux** $C(m+1,k)$ et les **nombres de Bernoulli** notés B_k .

- $S_0(n) = 0^0 + 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + (n-1)^0 = n$

$$S_1(n) = 0^1 + 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + (n-1)^1 = n(n-1)/2 = 1/2(n^2-n)$$

$$S_2(n) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = n(n-1)(n+1)/6 = 1/3(n^3-3/2n^2+n/2)$$

$$S_3(n) = (S_1(n))^2 = n^2(n-1)^2/4 = 1/4(n^4-2n^3+n^2)$$

Coefficients binomiaux

- **Ou coefficients du binôme** : notés $C(n,k)$ avec C = combinaison

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

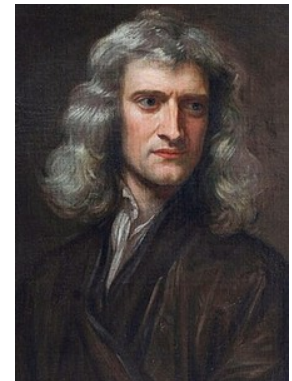
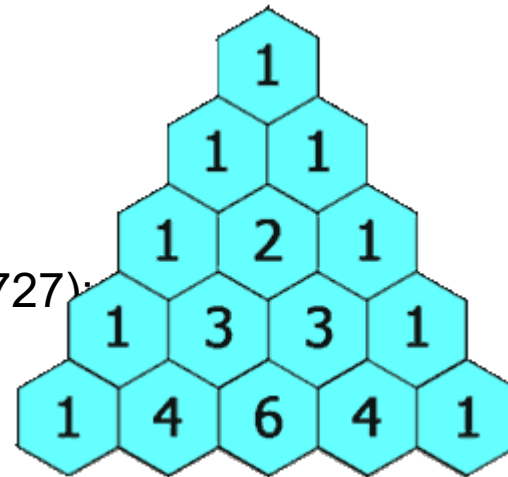
Avec la notation factorielle : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

- **Triangle de Pascal** (1623-1662) : relation récursive

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- **Formule du binôme de Newton** (1642-1727) :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$



exemple) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Calcul des sommes

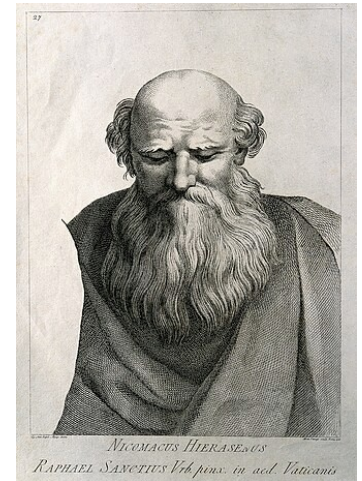
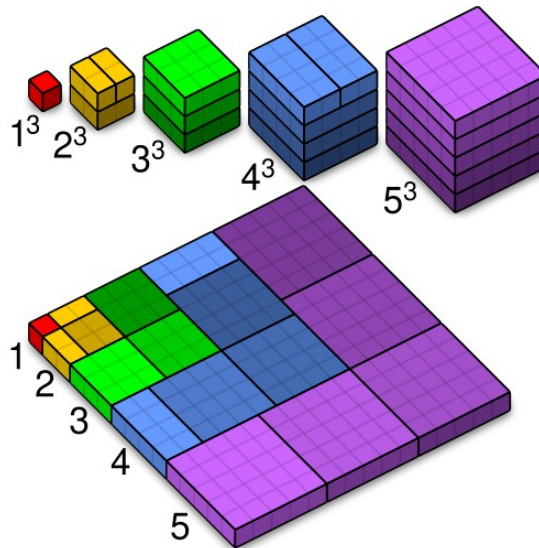
- **Somme des carrés** : à partir de $(1+k)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2$
on fait varier k de 1 jusqu'à n , et on fait la somme des n équations :
on obtient $(1+n)^3 - 1^3 = S_0(n) + 3S_1(n) + 3S_2(n)$ d'où $S_2(n)$

cette méthode se généralise par récurrence pour tout les $S_m(n)$ et fait apparaître les coefficients binomiaux

- **Somme des cubes** :

théorème de Nicomaque de Gêrase (entre 60 et 120)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$



Réécriture des sommes



- $S_0(n) = n = 1B_0n$ avec $B_0=1$ et $C(1,0)=1$
- $S_1(n) = 1/2(n^2 - n) = 1/2(1B_0n^2 + 2B_1n)$ d'où $B_1=-1/2$
- $S_2(n) = 1/3(n^3 - 3/2n^2 + n/2) = 1/3(1B_0n^3 + 3B_1n^2 + 3B_2n)$ d'où $B_2=1/6$
- $S_3(n) = 1/4(n^4 - 2n^3 + n^2) = 1/4(1B_0n^4 + 4B_1n^3 + 6B_2n^2 + 4B_3n)$ d'où $B_3=0$
- **Formule de Bernoulli démontrée par Leibniz 1646-1716 (par récurrence) :**

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m+1-k)!} \frac{B_k}{k!} n^{m+1-k} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

Calcul des nombres de Bernoulli

Soit $B_0=1$; $S_m(n=1) = 1/(m+1) \sum_k C(m+1,k) B_k = 0^m = 0$ pour $m>0$

- $m=1$: $C(2,0)B_0 + C(2,1)B_1 = 0$ soit $1 + 2B_1 = 0$
- $m=2$: $C(3,0)B_0 + C(3,1)B_1 + C(3,2)B_2 = 0$ soit $1 + 3B_1 + 3B_2 = 0$
- $m=3$: $C(4,0)B_0 + C(4,1)B_1 + C(4,2)B_2 + C(4,3)B_3 = 0$ soit $1 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0$

Ainsi une suite d'équations linéaires à résoudre par la méthode de descente.

NOTA BENE : $B_k = 0$ si k impair > 1

La note G d'Ada (1843)

Diagram for the computation by the Engine of the Numbers of Bernoulli. See Note G. (page 722 *et seq.*)

Number of Operation.	Nature of Operation.	Variables acted upon.	Variables receiving results.	Indication of change in the value on any Variable.	Statement of Results.	Data												Working Variables.												Result Variables.			
						V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	
						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
						1	2	4	9	16	25	36	49	64	81																		
1	$\times$	$V_2 \times V_3$	V_6	$V_6 = V_2 \times V_3$	$= 2 \times 4 = 8$	...	2	4	8	25	25	25																					
2	$-$	$V_6 - V_4$	V_4	$V_4 = V_6 - V_4$	$= 8 - 4 = 4$	...	1	...	...	25	25	25																					
3	$+$	$V_4 + V_2$	V_4	$V_4 = V_4 + V_2$	$= 4 + 2 = 6$	...	1	...	...	25	25	25																					
4	$+$	$V_4 + V_2$	V_4	$V_4 = V_4 + V_2$	$= 6 + 2 = 8$	...	1	...	...	0	0	...																					
5	$+$	$V_{12} + V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} + V_{12}$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2}$	...	2	...	...	...	...	...																					
6	$-$	$V_{12} - V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} - V_{12}$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} = 0$	...	...	...	...	...	...	...																					
7	$-$	$V_8 - V_4$	V_8	$V_8 = V_8 - V_4$	$= 8 - 4 = 4$	...	1	...	...	...	...	...																					
8	$+$	$V_8 + V_2$	V_8	$V_8 = V_8 + V_2$	$= 4 + 2 = 6$	...	2	...	...	...	...	2																					
9	$+$	$V_8 + V_2$	V_8	$V_8 = V_8 + V_2$	$= 6 + 2 = 8$	...	...	...	...	...	2	2																					
10	$\times$	$V_{12} \times V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} \times V_{12}$	$= B_1 \cdot \frac{2n-1}{2} = B_1 \cdot \frac{2n-1}{2}$	...	...	...	...	...	...	...																					
11	$+$	$V_{12} + V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} + V_{12}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} + B_1 \cdot \frac{2n-1}{2}$	...	...	...	...	...	...	...																					
12	$-$	$V_{12} - V_4$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} - V_4$	$= 8 - 4 = 4$	...	1	...	...	...	...	...																					
13	$-$	$V_8 - V_4$	V_8	$V_8 = V_8 - V_4$	$= 8 - 4 = 4$	...	1	...	...	...	2n-1																						
14	$+$	$V_8 + V_2$	V_8	$V_8 = V_8 + V_2$	$= 4 + 2 = 6$	...	1	...	...	...	3																						
15	$+$	$V_8 + V_2$	V_8	$V_8 = V_8 + V_2$	$= 6 + 2 = 8$	...	...	...	...	...	2n-1	3																					
16	$\times$	$V_{12} \times V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} \times V_{12}$	$= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2}$	...	...	...	...	...	...	...																					
17	$-$	$V_8 - V_4$	V_8	$V_8 = V_8 - V_4$	$= 8 - 4 = 4$	...	1	...	...	...	2n-2																						
18	$+$	$V_8 + V_2$	V_8	$V_8 = V_8 + V_2$	$= 4 + 2 = 6$	...	1	...	...	...	4																						
19	$+$	$V_8 + V_2$	V_8	$V_8 = V_8 + V_2$	$= 6 + 2 = 8$	...	...	...	...	...	2n-2	4																					
20	$\times$	$V_{12} \times V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} \times V_{12}$	$= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} = \frac{2n-1}{2}$	...	...	...	...	...	...	...																					
21	$\times$	$V_{12} \times V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} \times V_{12}$	$= B_1 \cdot \frac{2n-1}{2} = B_1 \cdot \frac{2n-1}{2}$	...	...	...	...	...	...	...																					
22	$+$	$V_{12} + V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} + V_{12}$	$= \frac{2n-1}{2} + B_1 \cdot \frac{2n-1}{2} = \frac{2n-1}{2}$	...	...	...	...	...	...	...																					
23	$-$	$V_{12} - V_4$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} - V_4$	$= 8 - 4 = 4$	...	1	...	...	...	...	...																					
Here follows a repetition of Operations thirteen to twenty-three.																																	
24	$+$	$V_{12} + V_{12}$	V_{12}	$V_{12} = V_{12} + V_{12}$	$= B_7$	...	...	...	...	...	...	...																					
25	$+$	$V_8 + V_2$	V_8	$V_8 = V_8 + V_2$	$= 8 + 2 = 10$	...	1	...	...	...	0	0																					

**En
1840**

A painting of a woman in a white lace dress and veil, holding a bouquet of flowers, representing the fashion of 1840.

-

[illegible]