



<http://kafemath.fr>



# LOGIQUES PLURIVALENTES

**Hervé Stève**

Ingénieur mathématicien, co-fondateur du Kafemath

herve.steve@hotmail.fr

13/04/2024

Café-Restaurant « Au rendez-vous Vésubien »  
à Roquebillière

# Sommaire

- Quelques définitions : maths, logique, raison et philosophie
- Principes logiques
- Logiques bivalente, trivalente et tétravalente
- Tétralemmes grecs et bouddhiques
- Maths et tétravalence : est-ce une bonne idée ?



# Définitions

A hand-drawn mathematical formula on a colorful, watercolor-like background. The formula is 
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
 with the number 9804 written above the summation symbol. To the right of the summation, there is a fraction  $\frac{1103 + 16350n}{336 \cdot 4^n}$ . The number 121 is written at the bottom right of the drawing.

- **Mathématiques** : grec μάθημα (*máthēma*) origine apprendre

Les *mathématiques* sont une science qui étudie par le moyen du raisonnement déductif les propriétés d'êtres abstraits (nombres, figures géométriques, fonctions, espaces, etc.) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux (Larousse)

- **Logique** : grec *logos*, raison, langage et raisonnement

Science du raisonnement en lui-même, abstraction faite de la matière à laquelle il s'applique et de tout processus psychologique.

- **Raisonnement** : latin *ratio* origine calcul, mesure, et explication

Le raisonnement est un processus cognitif permettant de poser un problème de manière réfléchie en vue d'obtenir un ou plusieurs résultats

- **Philosophie** : grec φιλοσοφία contenant *philein*, aimer et *sophia*, sagesse

Démarche qui vise à une compréhension du monde et de la vie par une réflexion rationnelle et critique



# Principes logiques

- I. 1<sup>ère</sup> identité existence V=vrai : il existe une proposition A i.e. **A** , **il y a une chose**
- II. 2<sup>nde</sup> identité non-existence F=faux : il n'existe pas A i.e. **non A** noté  **$\neg A$** , **il n'y a pas une chose**
- III. Principe de non contradiction : il n'existe pas A et l'inexistence de A i.e. **non ( A et  $\neg A$ )**, **il n'y a pas une chose et son contraire**
- IV. Principe du tiers exclus : il existe A ou l'inexistence de A i.e. **A ou  $\neg A$** , **il y a une chose ou bien son contraire**
- V. Indécidabilité : il n'existe pas A et il n'existe pas l'inexistence de A i.e. **non A et non  $\neg A$**  , **il n'y a pas une chose et il n'y a pas son contraire**
- VI. Contradiction : il existe A et il n'existe pas A i.e. **A et  $\neg A$** , **il y a chose et son contraire**



# Logiques plurivalentes

## OO Bivalence :

les 2 identités (vrai et faux), la non contradiction et le tiers exclus

=> **logique classique**

## OOO Trivalence :

les 2 identités et l'indécidabilité (non contradiction sans tiers-exclus)

=> **logique intuitionniste**

## OOOO Tétravalence :

les 2 identités, la contradiction et l'indécidabilité

=> **logique pragmatique**



# Bivalence



**Aristote**  
**384-322 AJC**

les 2 identités (vrai ou faux) avec non contradiction et tiers exclus

**=> logique classique dite dichotomique, binaire ou booléenne**

- **Limites :**

- les paradoxes (contradiction) sont rejetés, et sont contournés par un raisonnement par l'absurde avec **non \ A = A**

- impossibilité de tout classer dans l'existant et le non existant,

- ou bien dans le vrai ou le faux, ou bien dans le prouvable ou non prouvable

- réduction à une pensée dichotomique : base de la pensée occidentale

**=> un autre choix est rendu impossible avec le tiers exclus**





**Kurt Gödel**  
1906-1978

# Trivalence



**Alan Turing**  
1912-1954

- **Trivalence** : les 2 identités et l'indécidabilité (non contradiction sans tiers-exclus)

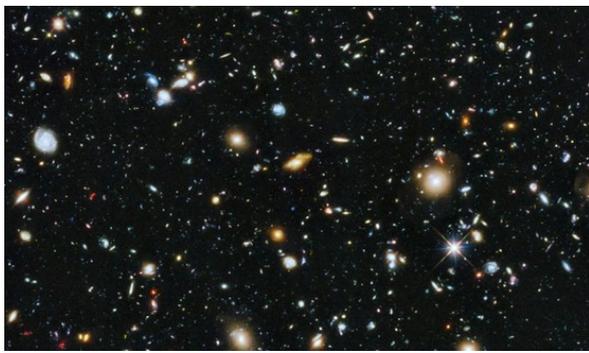
=> **logique intuitionniste ou constructiviste**

- laisse la possibilité d'un troisième choix
- une proposition qui n'est pas vraie ne veut pas dire que son contraire soit vrai : il se peut qu'il existe une preuve constructive qu'elle ne soit pas vraie, il se peut aussi qu'il existe une preuve constructive que son contraire soit faux et dans ce cas cette proposition est dite **indécidable**

- **Limites** :

- raisonnement par l'absurde prohibé car non constructif ; ~~non  $\neg A \Rightarrow A$~~
- rejet des paradoxes mais est-ce un problème ?





# Tétravalence



- **Tétravalence** : les 2 identités, la contradiction et l'indécidabilité

=> **logique pragmatique**

Plus proche du réel, ouverture de la pensée

- **Limites** :

- Plusieurs logiques tétravalentes: tétralemme grec et bouddhique, texte ummites (extra-terrestres), ... problème d'interprétation des 4 « vérités » => non unicité des tables de vérités
- Est-ce encore des mathématiques ? les mathématiques auraient-elles pu évoluer comme nous la connaissons avec une logique tétravalente ?
- Au delà de la tétravalence ...



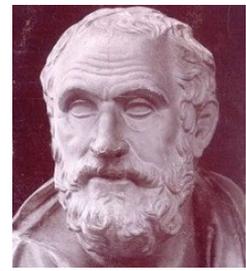
# L'école du milieu

- fondée par le philosophe bouddhiste **Nāgārjuna** (III<sup>ème</sup> AJC)
- Déroulement du débat : cf. <https://www.cairn.info/revue-le-philosophoire-2014-1-page-27.htm> de M. Ballanchat



- 1) soit une proposition A selon une thèse bouddhiste : « tout est impermanent »
- 2) soit une proposition contraire (non A) d'un objecteur védique : « il y a une vérité permanente »
- 3) ainsi on peut admettre les 2 thèses A et non A : « tout est impermanent mais il y a quelque réalité permanente » si par exemple l'on prouve qu'il existe un être divin qui n'est pas dans le tout
- 4) mais on peut objecter le contraire soit ni A et ni non A : « l'impermanence ne peut être prouvée, et ni la permanence de quelque réalité en dehors de tout »

# Tétralemmes



Pyrrhon d'Elis

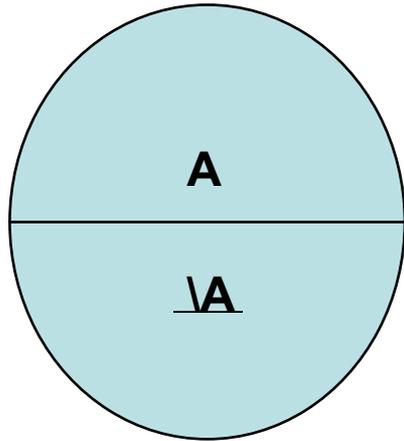
- Le tétralemmes (de tetra = quatre et lemme = position) est une forme logique en 4 positions :
  - affirmation : une chose est (*atthi*)
  - négation : une chose n'est pas (*natthi*)
  - affirmation et négation : une chose est et n'est pas (*atthi ca natthica*)
  - ni affirmation ni négation : une chose ni n'est ni n'est pas (*nevatthi na natthi*)
- présent chez **Pyrrhon** (scepticisme) et aussi dans le Théétète de **Platon** : « c'est ainsi ; ce n'est pas ainsi ; ainsi et pas ainsi ; non pas même ainsi » mais surtout a perduré dans la pensée orientale indienne et bouddhiste.
- pensée qui mène au « vide » c'est-à-dire au-delà des 4 positions : état d'impermanence car rien n'est

Ex) *le voyageur qui arrive dans un hôtel avec des chambres fumeurs et des chambres non fumeurs, qui ne peut dire s'il est fumeur ou non fumeur, s'il est les 2 et même ni les 2 ; ainsi il est rien !*

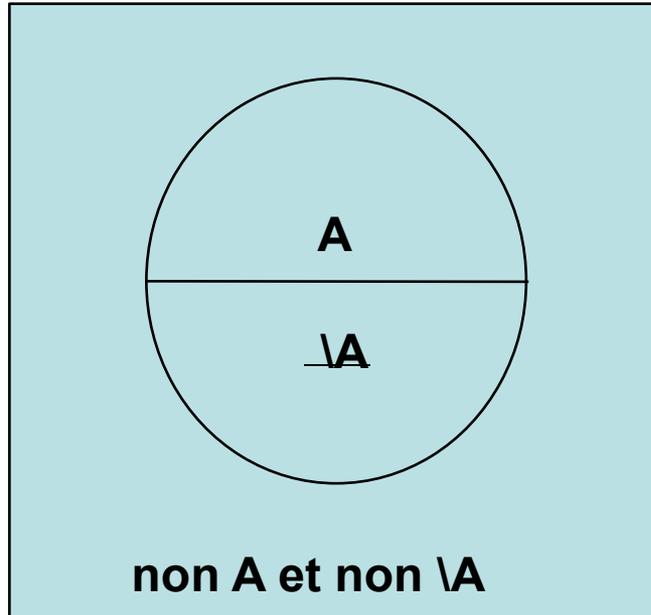
voir <https://www.cairn.info/revue-cahiers-de-gestalt-therapie-2012-1-page-78.htm>



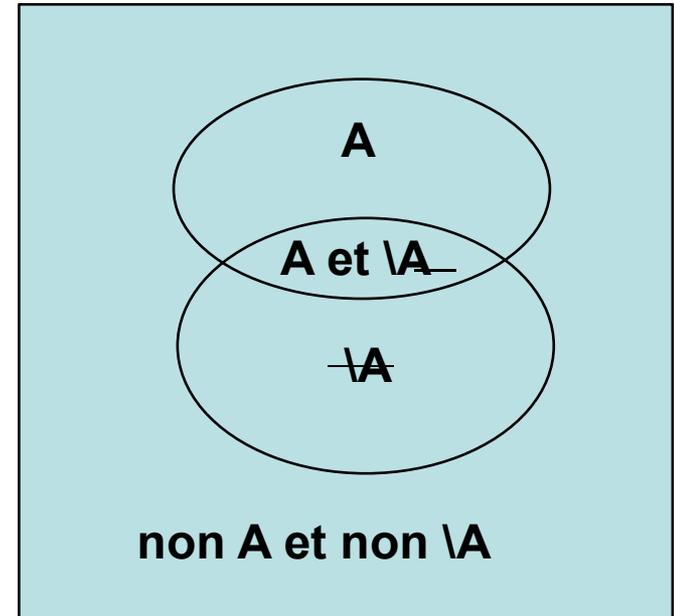
# Vision ensembliste



**Bivalent**  
(formel)



**Trivalent**  
(intuition/construction)



**Tétravalent**  
(réel)

MATHS

PHILOSOPHIE

**NB** : l'ensemble vide n'est pas représenté car pas d'assertion logique !



# Logique tétravalente

**4 valeurs élémentaires disjointes (pas de confusion) notées T-F-B-N :**  
voir <http://www.cafe.edu/sf/pl4c/pl4c1.html>

- T = strictly true : vrai et non-faux

Ici toute réalité est vérifiable, mesurable, expérimentable

- F = stricly false : faux et non-vrai

Ici tout ce qui est irréel, situé hors de tout cadre de vérification

- B = both true and false : vrai et faux

Ici toute réalité est une phénoménologique potentielle ou partiellement indéterminée

- N = neither true nor false : ni vrai ni faux

Ici toute réalité est invérifiable hors du champ d'une conscience individuelle ou collective

=> La « logique tétravalente » admet des propositions « illogiques »



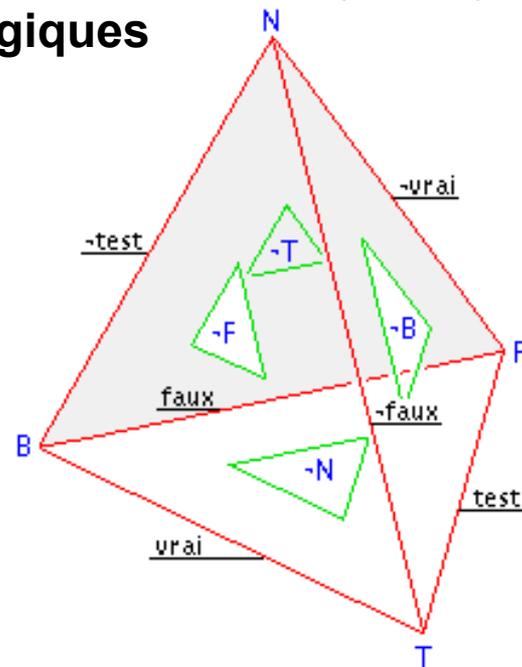
# Logique tétravalente (suite)

La **négation** est remplacée par la **loi de complément** :

- Soit  $A$  une proposition et  $-A$  la proposition complémentaire : cela veut dire que ces 2 propositions n'ont pas d'éléments en commun
- Ainsi **par involution**, le complément de  $-A$  est  $A$  i.e.  $-(-A) = A$

On en déduit que le complément de  $TFBN$  est le l'ensemble vide :  $-(TFBN) = \{\}$ , c'est-à-dire toutes les **assertions du vide sont illogiques**

- ❖ Le complément de  $T$  est  $F$  ou  $B$  ou  $N$  :  $-T = FBN$
- ❖ Le vrai =  $T$  ou  $B$  et son complément est  $F$  ou  $N$
- ❖ Le faux =  $F$  ou  $B$  et complément est  $T$  ou  $N$
- ❖ Le test  $T$  ou  $F$  et son complément est  $B$  ou  $N$





# Conclusion

**Martin Gardner** disait à propos de l'ensemble vide :

"s'il n'existe aucun ensemble ne contenant aucun élément, alors leur ensemble (l'ensemble des ensembles ne contenant aucun élément) est vide et donc l'ensemble vide existe !"

**Rien** est selon la logique tétravalente :

- ni ce qui est,
- ni ce qui n'est pas,
- ni ce qui est et n'est pas,
- ni ce qui est : ni n'est ni n'est pas

