kafemath.fr

# ZÊTA DE 3 : La constante d'Apery


Hervé Stève

ingénieur mathématicien

cofondateur du KAFEMATH

herve.steve@hotmail.fr


Kafemath du 13/03/2025

Restaurant l'Aïre Ona

# Sommaire

- Fonction Zêta de Riemann
- Roger Apery
- Théorème d'Apéry
- Formules et applications

# Fonction zêta de Riemann

- La fonction ζ (la lettre grec zêta) de **Riemann** est une fonction analytique complexe méromorphe* , définie pour tout nombre complexe s  tel que pour Re(s)>1 par la **série de Riemann** :

B. Riemann
1826-1866

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots$$

- **Cas s=1** : série harmonique qui diverge

voir **Nicolas Oresme** ~1321-1382

$$\begin{aligned}\zeta(1) &= 1 + 1/2 + (1/3+1/4) + (1/5+1/6+1/7+1/8) + \ldots\\ &\geq 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots\end{aligned}$$

- **Cas s=0** : la formule de la série de Riemann ne s'applique pas !

- **Cas s=-1** : également la série 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … diverge !

(*) fonction holomorphe (dérivable) sauf pour des points isolés (pôles)

# Fonction zêta de Riemann

- **Cas s=2k , entier k>0** : série qui converge vers r $\pi^s$ nombres irrationnels transcendants. **L. Euler** (1707-1787) obtient la formule suivante :

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{|B_{2k}|\,(2\pi)^{2k}}{2\,(2k)!}$$

avec $B_{2k}$ nombres de **Bernoulli** : $B_0=1$ , $B_2=1/6$ , $B_4=1/30$ , .$B_6=1/42$..

exemple $\zeta$ (2) = $\pi^2/6$ = 1,644 934...

extension à s=k=0 : $\zeta$ (0) = $B_1$ = -1/2

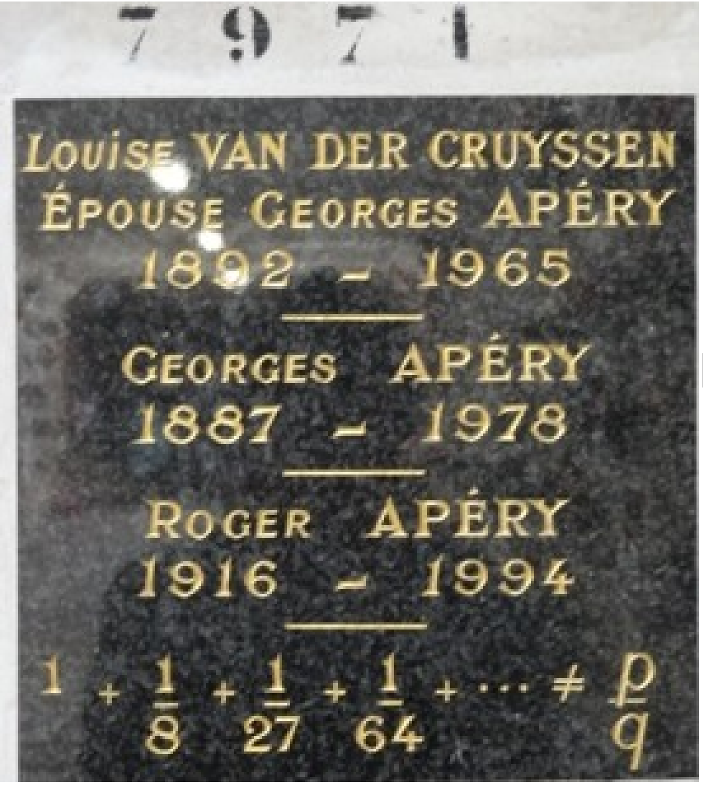
pour s=-2k : $\zeta$ (-2k) = $qB_{k+1}$ = 0

- **Cas s=3** : constante d'Apéry $\zeta$ (3) = 1,202 056 9…

le théorème d'Apéry prouve en 1978 que ce nombre est irrationnel. Mais on ne sait pas s'il est transcendant !

# Roger Apéry

- **Columbarium n°7971* au Père Lachaise :**




Née à Lille, enseigne le piano

Né à Constantinople**, Ingénieur électricien

Né à Rouen

**Théorème d'Apéry (1978)**

(*) 7971 = 3 x 2657

(**) Apéry patronyme d'origine française …

# Bio d'Apéry

- **En détail :** http://www.numericana.com/fame/apery.htm

- Entre **second à l'ENS** (rue d'Ulm) en 1936

  1er exaequo avec Jacqueline Ferrand (1918-2014) à l'agrégation de mathématiques

  En 1947, thèse en géométrie algébrique (Directeur Paul Dubreil)

  Maître de conférence à Rennes puis à Caen de 1949 à 1986

- Il est **constructiviste,** s'oppose aux **formalistes**, donc à Bourbaki

- **Politique** : radical socialiste dès 1934, résistant après 1941 à l'ENS, soutien Mendès-France. En 1960, président de la fédération radicale du Calvados. Après 1968 s'oppose à loi Faure sur la réforme des universités.

- Chevalier de la légion d'honneur en 1970

- **Famille** : 3 fils d'un premier mariage dont 1 mathématicien François Apéry.

# Théorème d'Apéry

## La constante ζ (3) = 1 + 1/8 + 1/27 + 1/64 + … est irrationnelle

- **Démonstration publique en 1978**, publication aux Journées Arithmétiques de Luminy (1979) p.11-13;http://www.numdam.org/item/AST_1979__61__11_0.pdf

- **Critère d'irrationalité de Dirichlet** : s'il existe un $\delta > 0$ et une infinité de couples d'entiers p, q > 0 tels que $| x - p/q | < 1/q^{1+\delta}$ alors x irrationnel

- **NB** : Il applique ce critère à ζ (2) = π²/6 (irrationalité connue depuis Euler) puis applique la même méthode à ζ (3) !

- **Pour ζ (3)** : la suite $1/n^3$ peut s'écrire

$$\frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1}{n(n^2-1)(n^2-4)} + \ldots + \frac{(-1)^k (k!)^2}{n(n^2-1)\ldots(n^2-(k+1)^2)} + \ldots$$

- Il obtient une nouvelle **série qui converge plus vite** :

$$\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 C(n,2n)}$$ avec C(n,2n) = (2n)! /(n!)²

# Théorème d'Apéry (suite)

- **Apéry introduit** une suite à 2 indices qui converge aussi vite vers ζ (3) :

$$t_{n,k} = \Sigma^{n}_{m=1}\ 1/m^3 + \Sigma^{k}_{m=1}\ (-1)^{m-1}/2m^3C(m,n)C(m,n+m)$$

- Puis **2 suites $p_n$ et $q_n$** liées de $t_{n,k}$ :

$$q_n = \Sigma^{n}_{k=0}\ C(k,n)^2C(k,n+k)^2 = (1, 5, 73, 1445, 33\,001, \ldots)$$
$$p_n = \Sigma^{n}_{k=0}\ t_{n,k}C(k,n)^2C(k,n+k)^2 = (0, 6, 351/4, 62531/36, \ldots)$$

- Les 2 suites vérifient la **relation de récurrence** :

$$(n+1)^3u_{n+1} - P(n)u_n + n3u_{n-1} = 0$$

avec $P(n) = 34n^3 + 51n^2 + 27n + 5$

la limite est commune et vaut $\lambda = 17+12\sqrt{2} \sim 33{,}97 > \mu = e^3 \sim 20{,}08$

- Apéry applique alors le **critère d'irrationalité à δ = 1/(γ-1) = 0,08 > 0**

avec $\gamma = 2 \log\lambda / (\log \lambda - \log \mu) \sim 13{,}41$

**NB** : c'est Henri Cohen en août 1978 qui justifiera la preuve d'Apéry

# Fraction continue généralisée

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{P(0) - \cfrac{1^6}{P(1) - \cfrac{2^6}{P(2) - \cfrac{3^6}{P(3) - \dots}}}}$$

Avec $P(n) = 34n^3 + 51n^2 + 27n + 5$

En notant les **fractions réduites*** $p_n/q_n$, on peut montrer que : :

$$\left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{1,08}}$$

(*) fractions réduites : 6/5 ; 351/292 ; ...

# Extension ?

- $$\zeta(2) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 C(n,2n)}$$ => irrationalité de **ζ (2)**

$$\zeta(5) = \zeta_5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^5 C(n,2n)}$$

si **$\zeta_5$** rationnel (même algébrique) alors **ζ (5)** est irrationnel

- au moins un des ζ (5), ζ (7), ζ (9) et ζ (11) est irrationnel : Zudilin et Rivoal en 2001

- **ζ (3) proche de $\pi^3$ /** 26 à moins de 1 %

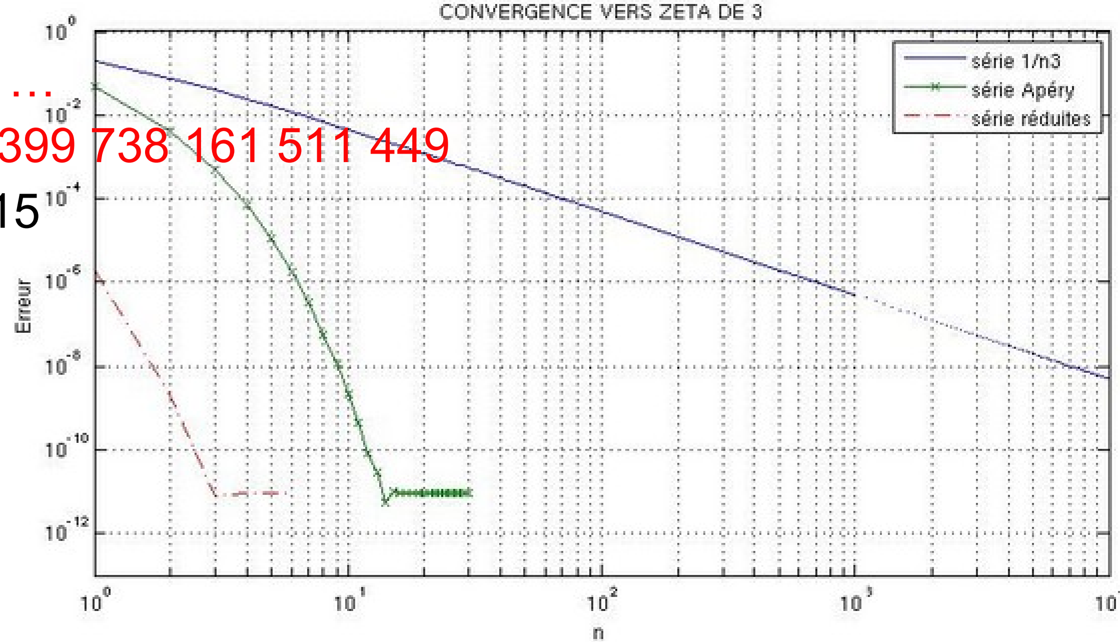
- Formule inspirée des **cahiers de Ramanujan** de Simon Plouffe :

$$\zeta(3) = \frac{7}{180}\pi^3 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 (e^{2\pi n} - 1)}$$

# Applications

- 1 + 1/8 + 1/27+ 1/64 + 1/125 + …
  ~ 1, 202 056 903 159 594 285 399 738 161 511 449

400 milliards de décimales en 2015




- **Applications en physique** : termes de deuxième et troisième ordre du rapport gyromagnétique de l'électron en électrodynamique quantique ; dans la luminescence du photon de la loi de Planck ...

- **La probabilité pour trois nombres d'être premiers entre eux** est égale à l'inverse de la constante d'Apéry, $1/\zeta(3) \simeq 0{,}831907\ldots$

- Lien avec la **fonction Gamma** : $\zeta(3) = -1/2\ \Gamma'''(1) + 3/2\ \Gamma'(1)\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^3$