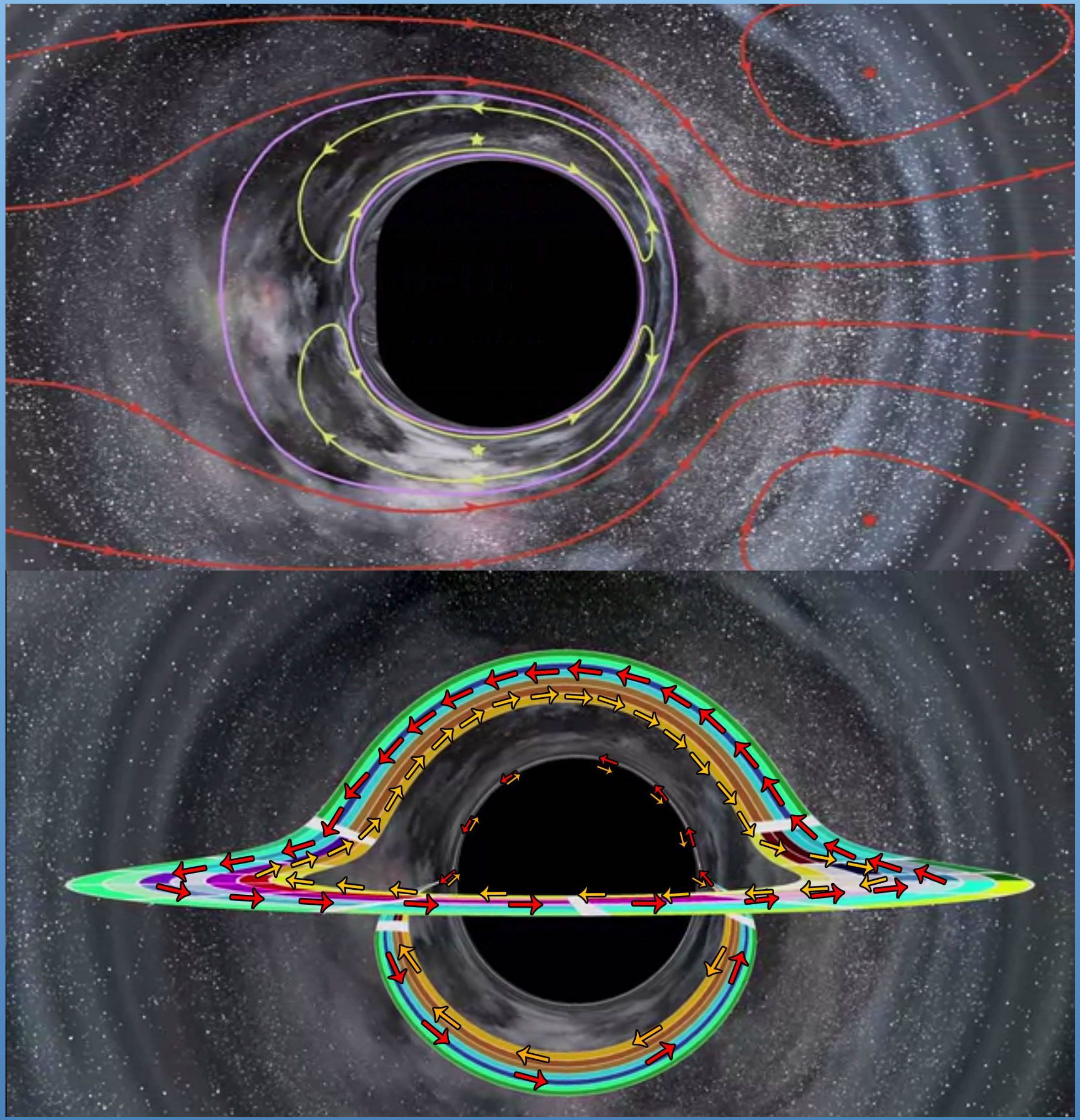
La géométrie de l'espace-temps.



Stephane Collion

Kafemath du 14-12-2023

Partie 1.
De la relativité restreinte
à la relativité générale…

stephanecollion@mac.com

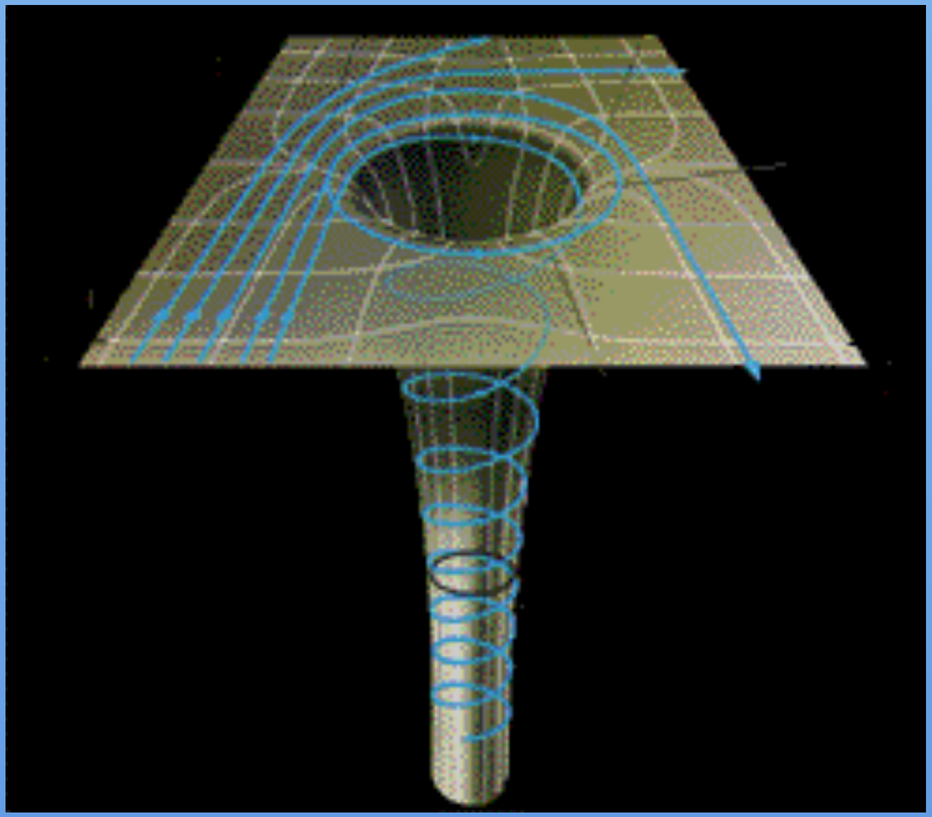
16 décembre 2023 v3

Introduction, but de l’exposé.

*Il s’agit d’une invitation à découvrir la **relativité générale**, la théorie de la gravitation d’Einstein, grâce à la géométrie.*

La relativité générale est en effet une théorie fondamentalement géométrique. Elle s’appuie sur une branche importante des mathématiques, la ***géométrie Riemannienne***, et elle n’existerait pas sans elle.

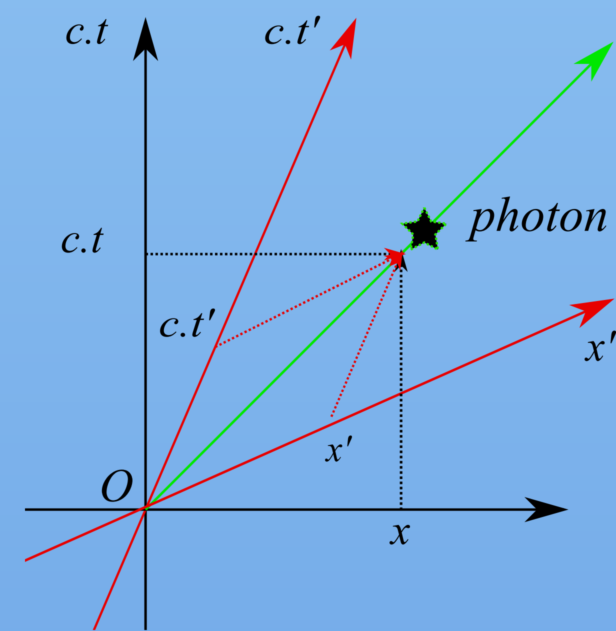
Cacher, comme c’est systématiquement le cas dans les ouvrages de vulgarisation, les aspects mathématiques de la relativité, c’est en nier la nature profonde, et c’est passer à côté de certains de ses aspects les plus merveilleux !. Nous verrons en effet que les phénomènes physiques spectaculaires de la relativité ne sont que l’expression de la géométrie de l’espace-temps.

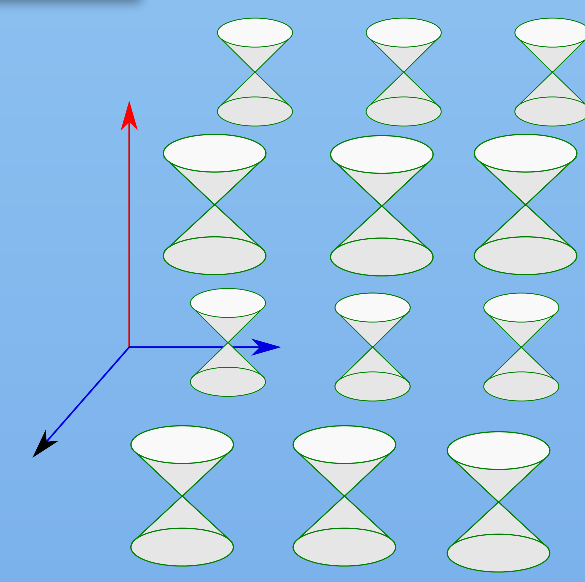


Introduction, but de l'exposé pour notre Kafemath.

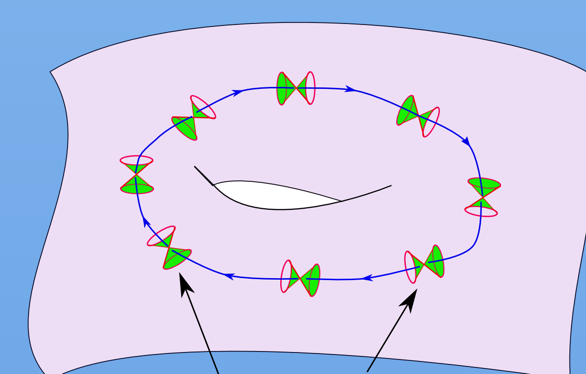
La gravitation, c'est de la géométrie !

<u>Découvrir avec la relativité quelques beaux aspects d'une *nouvelle géométrie :*</u>
<u>La relativité restreinte :</u> sa géométrie étonnante explique les phénomènes déroutants de la relativité : paradoxe des jumeaux, contraction des durées et des longueurs.
<u>La relativité générale :</u> C'est une géométrie très riche et subtile. Elle a suscité de nombreux problèmes de géométrie, qui se sont révélé ensuite avoir des implications physiques majeures. big-bang, trous noirs, singularités…



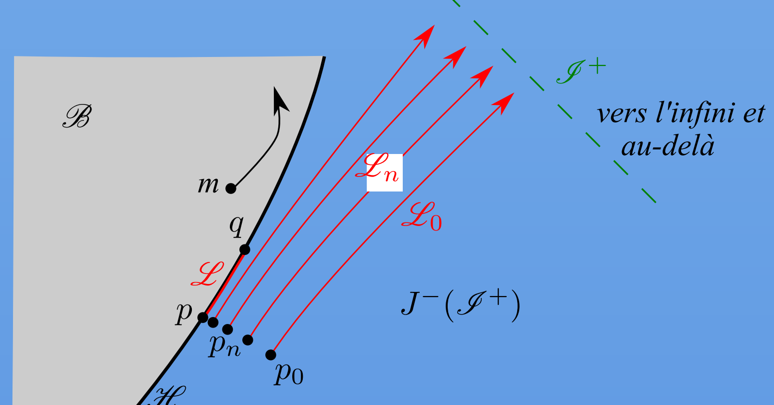


<u>Attention :</u> ça ne sera pas une approche historique ; ça sera une histoire mathématique…



cônes de lumière
déformés par la courbure
et orientés par la forme de la variété.

-Proposer un regard de mathématicien sur une splendide théorie physique.
-La relativité générale est en effet une théorie fondamentalement géométrique.
-Elle s'appuie sur une branche importante des mathématiques, la géométrie Riemannienne, et elle n'existerait pas sans elle.
-Nous verrons en effet que les phénomènes physiques spectaculaires de la relativité ne sont que l'expression de la géométrie de l'espace-temps.



Levons tout de suite une ambiguïté :

Vladimir Arnold :

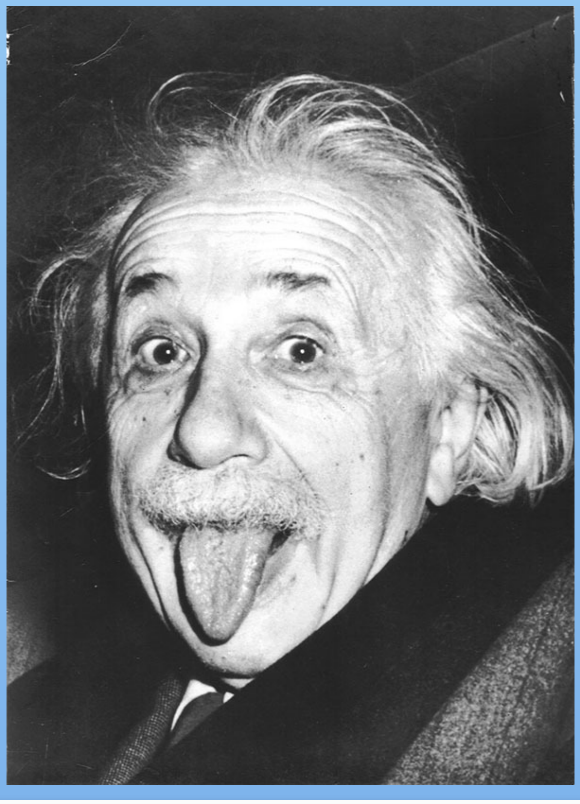
« Les mathématiques sont la branche de la physique où les expériences ne coûtent pas cher. »

Faux !

SC :

« La physique est la branche des mathématiques où le matériel coûte cher. »

Les deux personnages principaux…



Albert Einstein. 1879-1955.
Physicien,
Mathématicien...

Il a fallu à Einstein une intuition et un sens physique exceptionnels pour mettre au point sa théorie de la relativité générale. Mais cette théorie n'existerait pas sans les mathématiques très belles et pures que constituent la géométrie Riemannienne, et qu'Einstein a su merveilleusement utiliser.

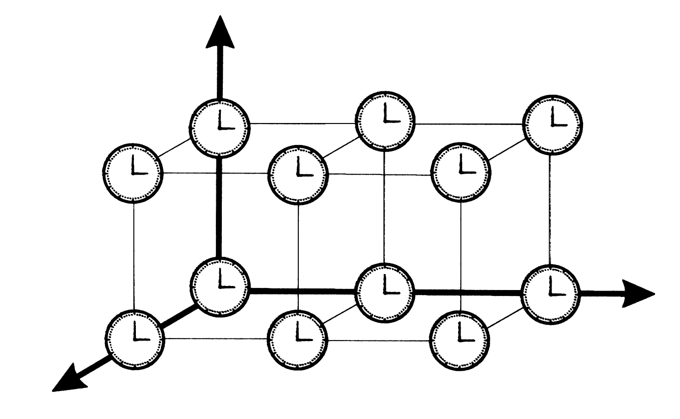
Bernhard Riemann, 1826-1866.
Sa célèbre soutenance d'habilitation, en 1854, intitulé « Sur les hypothèses sous-jacentes à la géométrie » jette les bases de la géométrie différentielle. Il y introduit la bonne façon d'étendre à n dimensions les résultats de Gauss sur les surfaces. Cette soutenance a profondément changé la conception de la notion de géométrie.

Motivation historique : la vitesse de la lumière.

- La vitesse de la lumière (dans le vide) est la même pour tous les observateurs galiléens, et est indépendante du mouvement de la source.
- La vitesse de la lumière est une vitesse limite, qu'aucun objet ou signal physique ne peut dépasser.
- Cela oblige à remettre en cause les principes de mesures de temps et de distances de Newton : la loi d'addition des vitesses ne fonctionne plus.

Nous allons parler de ***mécanique***, c'est à dire de la modélisation du mouvement des objets physiques et de la lumière, ainsi que des mesures de distances et de durées qui y sont associées.
Nous appellerons cela de la ***Chronogéométrie.***

Le point de départ de ce qui nous intéresse est que pour cela, on doit choisir ***un cadre géométrique.***



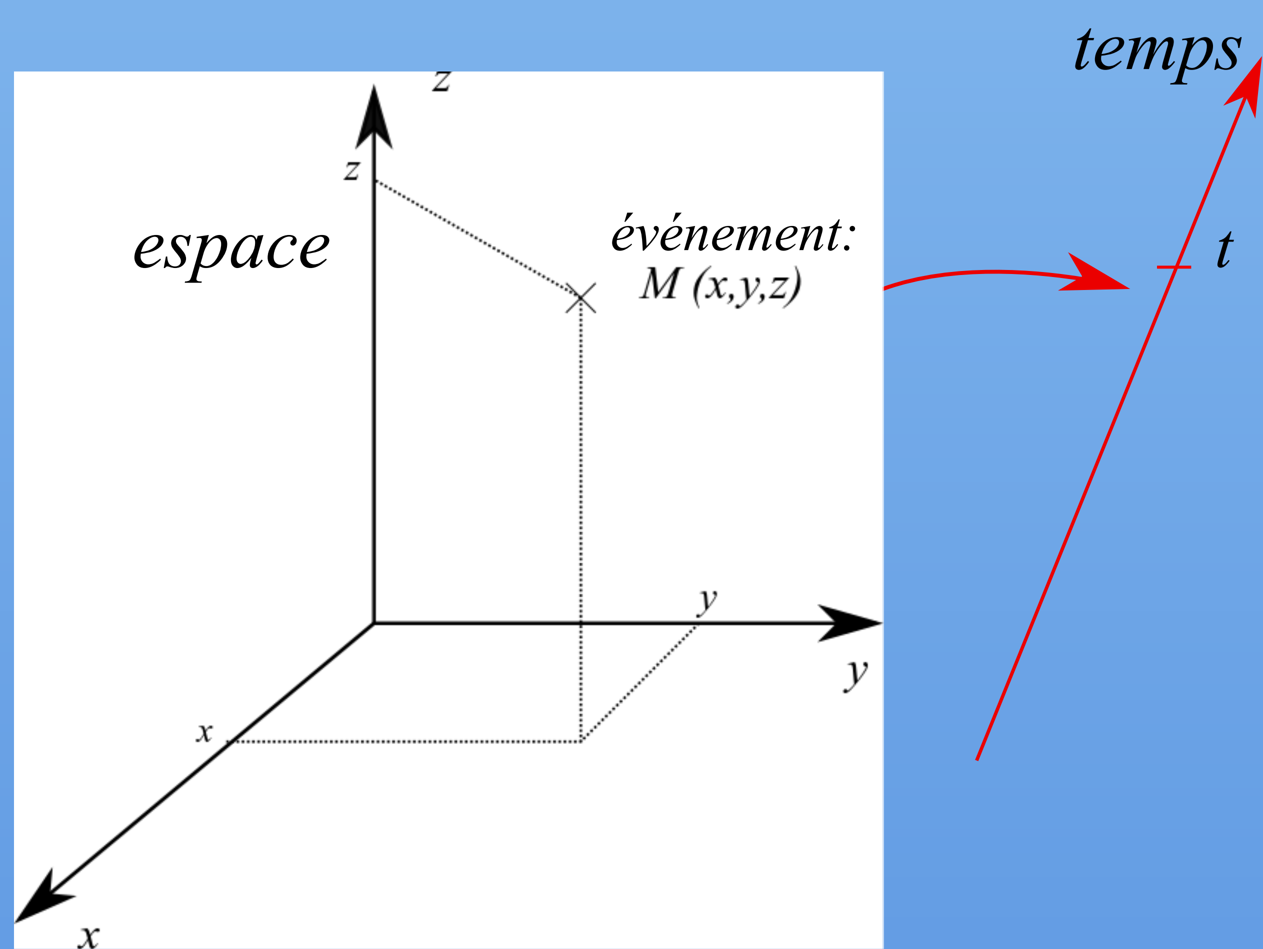
Commençons par quelques rappels de notion de base et quelques définitions importantes…

De l’espace et du temps à l’espace-temps.

- **Observateur** : être (abstrait?!) muni de moyens de mesurer des distances et des durées, qu’il rapporte à un cadre géométrique appelé **référentiel**.
- Un observateur note des événements : **un événement** physique est un point du référentiel, défini par les données du lieu où il se situe et de la date à laquelle il se produit.

Espace et temps de Newton :

Pour Newton, le temps et l’espace étaient absolus, les mêmes pour tous les observateurs.



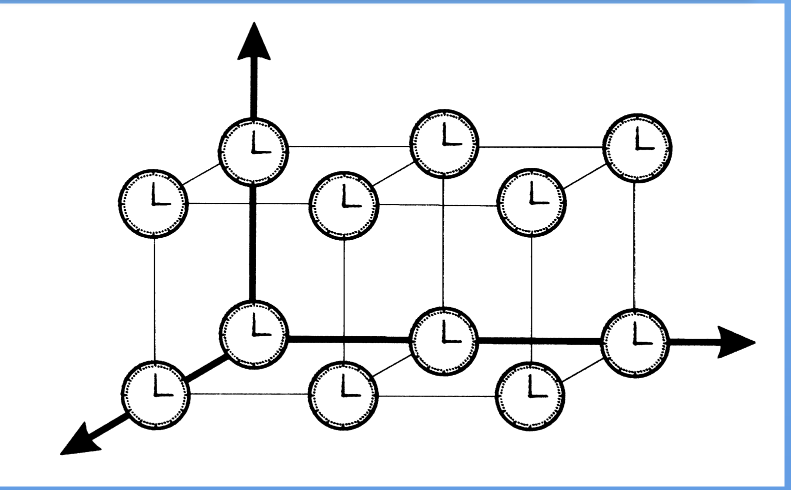
-On associe à un référentiel un repère qui fournit les coordonnées des événements.
- Chez Newton, il y a un repère pour les positions spatiales, et un repère pour les dates. Un référentiel en deux parties, donc…

L’espace-temps :

Mais finalement…
Un événement (physique) est caractérisé par l’endroit où il se produit, et le moment où il se produit. On peut donc réunir ces données dans un seul espace géométrique : **l’espace-temps !**
(Newton aurait pu le faire…)

Idée clef de l’exposé : ***Choisir le bon espace géométrique :*** Le choix d’un espace géométrique pour modéliser les phénomènes physiques doit être vu comme un *postulat.* C’est Poincaré et Minkowski qui comprirent que l’espace-temps était le meilleur espace géométrique pour faire de la relativité, car il rendait les démonstrations plus simples.

Einstein utilisa initialement un espace à 3 dimensions muni en chaque point d’une horloge : les démonstrations étaient beaucoup plus complexes et moins naturelles…



L’espace-temps :

4 coordonnées (3 d’espace, 1 de temps), donc *4 dimensions*.
Comme on ne sait pas dessiner ça, dans les dessins, on supprime une (ou parfois deux) dimension spatiale.
Ça donne un *diagramme d’espace-temps.*

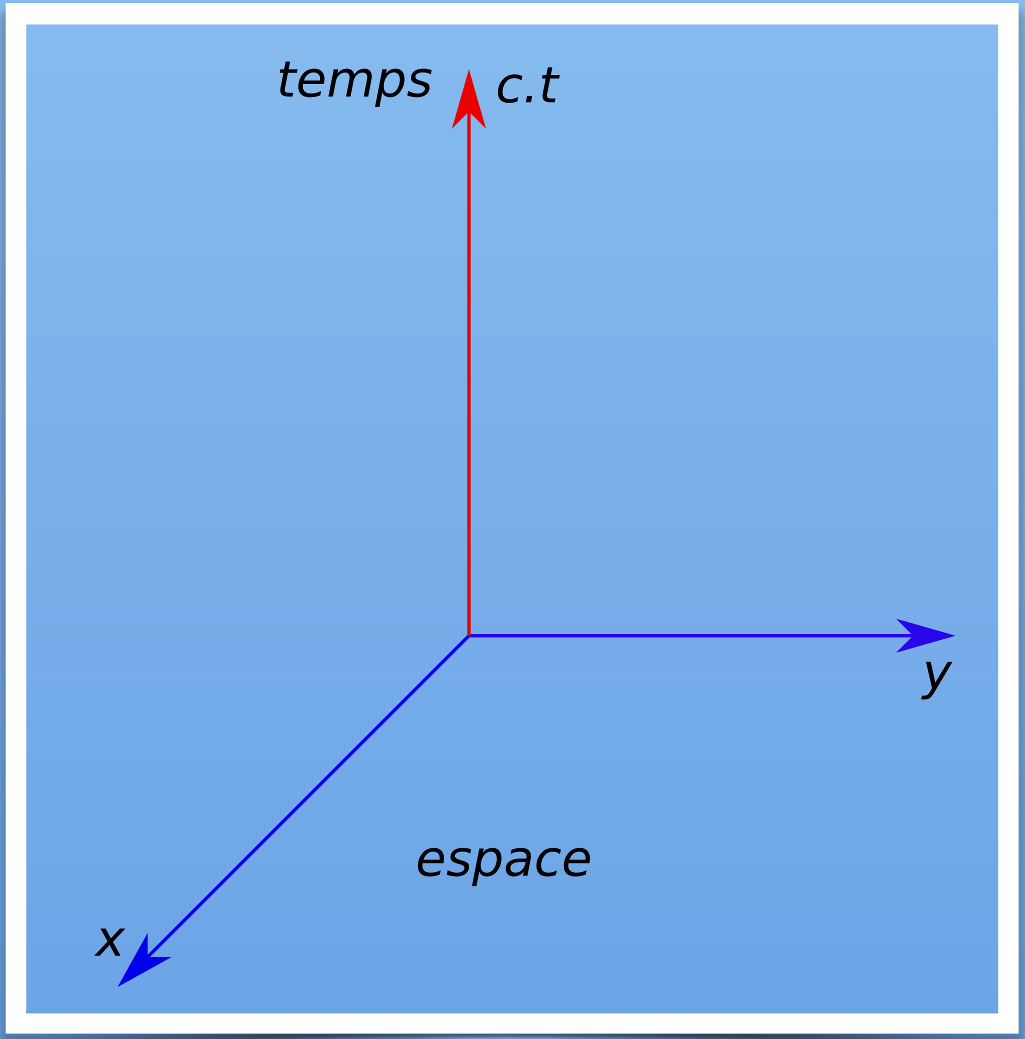
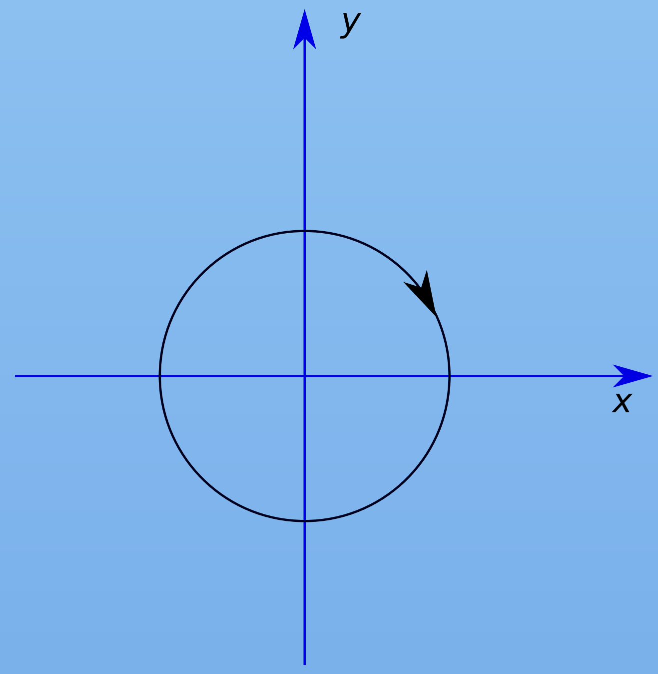
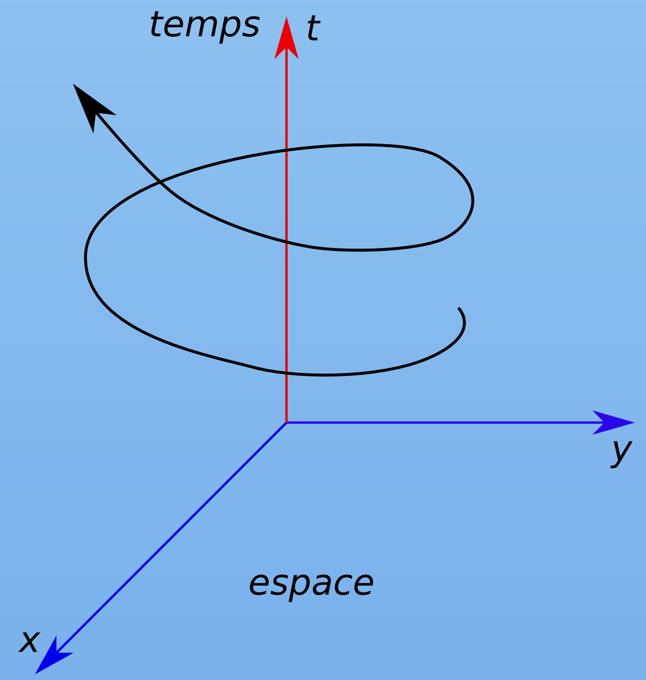


Diagramme d’espace-temps dans lequel on a supprimé une coordonnées d’espace. La lettre c apparaissant dans l’expression c.t sur l’axe vertical de la coordonnée de temps désigne la vitesse de la lumière. Elle sert de facteur de conversion d’unités entre les durées et les longueurs, pour pouvoir les ajouter ou soustraire dans les formules que nous verrons. Mais les théoriciens, et les mathématiciens, ont pour habitude de faire comme si les unités étaient choisies pour que c = 1, de sorte que ce facteur disparaît des formules…

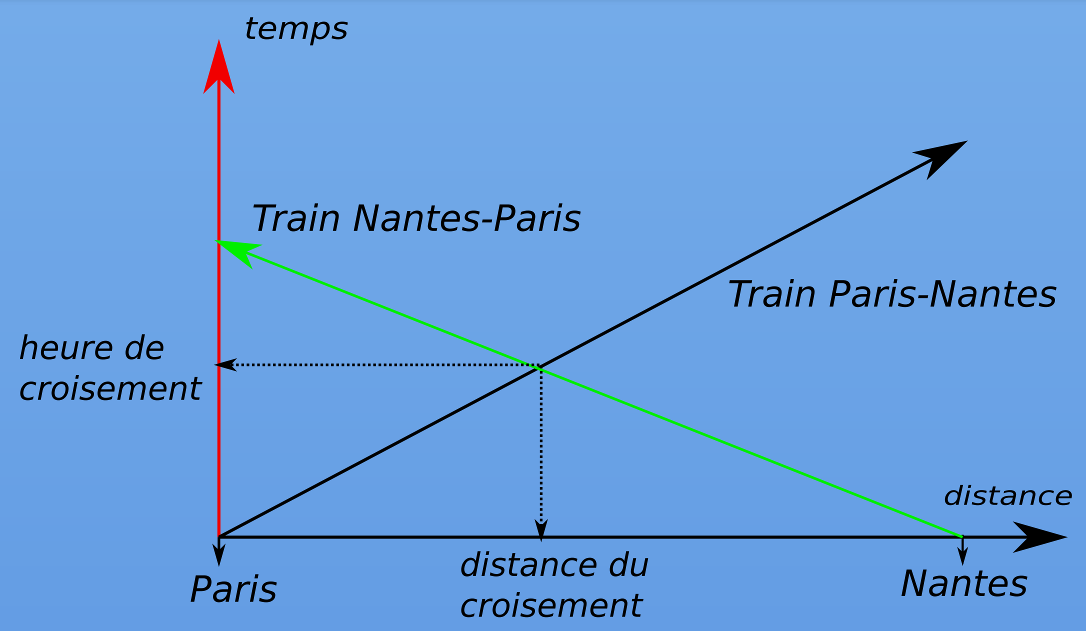
A gauche, un mouvement circulaire représenté dans l'espace classique, sans indication de temps.

A droite, sa visualisation dans un diagramme d'espace-temps, l'axe des temps étant vertical.





Démystifions : Un diagramme chemin-de-fer est un diagramme d'espace-temps !
(à 2 dimensions, x et t)



Lignes d’univers :

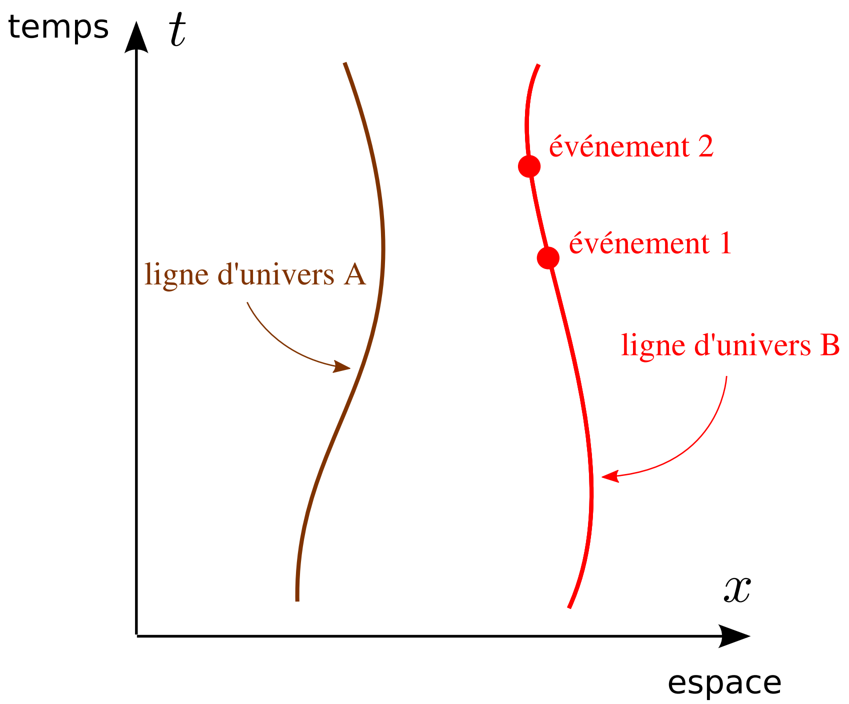
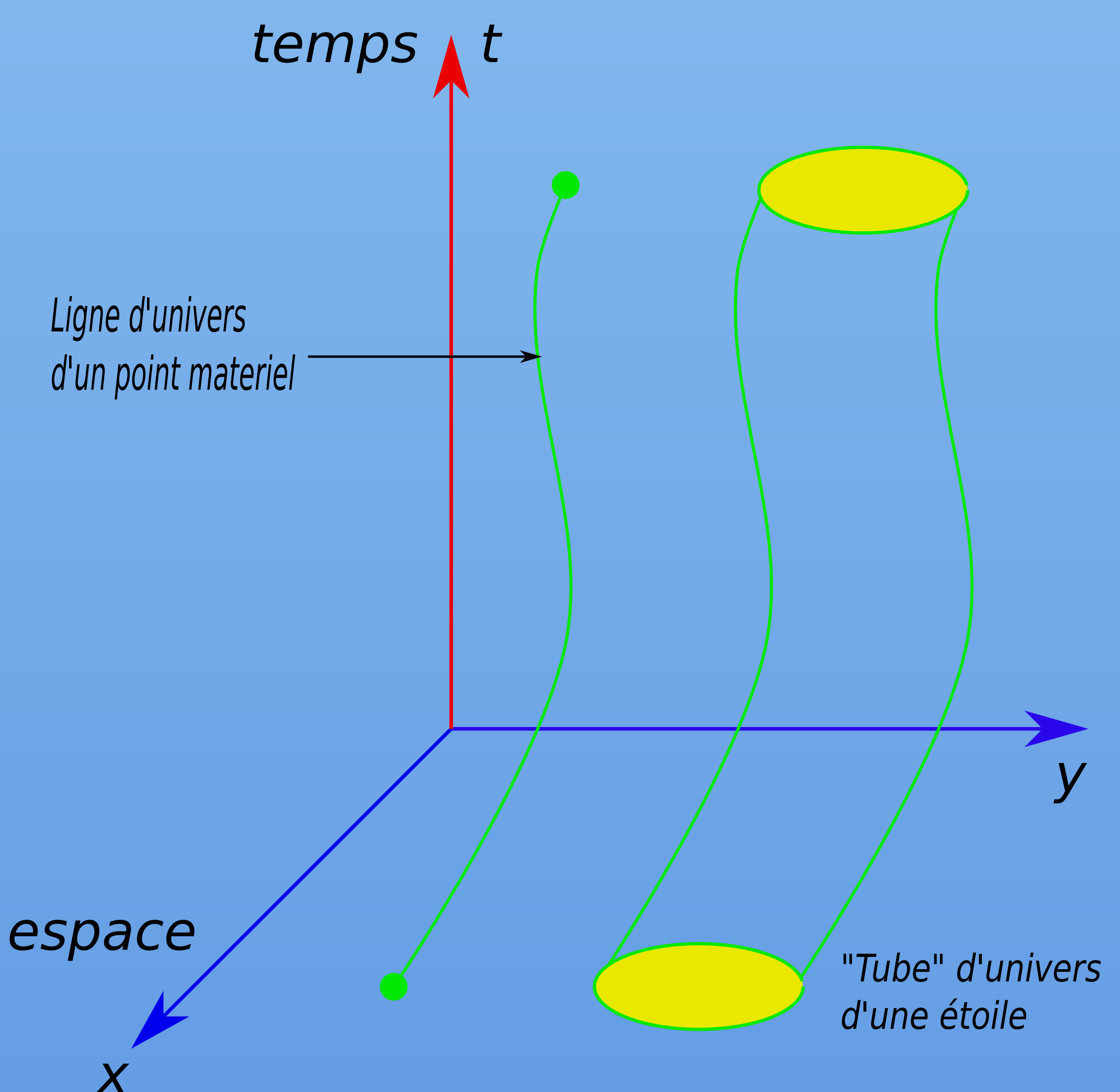


Diagramme d’espace-temps

- Dans l’espace :
  → une particule est représentée par un point
- Dans l’espace-temps :
  → une particule est représentée par une ligne continue, appelée ligne d’univers
  → un événement correspond à un point

C’est l’union mathématique de l’espace et du temps.



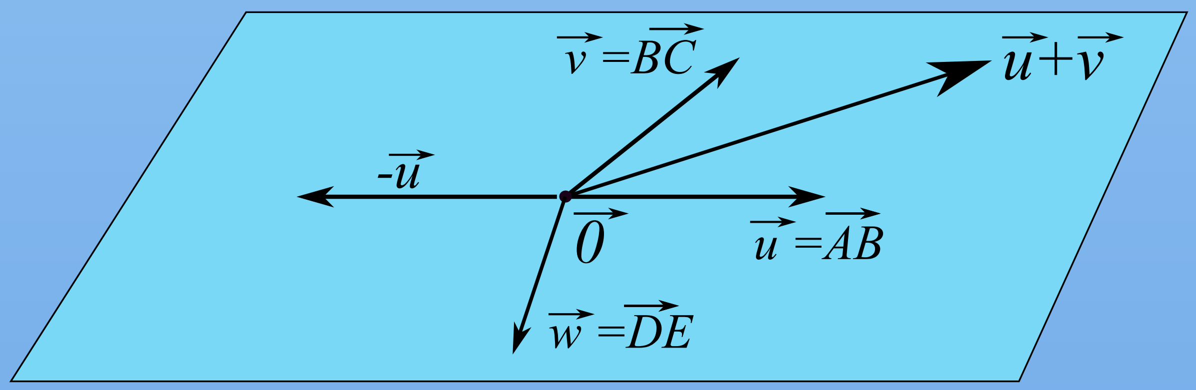
<u>A gauche</u> : ligne d’univers d’un "point matériel", qui représente un "petit" objet.

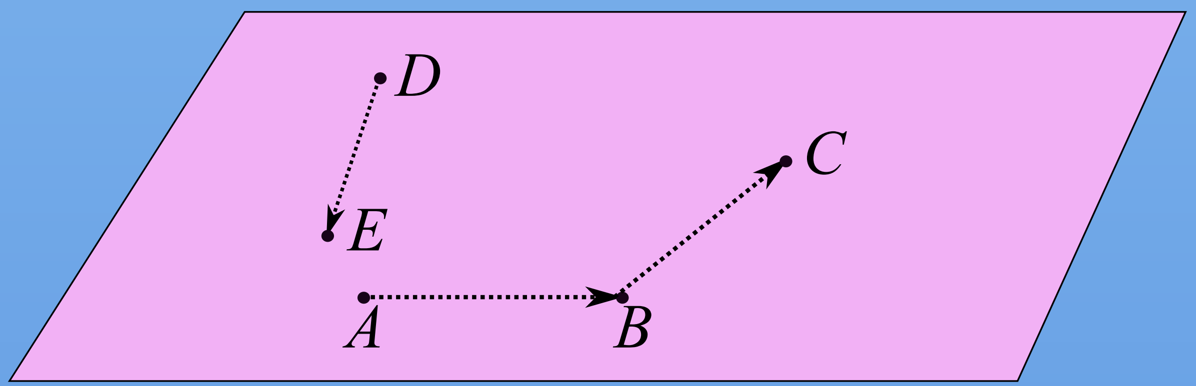
<u>A droite</u> : l’histoire d’un "gros" objet, comme une étoile est représentée par un "tube" d’univers, constitué de l’ensemble de toutes les lignes d’univers de ses particules.

Quand on enlève une dimension spatiale, comme sur ce schéma d’espace-temps, une sphère devient un disque.

L'espace-temps sans gravitation:
La géométrie de la relativité restreinte.

Le premier espace géométrique utilisé pour faire de la *chronogéométrie :*
*L'espace-temps sans gravitation est un **espace affine de dimension 4.***
(C'est la définition moderne de l'espace Euclidien classique…)





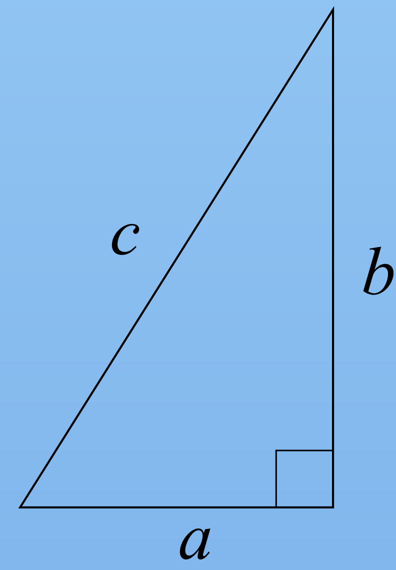
Un ***espace affine*** c'est un espace de points avec :

- U***n espace vectoriel associé :*** des ***vecteurs,*** que l'on peut voir comme les déplacements d'un point à un autre, et qu'on peut additionner et multiplier par un nombre.
- Une notion de ***droite,*** définie grâce aux vecteurs.
- Une ***Dimension :*** nombre minimal de vecteurs qui permettent de reconstruire, par addition et multiplication par un nombre, tous les autres. (Un tel jeu minimal de vecteurs est une ***base.***)
- Des repères, ou référentiels : des vecteurs de base plus un point origine.

Géométrie *signifie « science de la mesure du terrain ».*
Il nous faut donc maintenant voir comment on mesure des distances dans un espace affine…

Pythagore… en toute dimension.

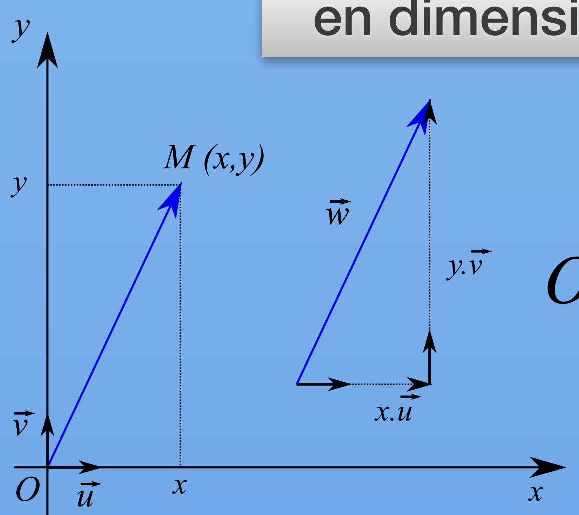
$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Donc, dans un repère orthogonal…

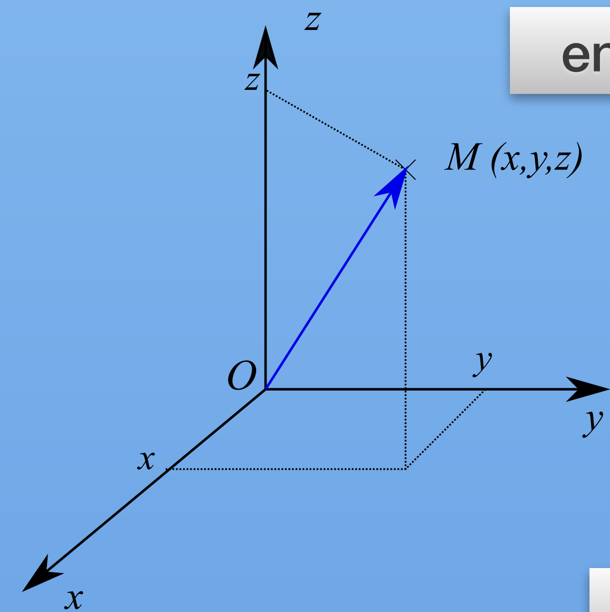
en dimension 2 :



$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Note : ça marche aussi pour les vecteurs $: |w| = \sqrt{x^2 + y^2}$

en dimension 3 :



$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

en dimension 4 :

Note : la ***dimension*** *d'un espace géométrique, c'est le* ***nombre de coordonnées*** *qu'il y faut pour repérer un point.*

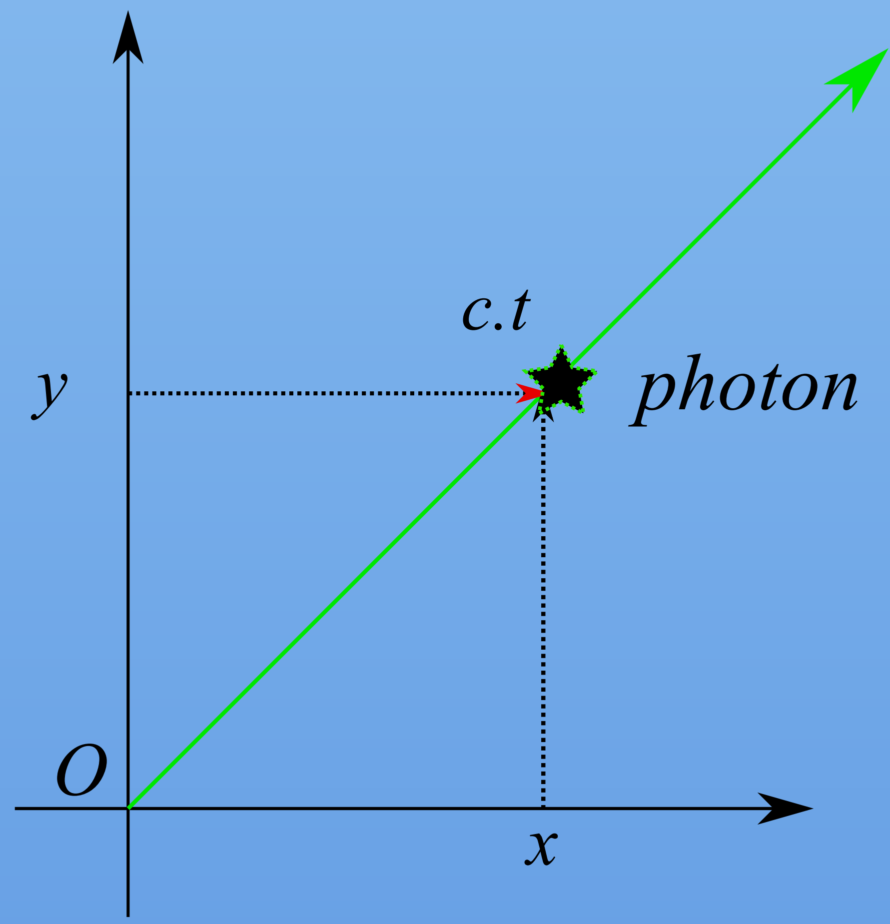
Dans un espace de dimension 4, où l'on repère donc les points avec 4 coordonnées, (x,y,z,w), on peut définir la distance euclidienne entre un point origine O et un point M de coordonnées (x, y, z, w) par :

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

Une observation décisive de Poincaré, Minkowski…

Minkowski, s'appuyant sur les travaux d'Einstein et de Poincaré, partit de l'idée suivante : si c est la vitesse de la lumière, alors un photon émis au point O, de coordonnées $(0,0,0)$, parcourt en un temps t une distance $c.t$. Si on appelle (x,y,z) les coordonnées du photon à cet instant t, sa distance spatiale à O peut alors aussi s'écrire $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Elevant au carré ces deux distances on a donc $x^2+y^2+z^2=(ct)^2$, soit :

$$x^2+y^2+z^2-(ct)^2=0.$$



Ou, pour un mathématicien considérant c=1,

$$x^2+y^2+z^2-t^2=0$$

Cette quantité doit donc être importante…

Diagramme dans l'espace « *classique* »… (on a pris ici z=0)

Pythagore revu et modifié :

1/ On simplifie notre cadre géométrique en regroupant les mesures de distance et de temps dans un seul espace : *l'espace-temps, un espace affine de dimension 4*.

***2/* Quand on veut mesurer des distances entre deux événements, il faut alors penser à la distance spatiale *et* à la distance temporelle. Pour faire de la *géométrie*, on munit alors l'espace-temps d'une mesure des distances *spatio-temporelles* avec un « *théorème de Pythagore modifié »*.**

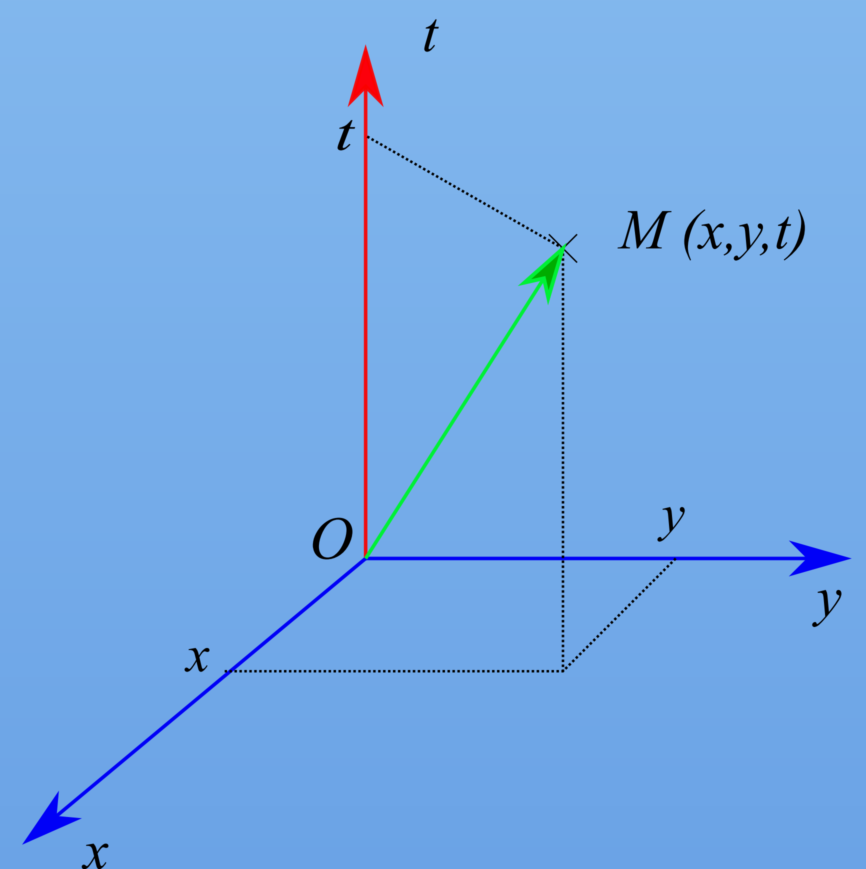
Coup d'audace :

On définit la *distance spatio-temporelle* d'un point origine O à un point M de coordonnées (x,y,z,t) par :

$$\sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|}$$

On l'appelle une « *pseudo-distance* ».

Toute l'astuce est dans le signe - !



$$OM = \sqrt{|x^2 + y^2 - t^2|}$$

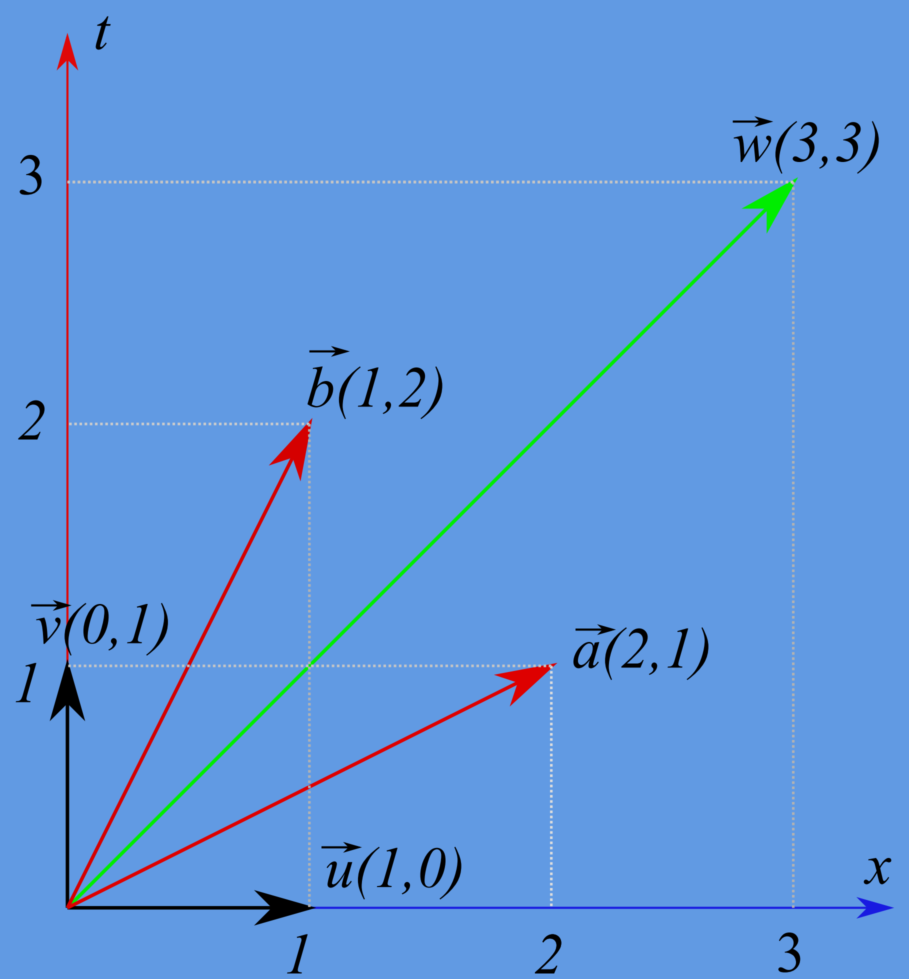
(on a supprimé z ici)

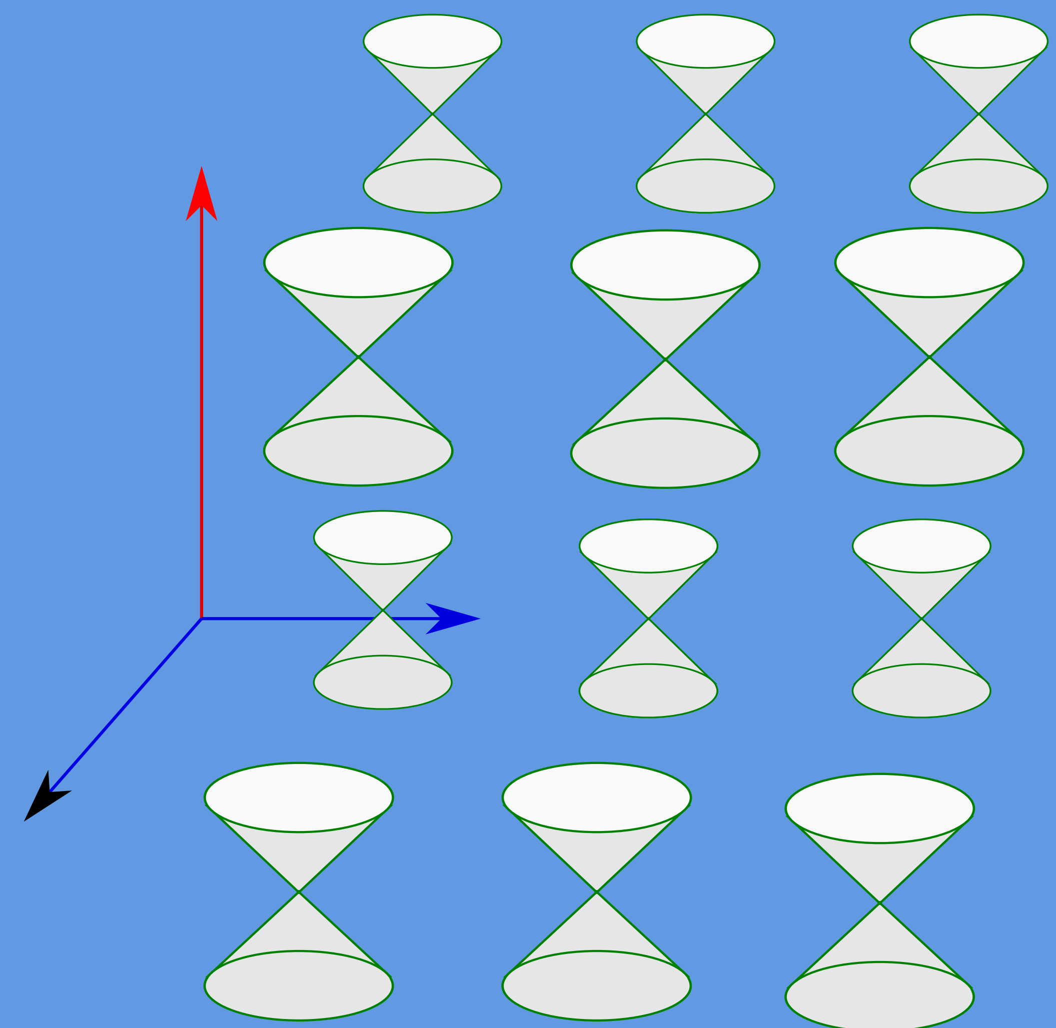
On obtient une *nouvelle géométrie* :

Deux caractéristiques essentielles :

-Une notion plus générale d'orthogonalité, de nouveaux repères « orthogonaux ».

-Une nouvelle structure : les cônes de lumière.





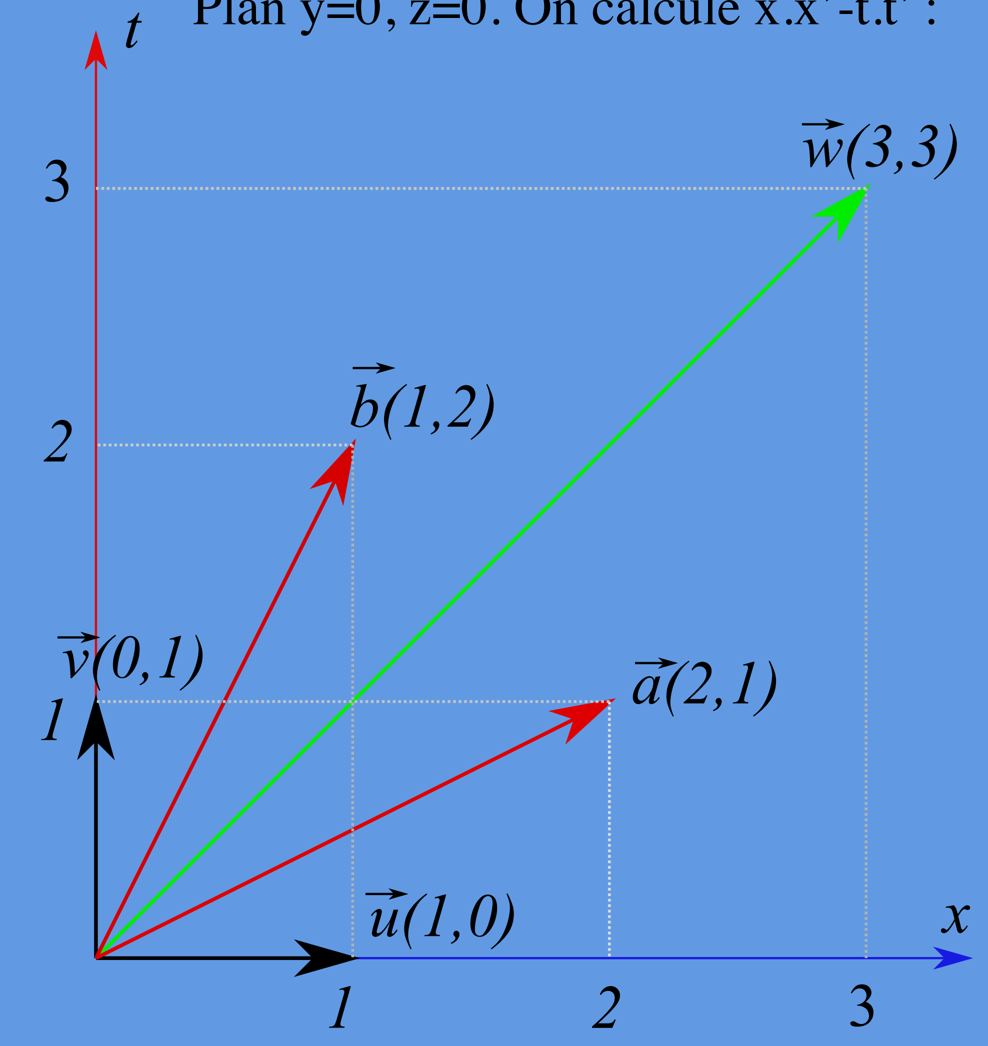
- Qu’est-ce que l’orthogonalité :

Rappel : Pythagore est à double sens : donc un triangle qui *vérifie* la relation de Pythagore $(a^2 + b^2 = c^2)$ *est* rectangle. Cette relation *définit* donc l’orthogonalité.

On se sert de cette idée avec « Pythagore modifié » . on obtient une notion plus générale d’orthogonalité :

- *A partir de Pythagore, les mathématiciens ont inventé une machine à détecter l’orthogonalité :* **le produit scalaire.**
- Les expressions $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ et $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ (Pythagore modifié) sont des « *formes quadratiques* ».
- On leur associe des « *produits scalaires » : pour deux vecteurs* $u=(x,y,z,t)$ *et* $v=(x',y',z',t')$ *leur* ***produit scalaire*** *c’est :* $u\,.\,v = x\,.\,x' + y\,.\,y' + z\,.\,z' + t\,.\,t'$ ou, pour Pythagore modifié par un dernier signe - , $u\,.\,v = x\,.\,x' + y\,.\,y' + z\,.\,z' - t\,.\,t'$.
- *Par définition*, deux vecteurs sont dits « ***orthogonaux*** » si leur produit scalaire vaut 0.
- Toute l’astuce est dans le signe « - » !
- Avec le -, les repères orthogonaux vont avoir un aspect… étonnant !
- Visuellement, (avec de bonnes unités, c=1, et y=z=0), deux vecteurs sont orthogonaux si ils sont symétriques par rapport à une diagonale.

Plan y=0, z=0. On calcule x.x’-t.t’ :

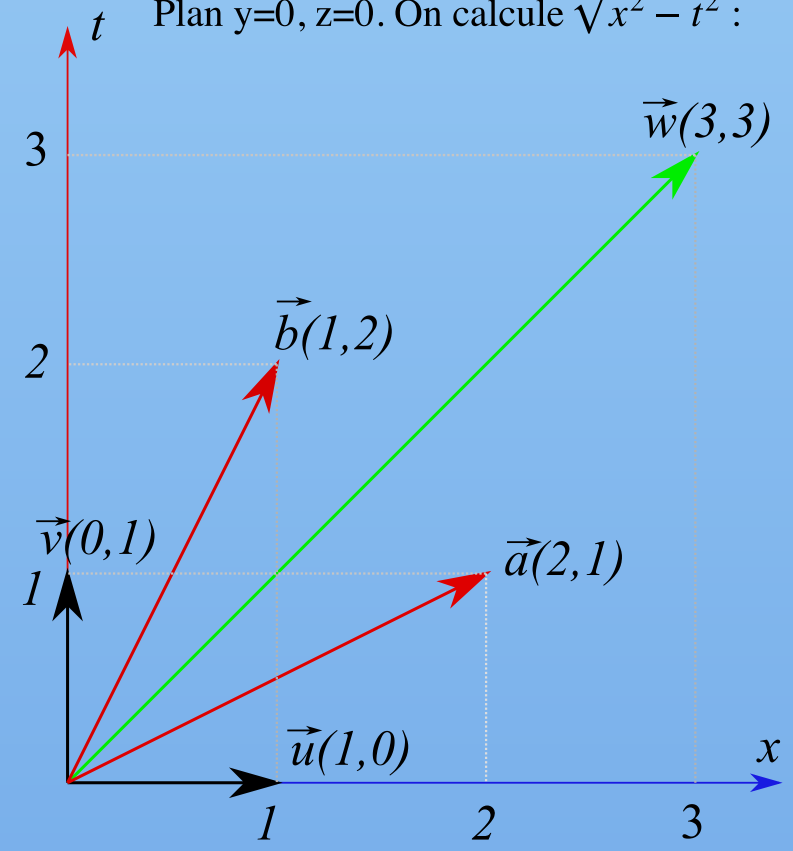


Calculer : u.v ; a.b ; et w.w. Conclure…

On obtient une géométrie aux propriétés étonnantes, mais parfaitement cohérente…

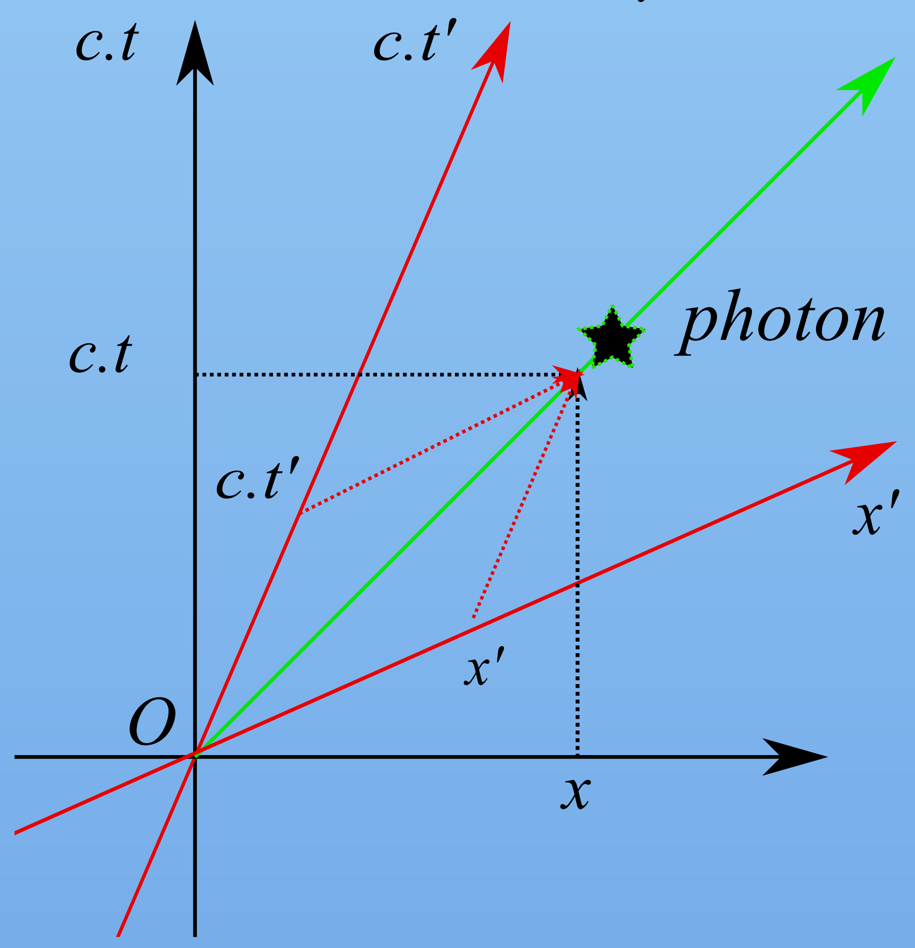
Les cônes de lumière.

Plan y=0, z=0. On calcule $\sqrt{x^2 - t^2}$:



Le vecteur w est de pseudo-longueur nulle ! Un Zéro, en maths, ça signifie toujours quelque chose de particulier…

Plan y=0, z=0. On calcule $\sqrt{x^2 - (c\,.\,t)^2}$:



Tous les points de la droite verte sont à une pseudo-distance nulle de O.

<u>On postule alors que cette droite est la ligne d'univers d'un photon !</u>

En marquant tous les points à pseudo-distance nulle de O, on obtient le <u>cône de lumière de O !</u>

(On peut montrer que :) ***<u>Ce cône est indépendant des axes de coordonnées choisis.</u>***

On « marque » tous les points à une pseudo-distance nulle de O, (ou tous les vecteurs de pseudo-longueur nulle), i.e ceux vérifiant (dans un repère orthogonal) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

- Avec de bonnes unités (c=1) dans un repère de départ, ça donnera des droites à 45°, les diagonales donc…

-Avec 2 dimensions spatiales (x,y), ces droites « tournent » autour de l'axe des t, on obtient ***<u>des cônes</u>*** (diapo suivante).

(On a "supprimé" les coordonnées y, z sur ce diagramme d'espace-temps, et on prend c=1. C'est le plan y=z=0). Un autre repère orthogonal marquera les mêmes points, c'est indépendant des coordonnées choisies : $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0 \;\; ssi \;\; x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$

- On choisira dans toute la suite des unités pour que ces droites lumière soient à 45°.

- (Note : c'est vrai même dans un repère non orthogonal, mais le changement de coordonnées donnent alors une « formule » pour la pseudo-longueur plus compliquée, comme en géométrie classique d'ailleurs.)

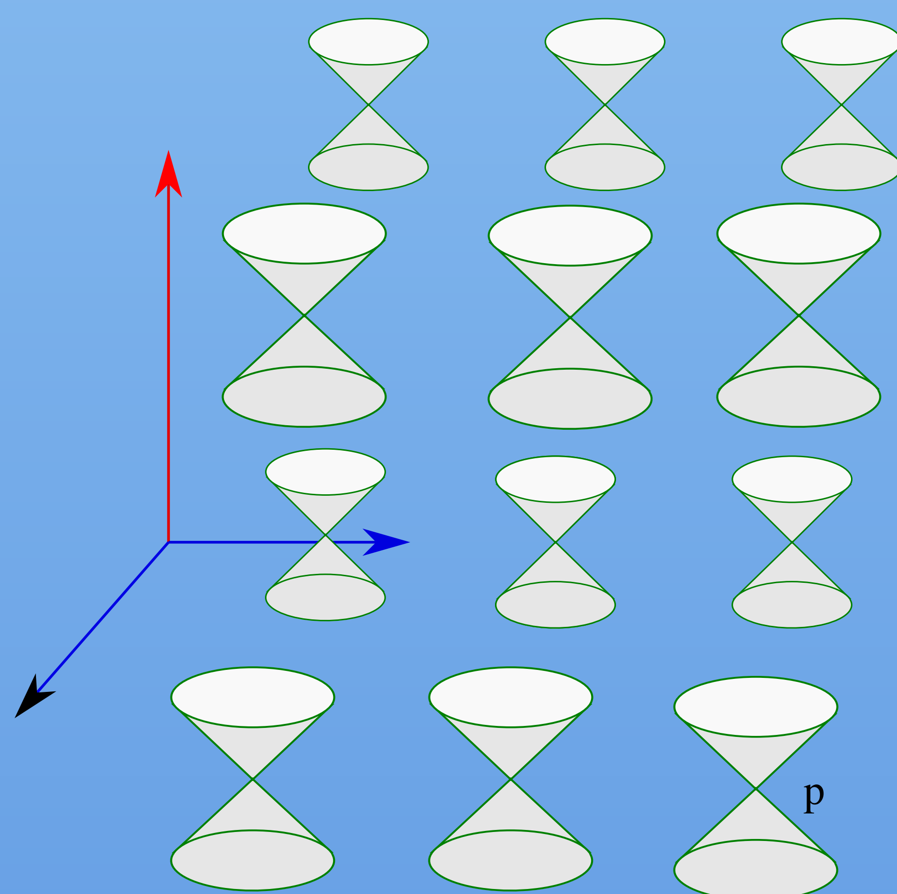
- Les mesures de distances spatio-temporelles doivent être indépendantes du choix des coordonnées, comme en géométrie classique !

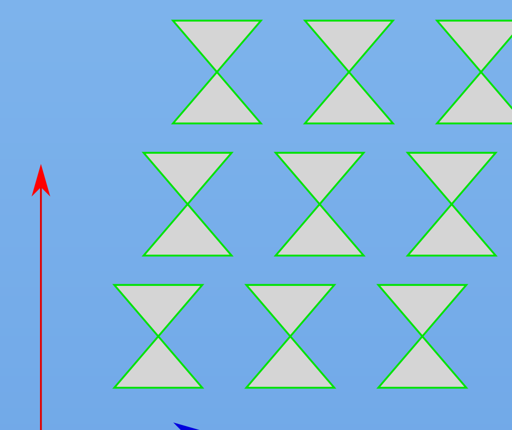
L’espace-temps est structuré par les cônes de lumière.

Chaque point de l'espace affine peut servir de point origine O d'un cône de lumière : L'espace-temps de la relativité restreinte est donc un espace affine de dimension 4 sur lequel on se donne en chaque point un double cône. Ces cônes doivent tous être parallèles entre eux :

Les cônes de lumière sont les mêmes dans tous les repères (référentiels).
C’est la traduction géométrique de la constance de la vitesse de la lumière.

A partir de chaque point p de l’espace-temps, on marque les points à pseudo-distance nulle de p. On obtient le cône de lumière de p.



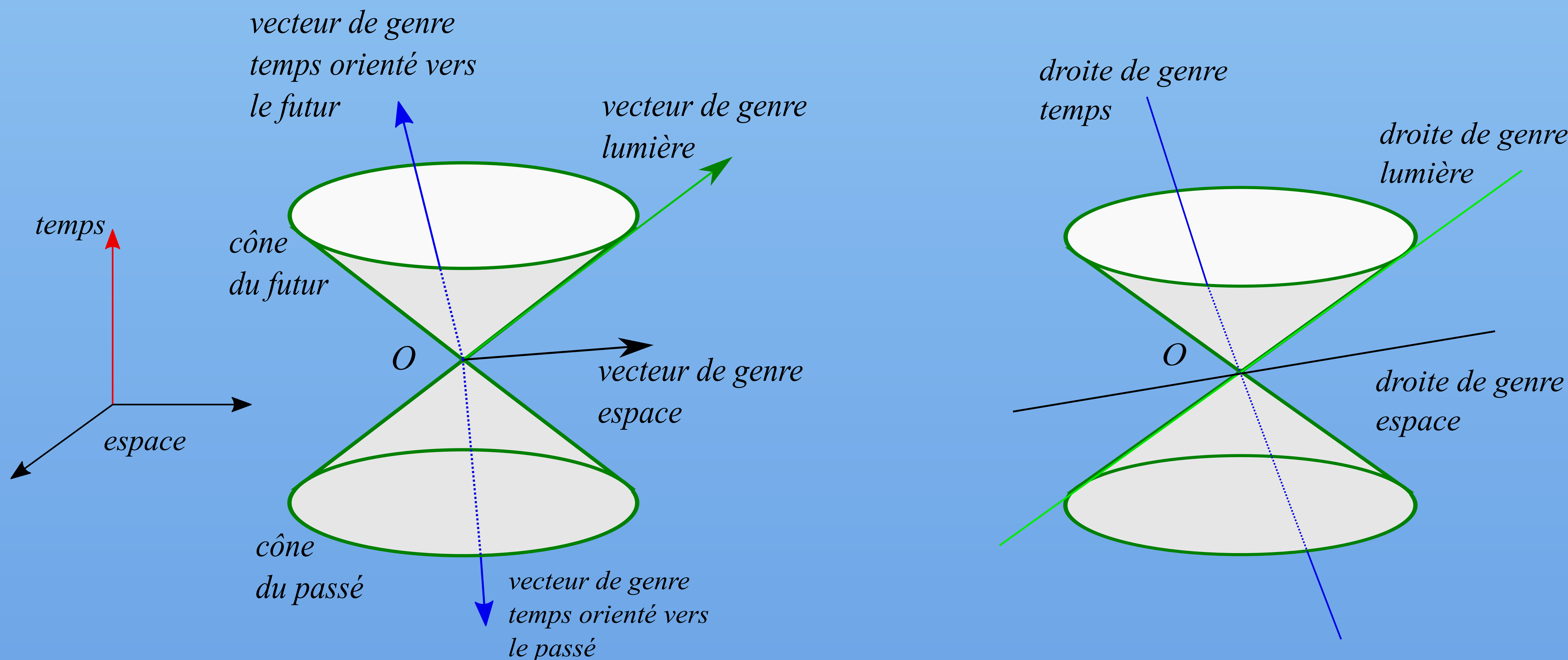


Si on supprime deux dimensions spatiales comme sur la plupart des diagrammes d'espace-temps, les cônes sont « plats".

<u>Remarque importante</u> : Il faut aussi noter que dans ce diagramme d’espace-temps, une dimension spatiale a été supprimée, et que l’axe des temps est vertical. Par conséquent, chaque tranche horizontal d’un cône, qui sur ce dessin est un cercle, est en fait une sphère : la lumière quitte l’origine du cône dans toutes les directions de l’espace à la même vitesse, et crée donc, à chaque instant, une sphère. C’est pourquoi *<u>le cône de lumière est de dimension 3 dans l’espace-temps de dimension 4.</u>*

Genre temps, genre lumière, genre espace :

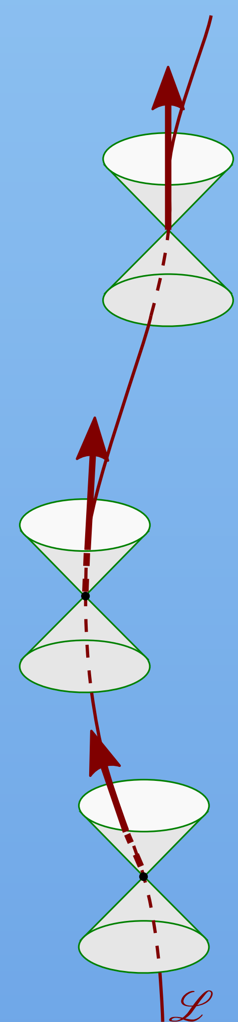
A partir du cône de lumière, on définit trois types de vecteurs ou de droites.

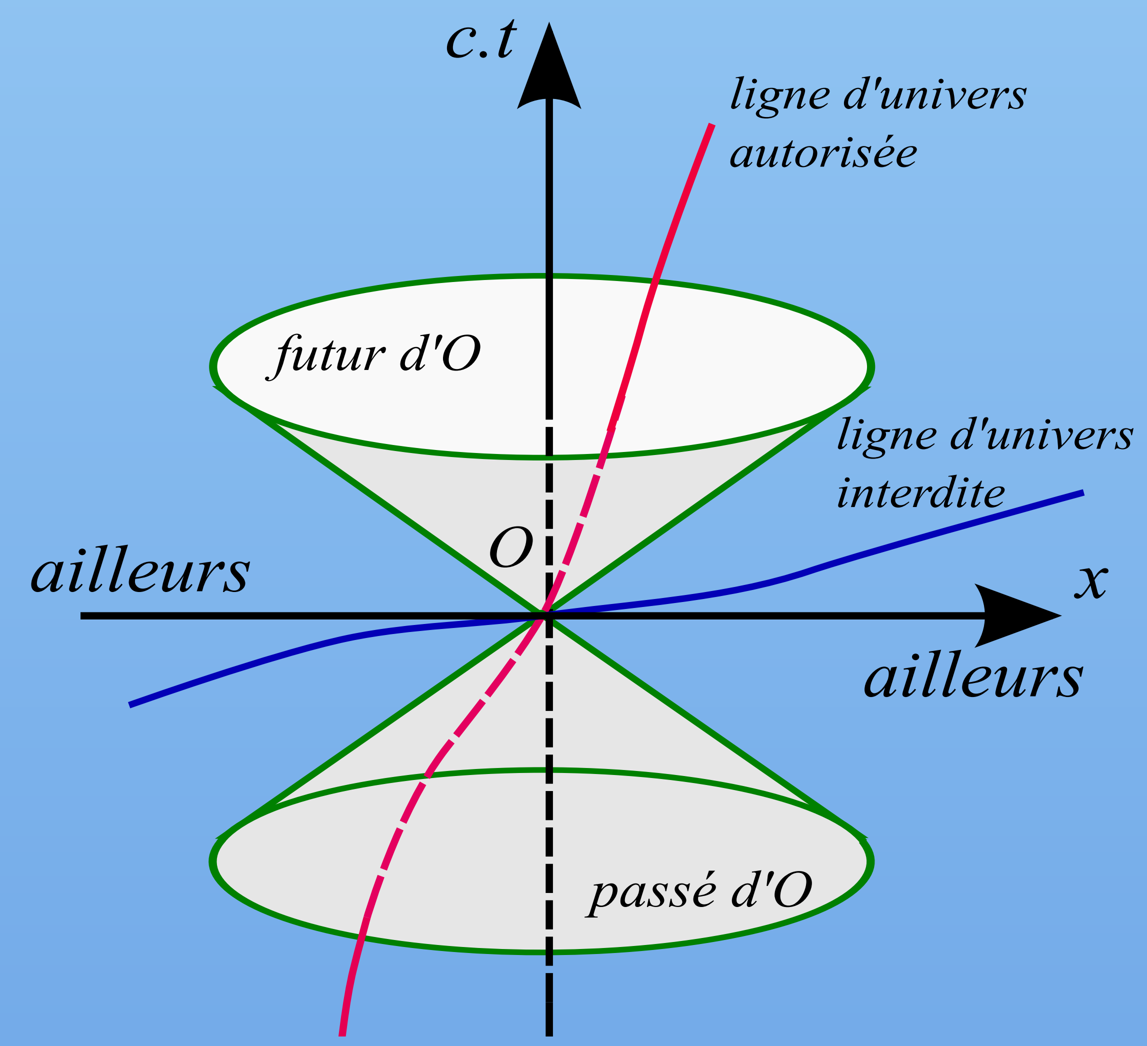


- Par définition, les droites ou vecteurs de genre temps sont à l'intérieur du cône de lumière, ceux de genre espace sont à l'extérieur.
- Les vecteurs (ou droites) de genre lumière sont les génératrices du cône.

Les Postulats de la Relativité Restreinte :
Les Lignes d'univers des objets physiques…

La ligne d'univers d'un objet physique :





- Les vecteurs tangents en chaque point de la ligne d'univers doivent toujours être à l'intérieur du cône de lumière.
- C'est la traduction géométrique du postulat qu'aucun objet physique ne peut aller plus vite que la lumière !

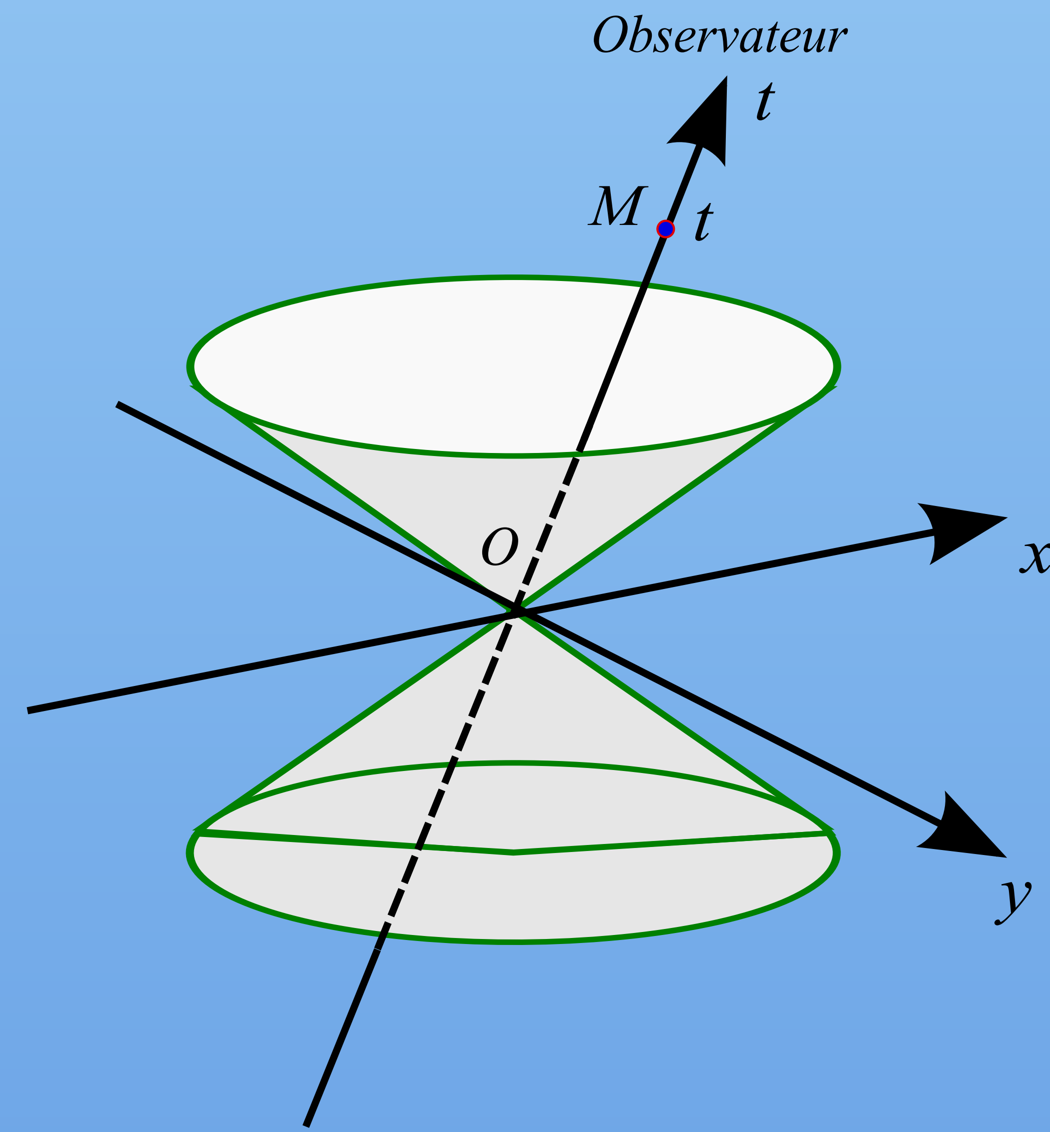
- Un ***observateur*** est représenté par une ligne d'univers de genre temps.
- C'est un ***observateur inertiel*** si sa ligne d'univers est une **droite**. C'est un observateur qui *n'accélère pas*. Il peut alors se servir de cette droite comme axe temporel d'un repère orthonormé.
- (au passage, la relativité restreinte traite sans problème les mouvements accélérés…)

Le temps propre d'un observateur : définir ***géométriquement*** ce qu'est… ***le temps !***

Un observateur dont la ligne d'univers est une droite peut utiliser sa ligne d'univers comme axe "temporel" d'un repère. S'il applique la formule de Minkowski pour calculer la pseudo-distance entre deux points de sa ligne d'univers, il n'utilisera que la coordonnée temporelle car dans son repère les coordonnées spatiales des deux points seront égales à zéro : ici
M=(0,0,0,t) et $OM = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|} = \sqrt{t^2} = |t|$.

Il considérera donc que la pseudo-distance entre ces deux points est une durée.

De manière imagée : « Un observateur immobile dans l'espace, avance quand-même dans le temps… »

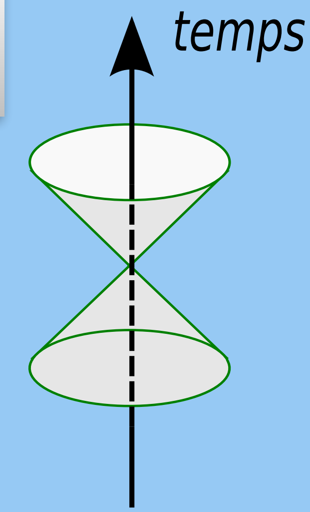


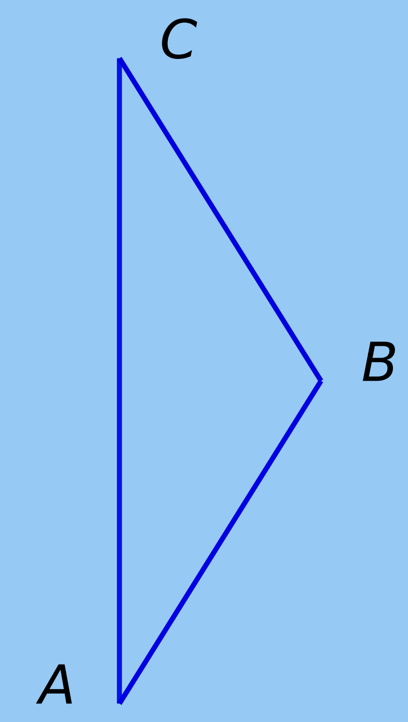
-La pseudo-distance mesurée entre 2 événements le long de sa propre ligne d'univers par un observateur est appelé **le temps propre** écoulé entre ces deux événements, pour *cet* observateur.

-*Physiquement*, c'est le temps qu'il utilise pour mesurer la durée de son voyage entre ces deux points de sa ligne à l'aide d'une *horloge qu'il transporte avec lui*.

Le "paradoxe" des jumeaux :

L'inégalité triangulaire inversée :



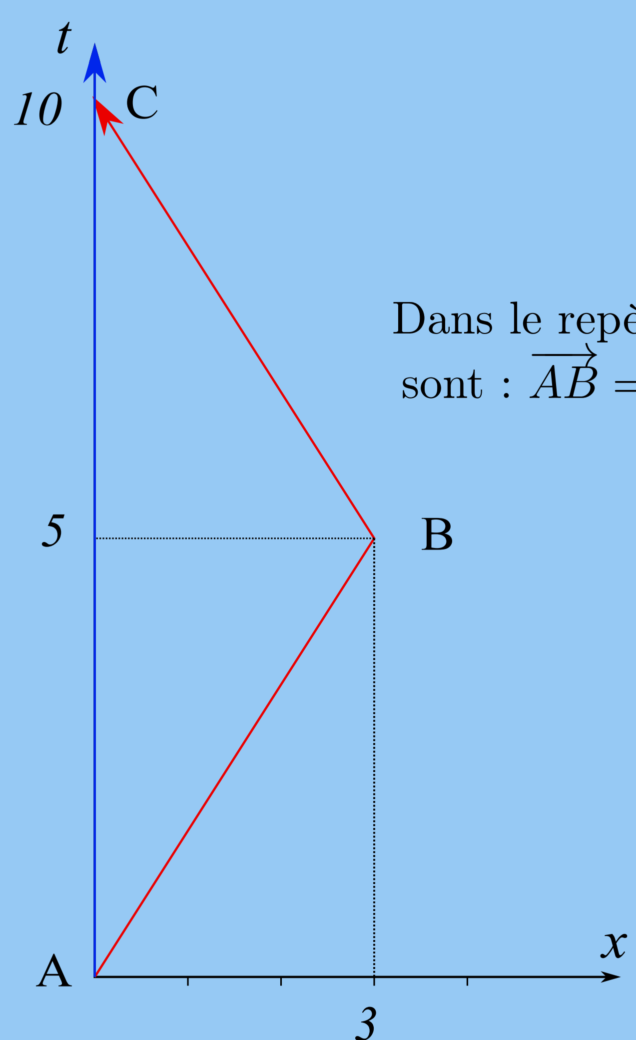


Cette nouvelle géométrie, due à la pseudo-distance de Minkowski, produit des effets contraires à nos habitudes Euclidiennes : une nouvelle intuition à construire...

Dans la géométrie de Minkowski, pour ce triangle :

AB + BC < AC.

(il faut que chaque coté soit de genre temps)



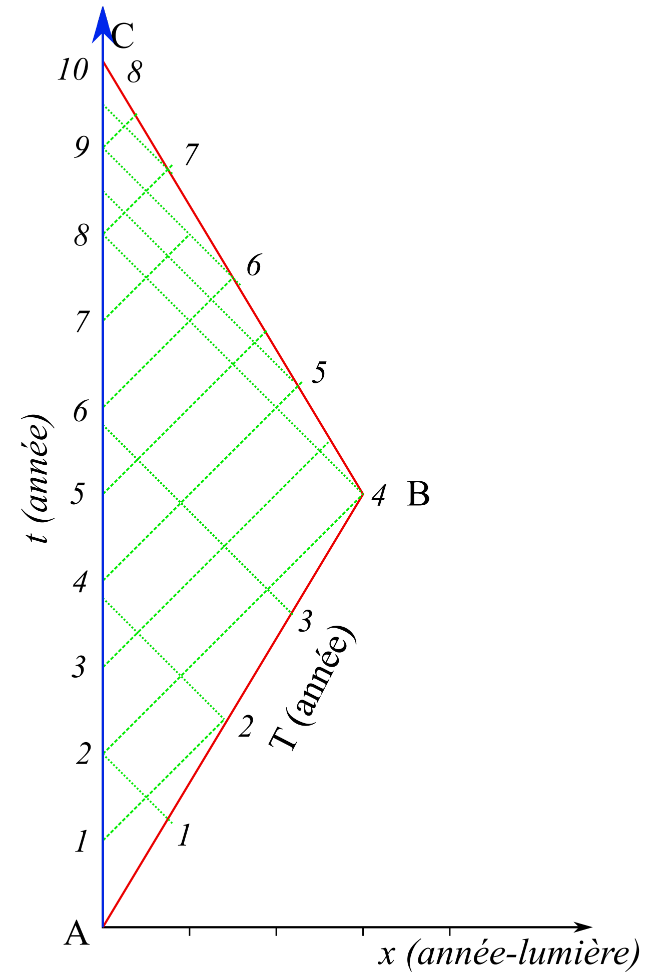
Dans le repère (x, t), on prend la pseudo-distance de Minkowski $x^2 - t^2$. Les coordonnées des vecteurs sont : $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$, $\overrightarrow{BC} = (-3, 5)$ et $\overrightarrow{AC} = (0, 10)$. Alors leurs pseudo-longueurs sont respectivement :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|3^2 - 5^2|} = \sqrt{|9 - 25|} = 4$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{|(-3)^2 - 5^2|} = \sqrt{|9 - 25|} = 4$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|0^2 - 10^2|} = \sqrt{|-100|} = 10$$

Donc $AB + BC = 8$ et $AC = 10$.

Dans l'espace-temps de la relativité restreinte, le plus court chemin entre deux points n'est pas toujours la ligne droite !!

Application au voyage aller-retour d'un spationaute, et de son frère jumeau l'attendant sur Terre :



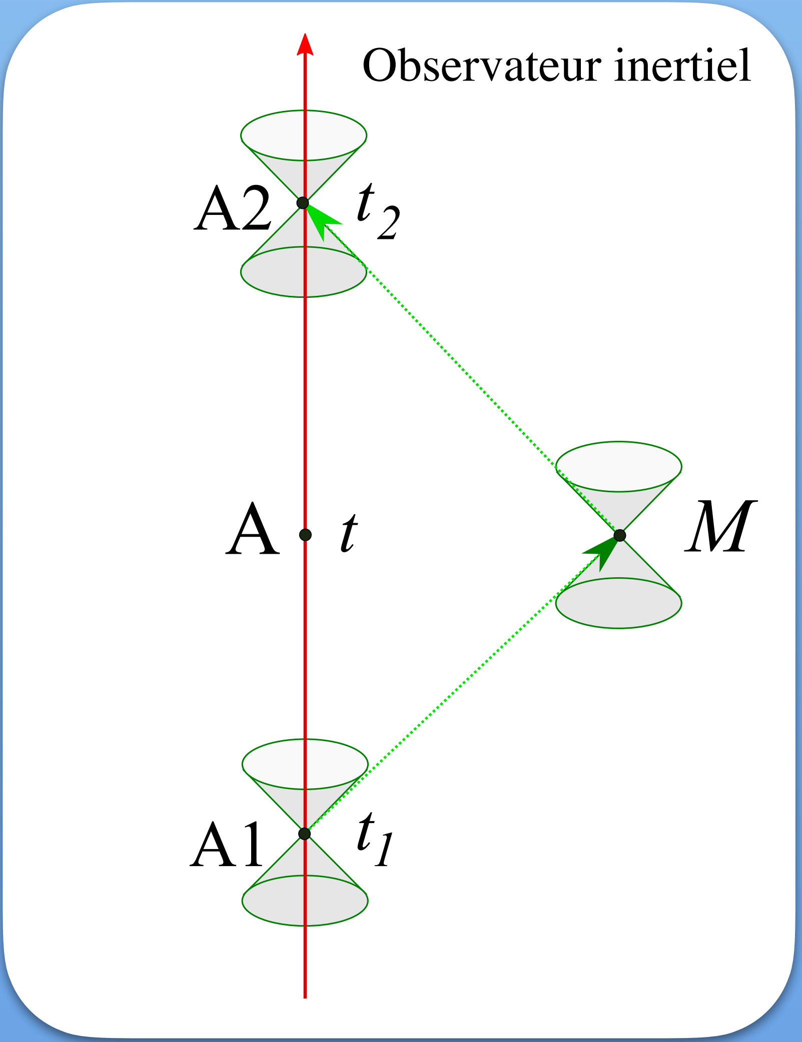
lorsqu'on a choisi <u>la bonne géométrie</u>, ce « paradoxe » est une simple conséquence géométrique !

Le temps propre t du frère resté sur terre est noté sur l'axe vertical. Le temps propre T du voyageur est indiqué le long des lignes d'univers de son voyage. B se situe à une distance spatiale mesurée par le terrien de 3 année-lumière. La différence dans l'écoulement des temps propres des deux jumeaux apparait en utilisant des photons, dont les lignes d'univers sont matérialisées par les diagonales en pointillés verts : le terrien envoie un flash lumineux tous les ans, lu sur sa montre terrienne. Sur son trajet aller, le spationaute les voit arriver tous les deux ans, lu sur la pendule de la fusée. Sur le trajet retour, il les voit arriver tous les six mois. C'est à partir de ce phénomène (Doppler) que l'on montre la dilatation des durées. À leurs retrouvailles, le terrien aura vieilli de 10 ans, le spationaute de 8 ans.

La relativité de la simultanéité :

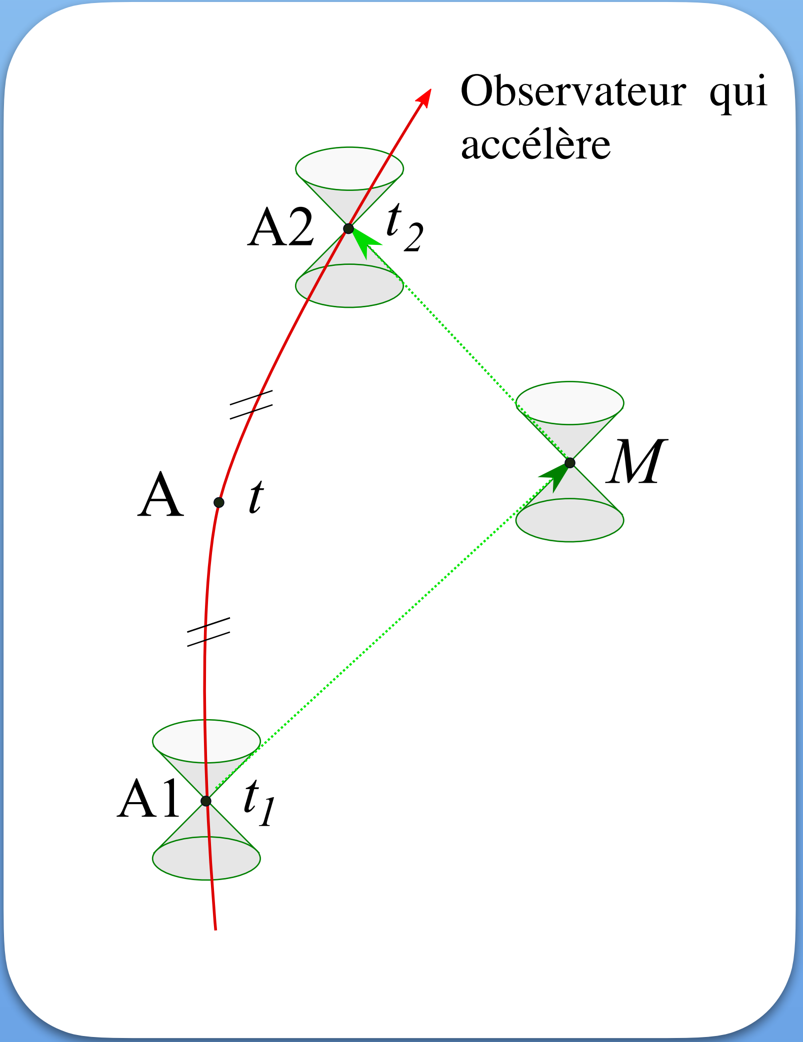
Datation au radar :

Comment un observateur attribue-t-il une date et une distance à un événement lointain ?
C'est Poincaré qui a trouvé la bonne méthode :
Il utilise la seule chose sûre, la vitesse de la lumière ! Il « flashe » les événements lointains.



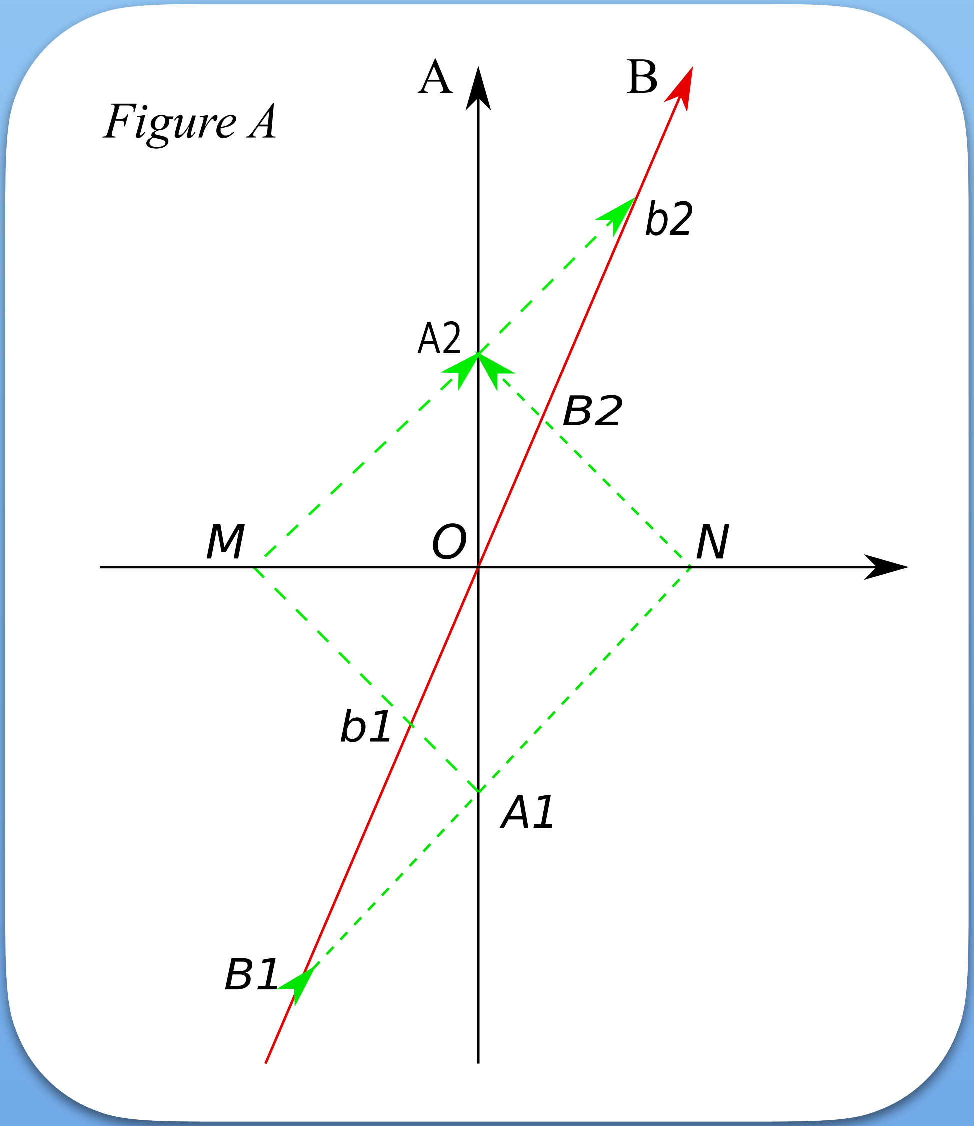
Les événement A et M sont simultanés pour l'observateur O si et seulement si A est situé à mi-temps de l'aller-retour d'un photon de O vers M.

O attribue à M la date : t=(t2+t1)/2



Ci-dessus, mesure au radar et définition Einsteinienne de la simultanéité : La date et la distance de M pour l'observateur $\mathcal{O}$ sont : $t = (t_2 + t_1)/2$ et $d = c.(t_2 - t_1)/2$. Les événements A et M sont simultanés *pour* $\mathcal{O}$ si et seulement si A est situé à mi-temps de l'aller-retour d'un photon de $\mathcal{O}$ vers M. L'ensemble des événements simultanés *pour cet observateur* à cet événement A est l'ensemble des événements qui auront la même date pour lui ; c'est ***l'espace de simultanéité*** de A pour cet observateur.

Relativité de la simultanéité :



Les événements M et N sont simultanés pour l'observateur A.

Mais N se produit avant M pour l'observateur B.

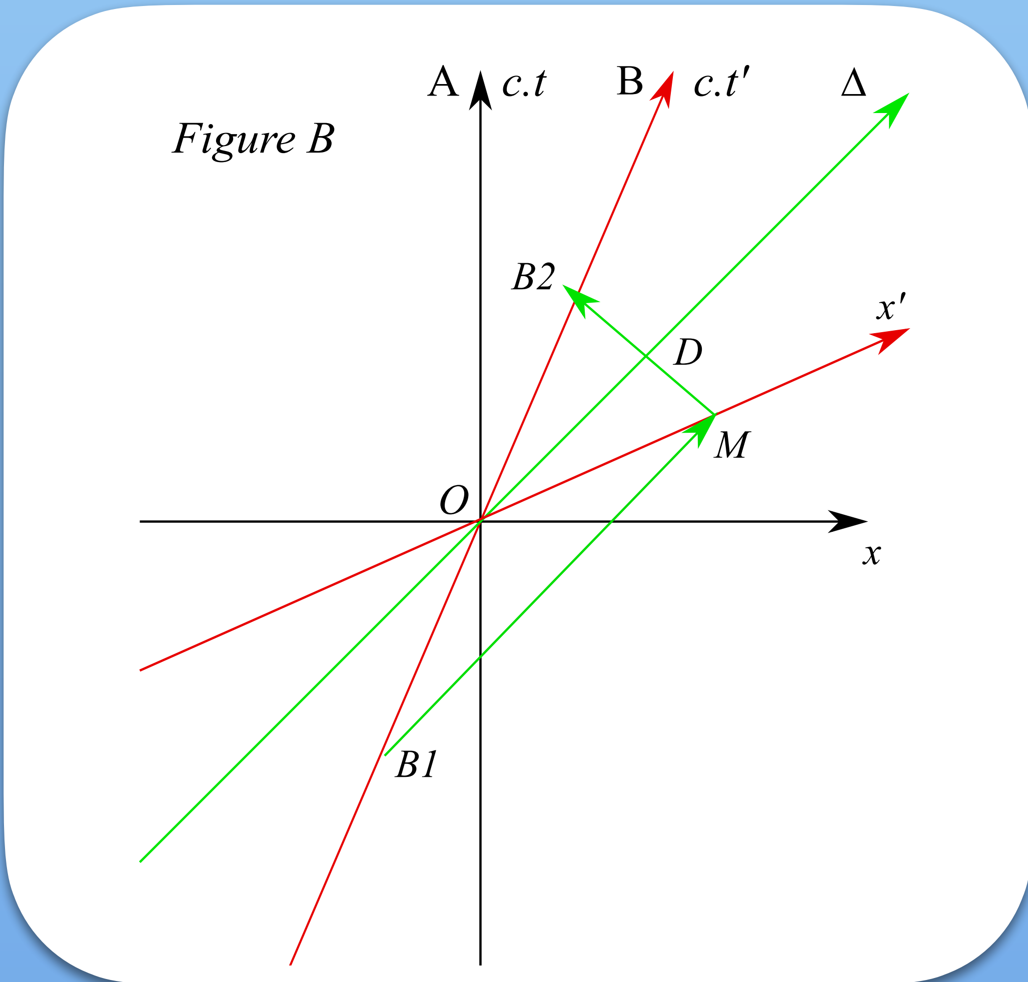
Le point clef de la démonstration est évidemment que les *droites de lumière sont indépendantes de l'observateur* ; A et B utilisent donc les mêmes droites pour "flasher" M et N.

lorsqu'on a choisi la bonne géométrie, cette relativité de la simultanéité est une simple conséquence géométrique !

La simultanéité de deux événements dépend donc de l'observateur, c'est une différence majeure par rapport à la mécanique newtonienne.

Cela prouve qu'il est impossible d'associer une date unique à chaque événement de l'espace-temps, mais seulement des dates relatives aux observateurs. Ainsi, si deux événements *M* et *N* sont simultanés pour un observateur, un deuxième observateur pourra voir *M* se produire *avant N*, alors qu'un troisième observateur pourra voir *M* se produire *après N*.

Espace de simultanéité :
petit aperçu géométrique.



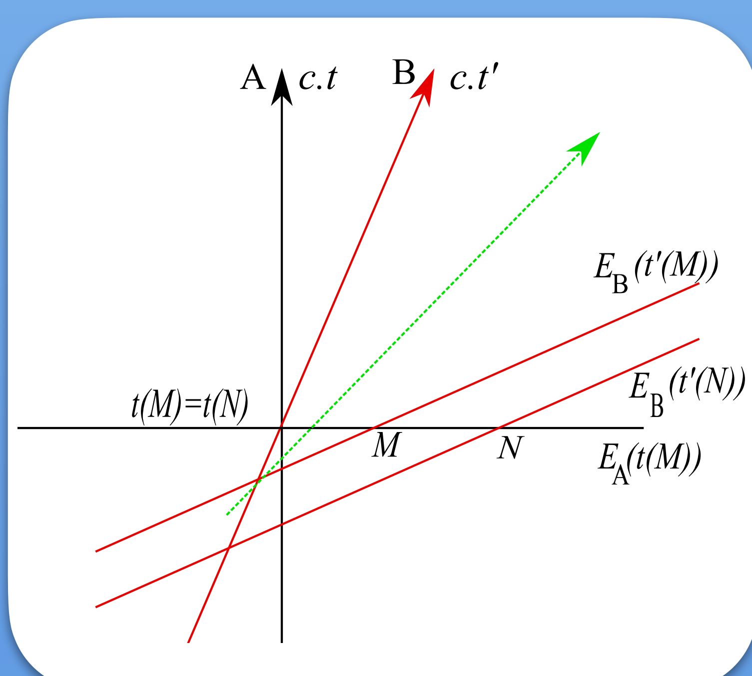
<u>Définition :</u> Espace de simultanéité d'un point O : ensemble des points simultanés à O pour un observateur donné. ***<u>C'est l'espace « vu » à un moment donné par cet observateur.</u>***

<u>Théorème</u> : En utilisant les droites de genre lumière, il est facile de montrer que pour un observateur inertiel, l'espace de simultanéité de O est la droite *<u>symétrique</u>* de sa ligne d'univers par rapport à la droite lumière passant par O.

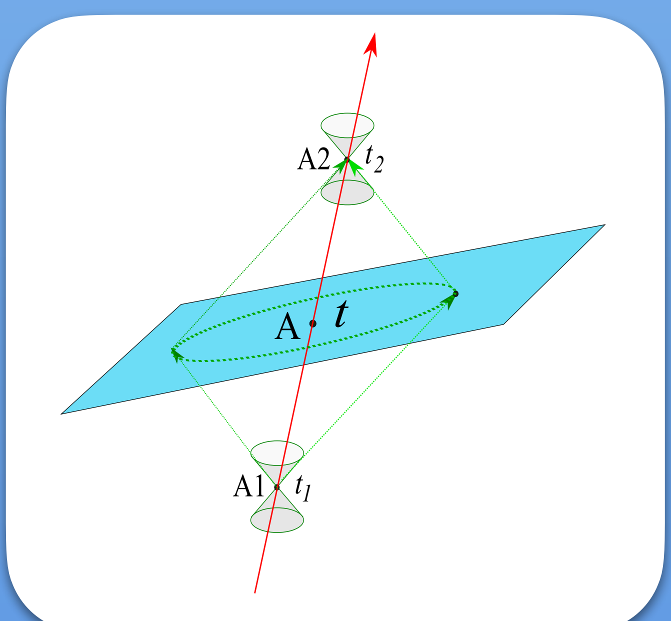
<u>Démonstration</u> : Utiliser Thalès (!) : Quelque soit M sur cette droite symétrique, O est au milieu de B1 et B2.

Rappel : Deux droites D et D' de l'espace-temps, se coupant en un point O, *<u>sont orthogonales pour la géométrie de Minkowski</u>* ssi elles sont symétriques par rapport à une droite lumière passant par O.

Relativité de la simultanéité, bis :

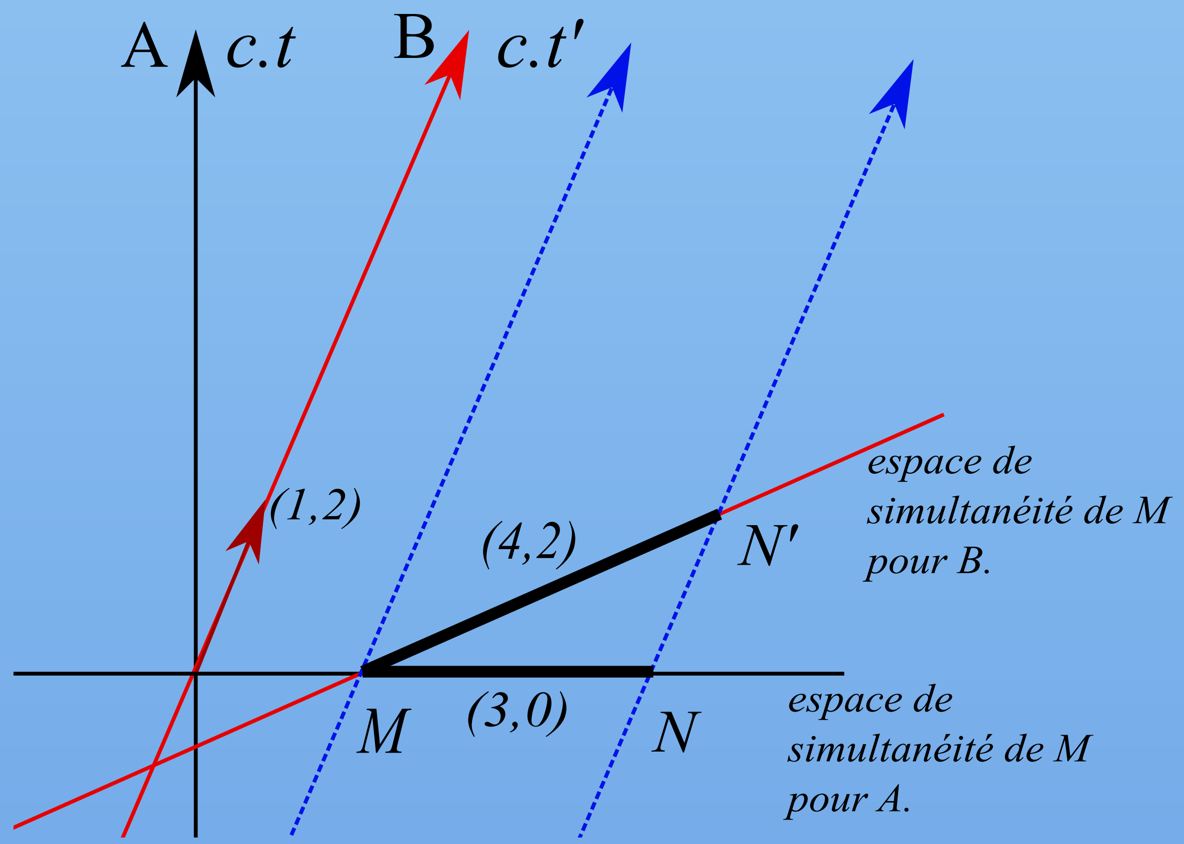


Remarque : dans l'espace-temps de dim 4, l'espace de simultanéité est de dimension 3 : c'est l'espace « vu à un moment donné » par l'observateur…



Conséquences : contraction des longueurs, et dilatation des durées.

Mesure d'une règle par deux observateurs en mouvement relatif.

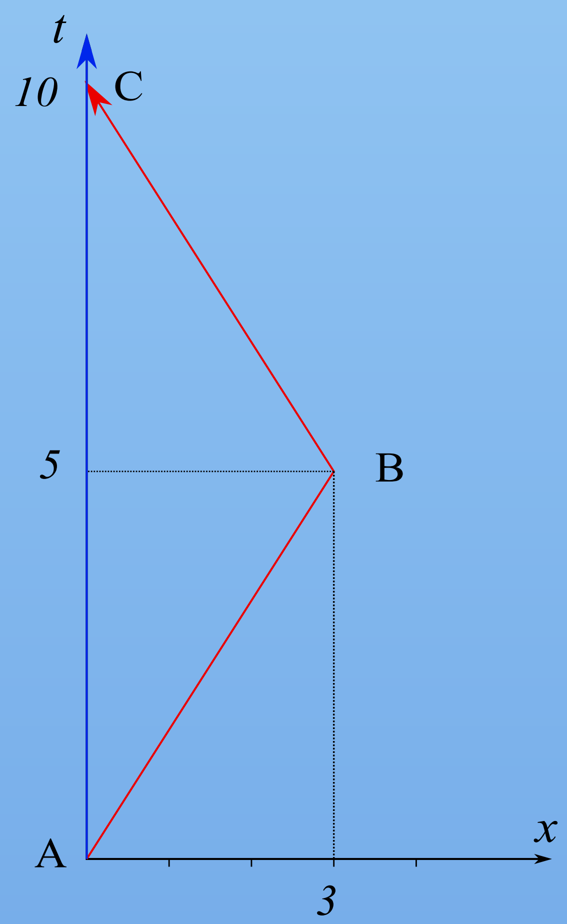


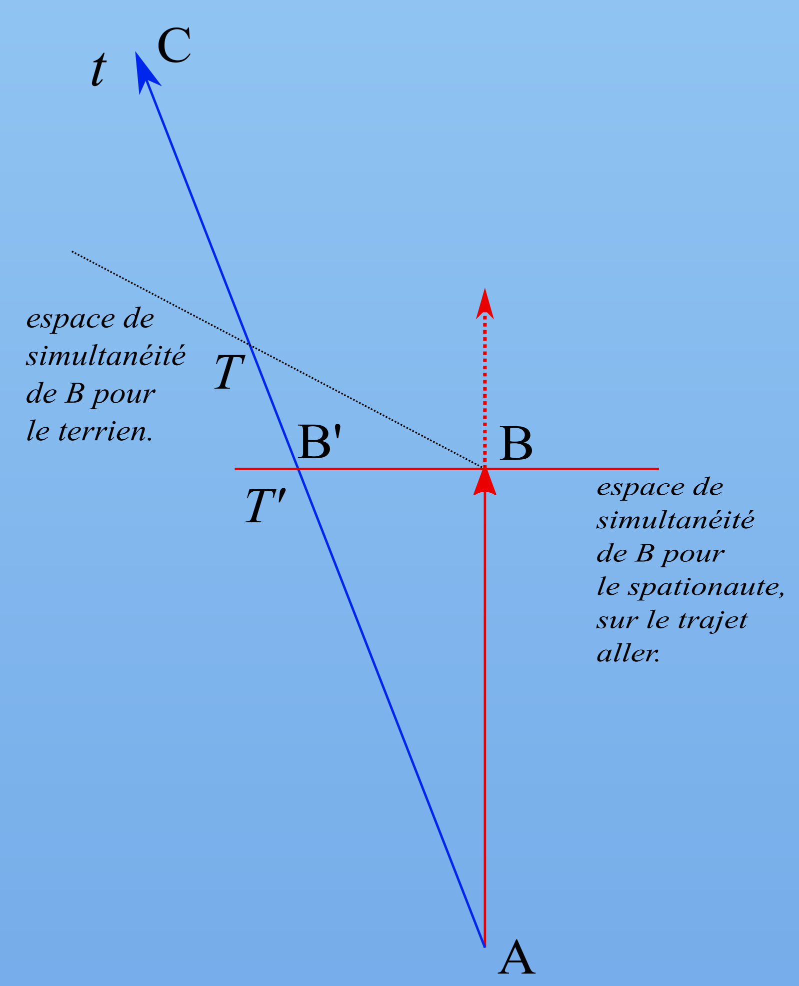
Le point fondamental est que pour mesurer la règle, un observateur doit évaluer la position de ses extrémités à un <u>même</u> moment donné. La règle doit donc être mesurée sur un espace de simultanéité, i.e sur « l'espace vu à un moment fixé »…

Le segment $[MN]$ est la règle "vue" et mesurée par l'observateur A, sa pseudo-longueur est $\sqrt{3^2} = 3$.
Le segment $[MN']$ est la règle "vue" et mesurée par l'observateur B, sa pseudo-longueur est
$\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,4... > 3$.

lorsqu'on a choisi <u>la bonne géométrie</u>, cette contraction des longueurs est une simple conséquence géométrique !

Dilatation des durées et espaces de simultanéité :





Au moment du demi-tour, le terrien considère que le spationaute a moins vieilli que lui.
Mais le spationaute considère qu'au moment du demi-tour, c'est son frère terrien qui a moins vieilli que lui ! (T'<AB= 4). Pourquoi ?

Le point clef, c'est que jusqu'au demi tour, les situations sont effectivement symétriques. Ce n'est plus le cas au moment des retrouvailles ! Le terrien et le spationaute n'attribuent pas les mêmes dates à l'événement demi-tour !

(Dans le repère de B :
$T' = |AB'| = \sqrt{|X_{B'}^2 - |AB|^2|} < |AB| = 4$ *. « Plus on s'incline vers une droite lumière moins on est vieux »…)*

Cela signifie simplement que deux observateurs différents n'attribuent pas la même date à un événement donné.

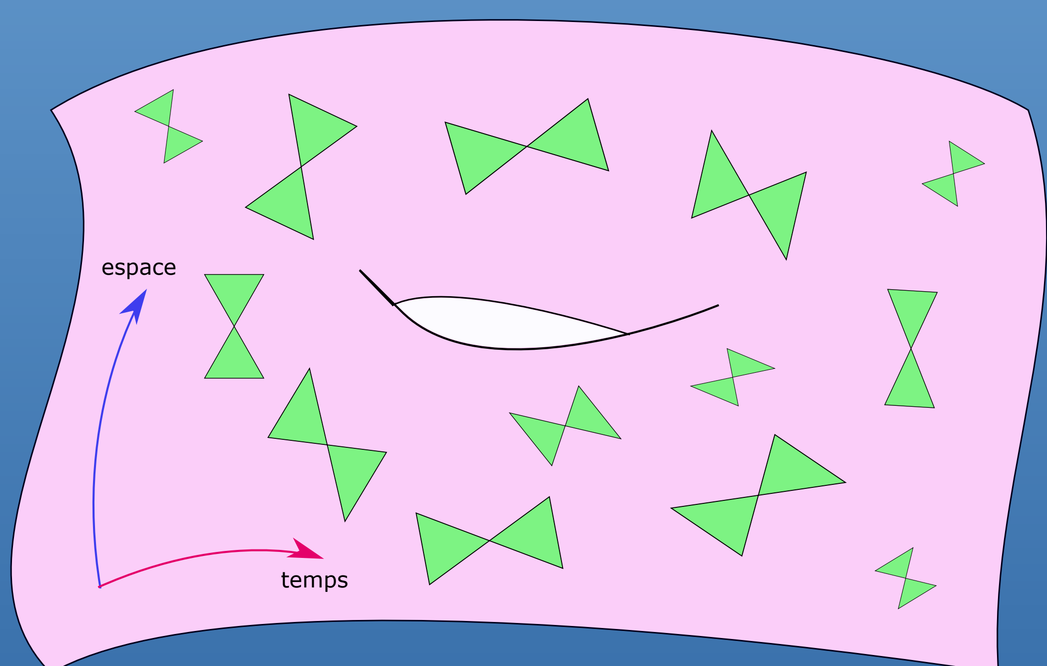
Attention : ces effets ne sont dus qu'à la nécessité de définir précisément le processus de mesure lié à chaque observateur. Aucune règle ne se contracte, aucun temps ne se dilate ! !

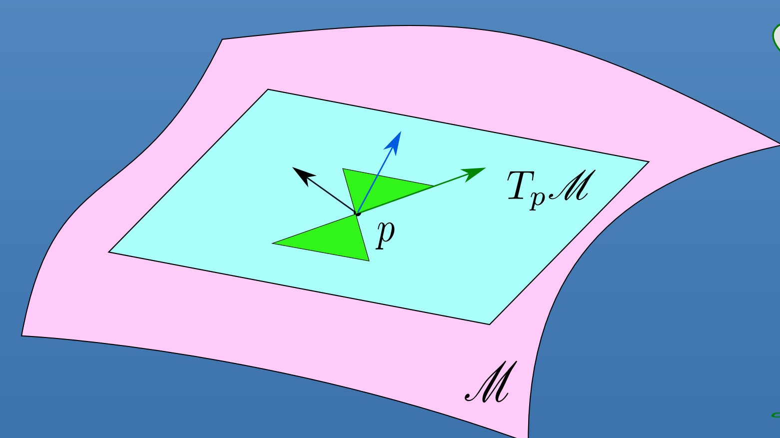
On a trouvé un « bon » espace géométrique pour faire de la chronogéométrie, sans gravitation …

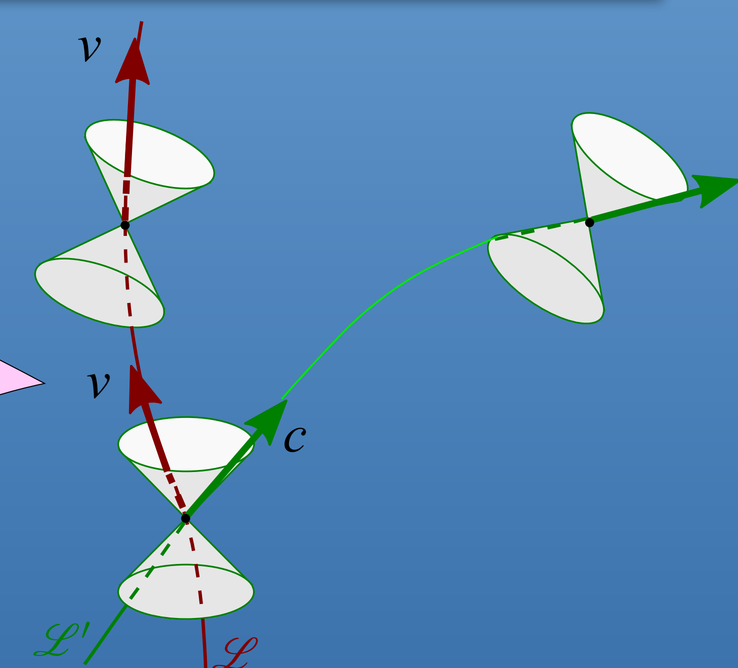
Les preuves des phénomènes liés aux mesures de temps et de distances y sont simples… et correspondent à l'observation !!

Maintenant, on veut y « inclure » la gravitation…

Quel est la géométrie de l'espace-temps en présence de gravitation ?





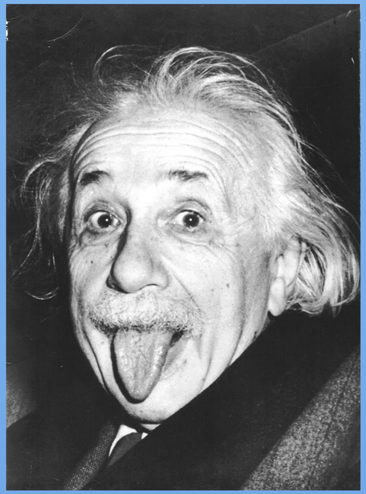


L'espace-temps et la gravitation : La relativité générale.

Bande annonce, aperçu « rapide » …

1A. Approche physique : L'universalité de la chute des corps

__Le principe d'équivalence :__ Tous les corps physiques « chutent » de la même manière dans un champ de gravitation donné, indépendamment de leur composition.



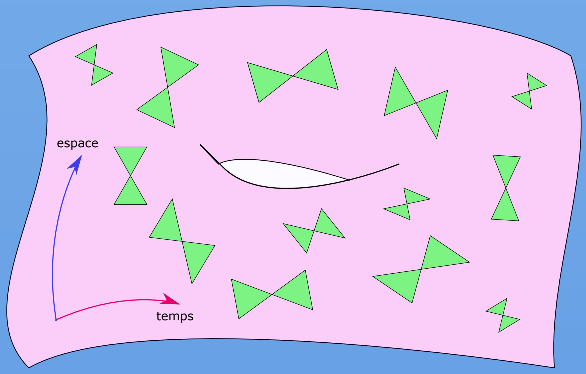
__Idée géniale :__ Le mouvement d'un corps soumis à la gravitation est dû à la forme géométrique de l'espace-temps dans lequel il vit. Quel est cet espace-temps géométrique ?

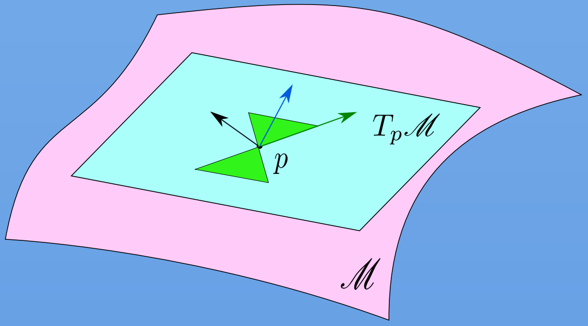
1B. Approche mathématique : *une géométrie générale !*

On cherche un espace géométrique qui *généralise* l'espace-temps affine de dimension 4 avec ses mesures de pseudo-distances. On veut garder :

- 4 coordonnées pour chaque point : un espace-temps.
- Des cônes de lumières en chaque point.
- Un moyen de mesurer des pseudo-distances ; (le temps propre).

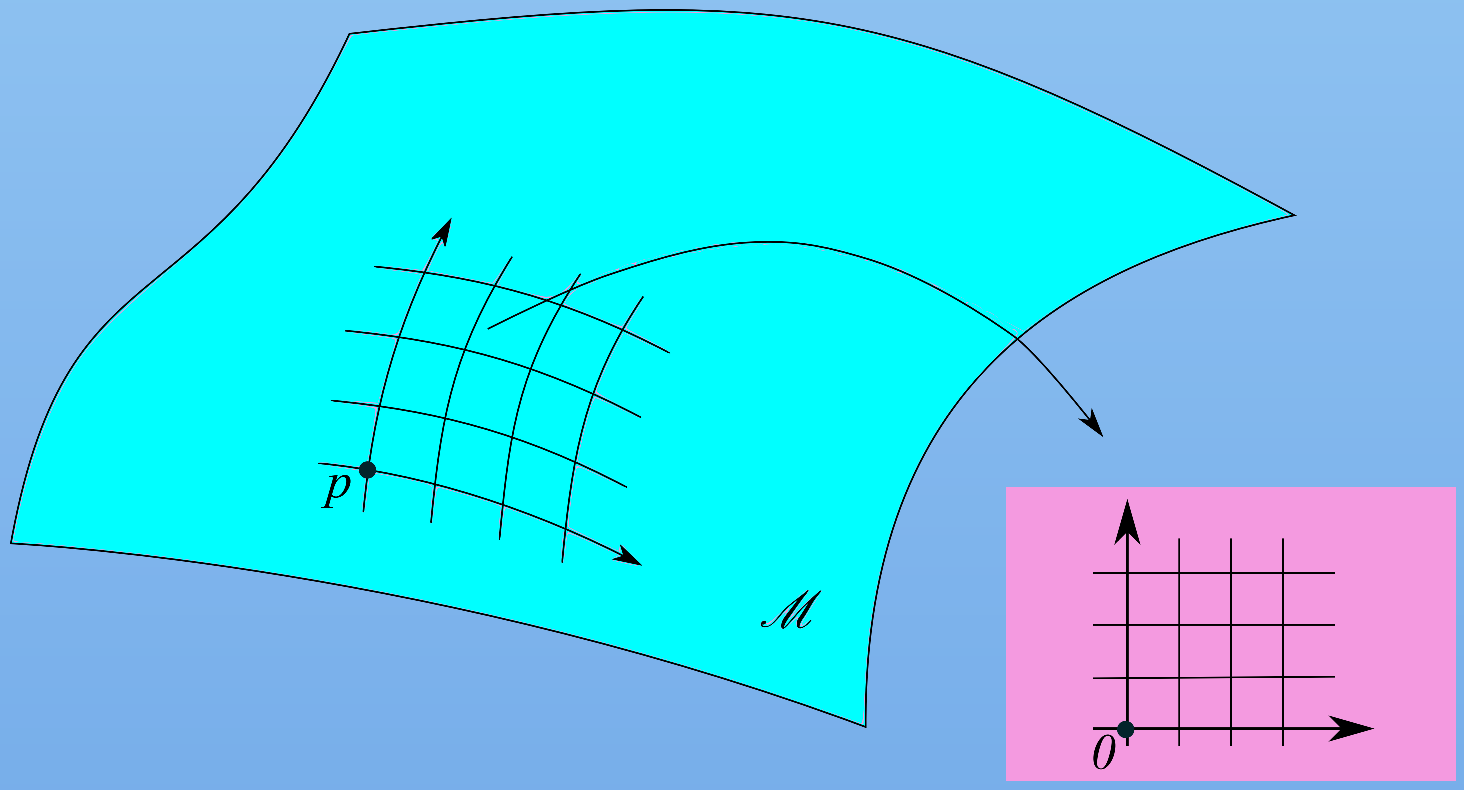
Cet espace géométrique existe !
Il a été inventé en 1860 par Bernhard Riemann !
Il s'appelle une ***__variété différentielle__***…



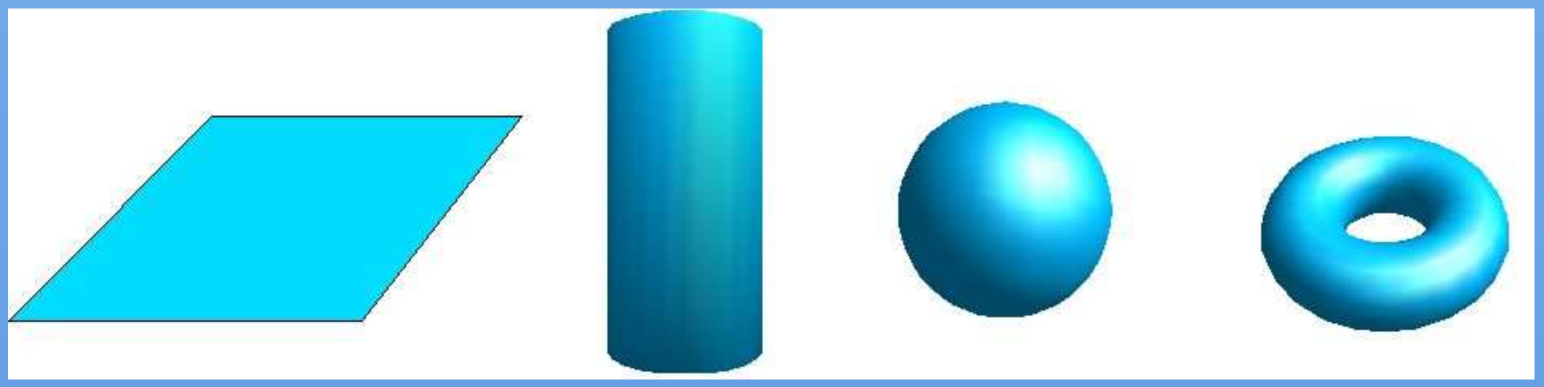


La seule notion qu'on abandonne, c'est la notion de droite : d'où un espace géométrique… courbe !

Les *variétés différentielles* : les espaces courbes.

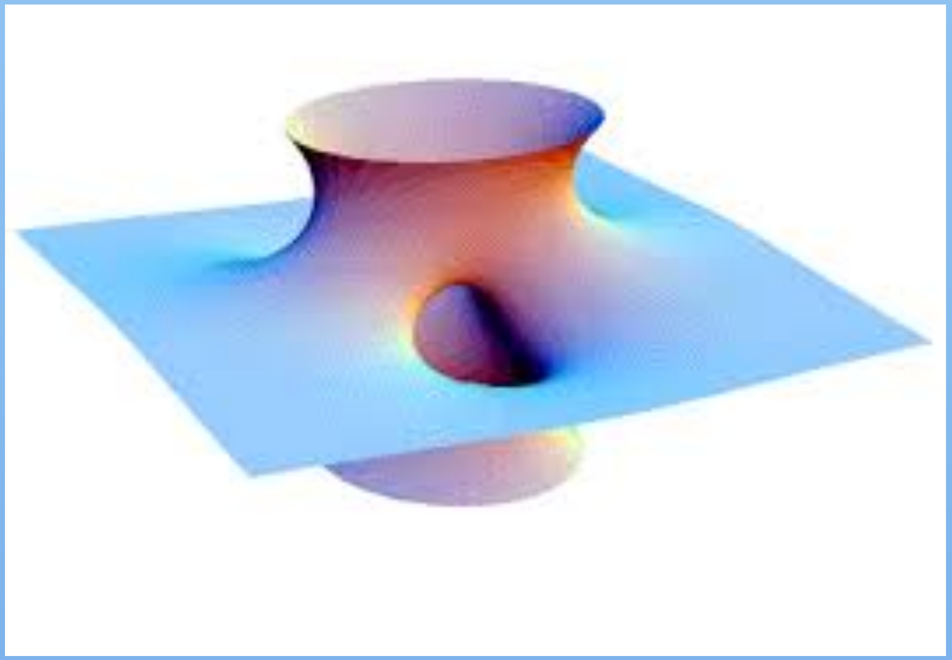


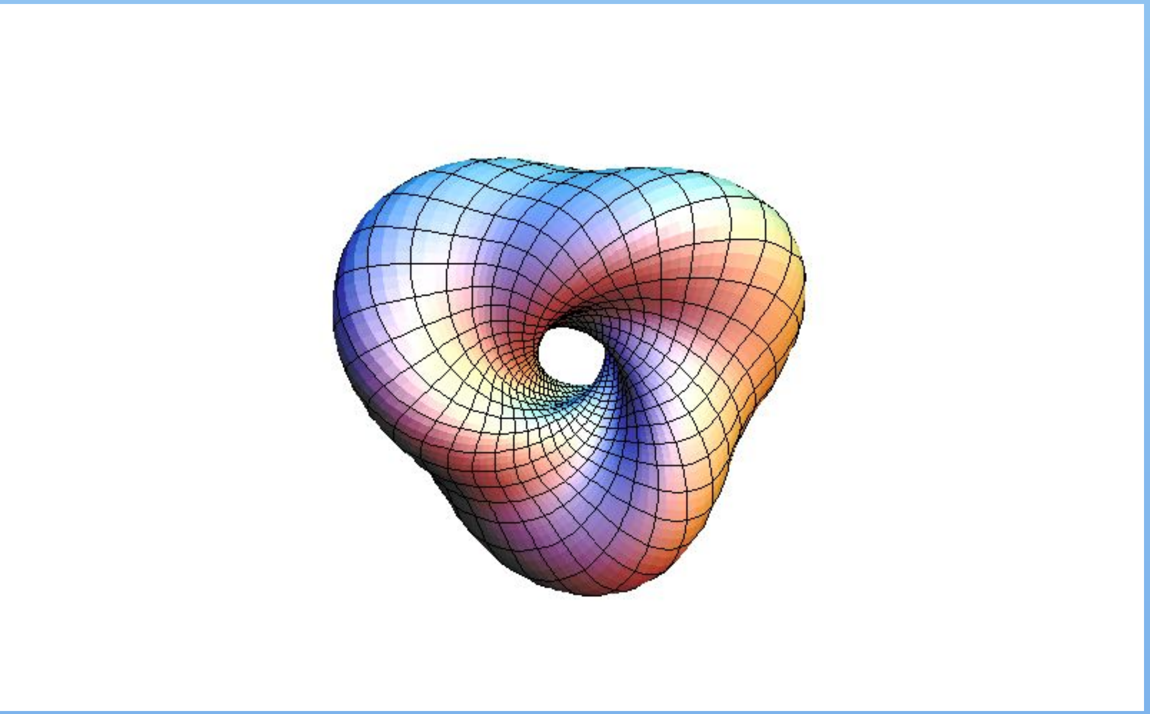
- Une variété est un ensemble de points qui possède une ***<u>carte</u>*** autour de chaque point.
- Une carte c'est une bijection bicontinue vers un morceau d'espace affine de dimension fixée.
- Grace aux cartes, une variété ressemble localement à un espace affine !
- On a donc une notion de coordonnées et de dimension.
- Il faut en général plusieurs cartes pour recouvrir une variété.
- Pas de droites, donc un espace courbe, qui généralise l'espace affine.

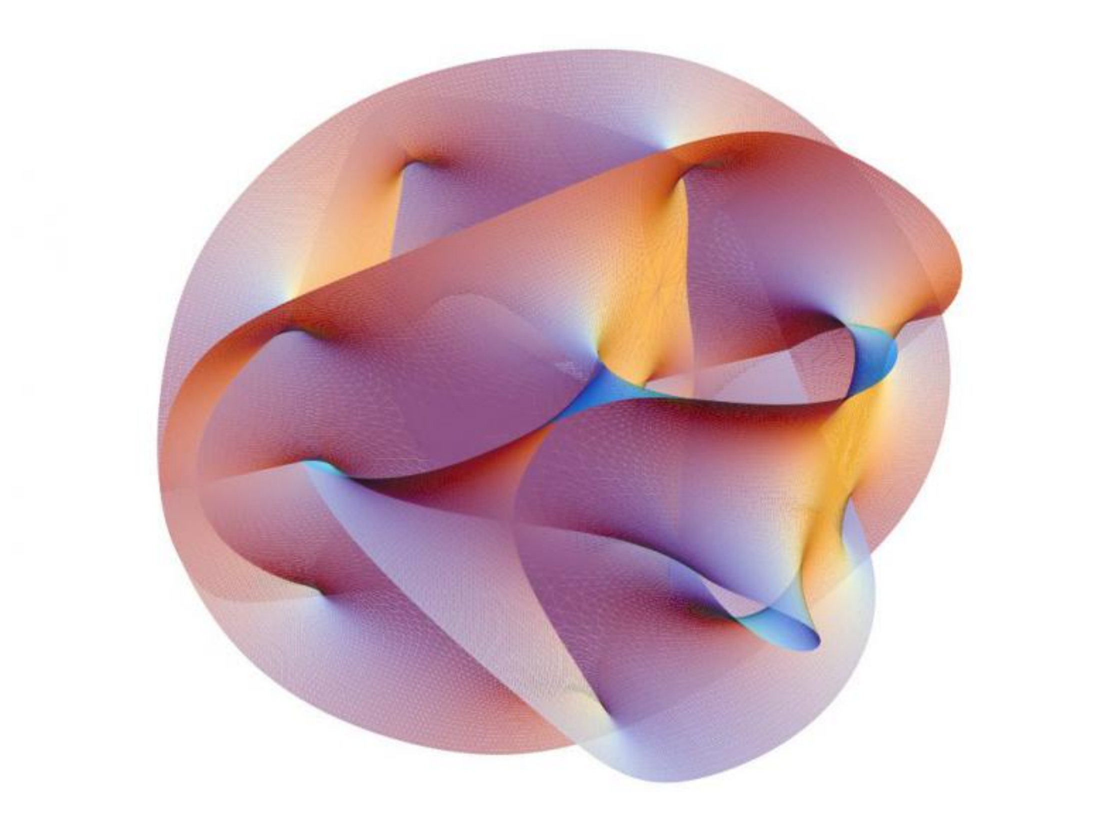


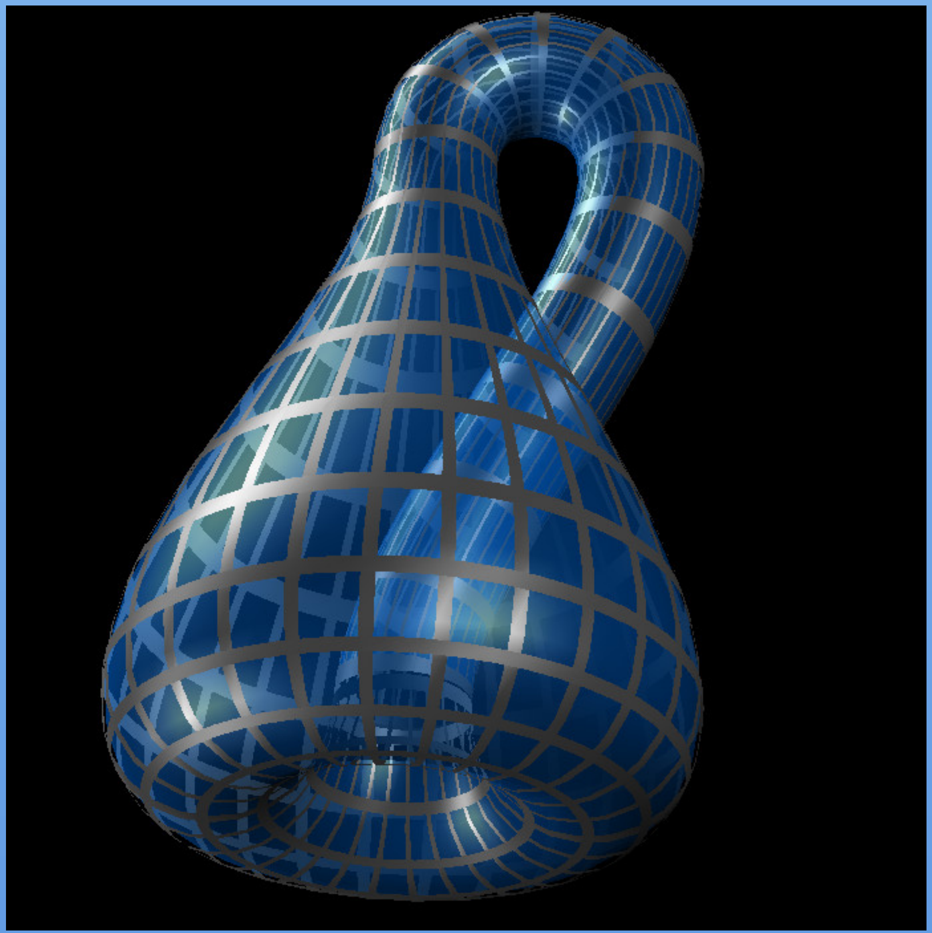
Exemples de variétés de dimension 2.
De gauche à droite : plan, cylindre, sphère et tore.
C'est la surface de ces formes qui est de dimension 2.
L'intérieur de la sphère, la boule considérée comme volume, est de dimension 3.

Quelques variétés…



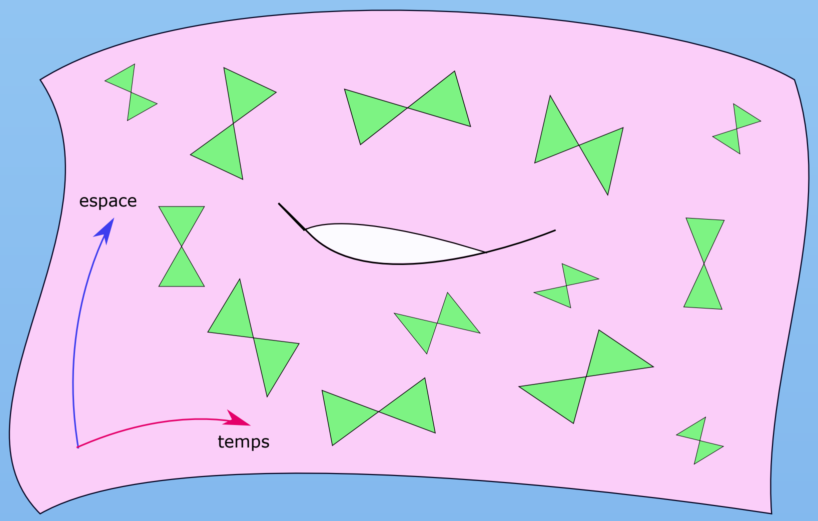




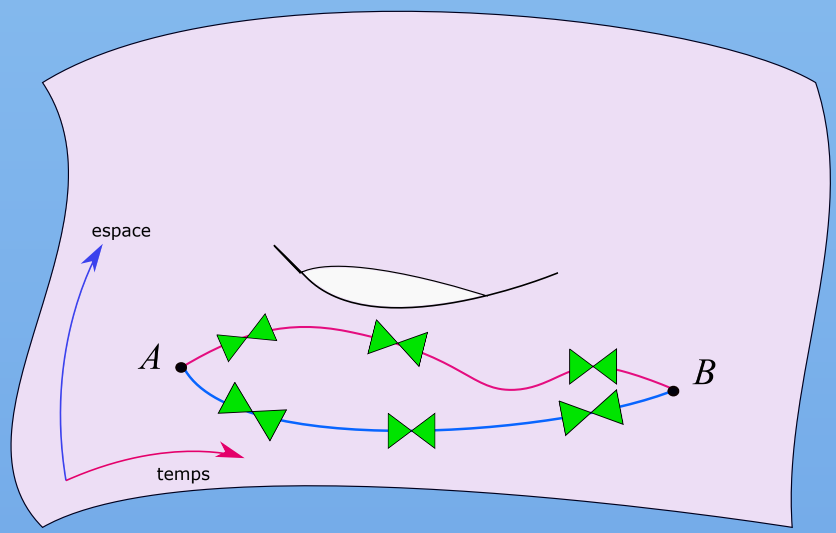


Maintenant, sur notre variété, il nous faut…

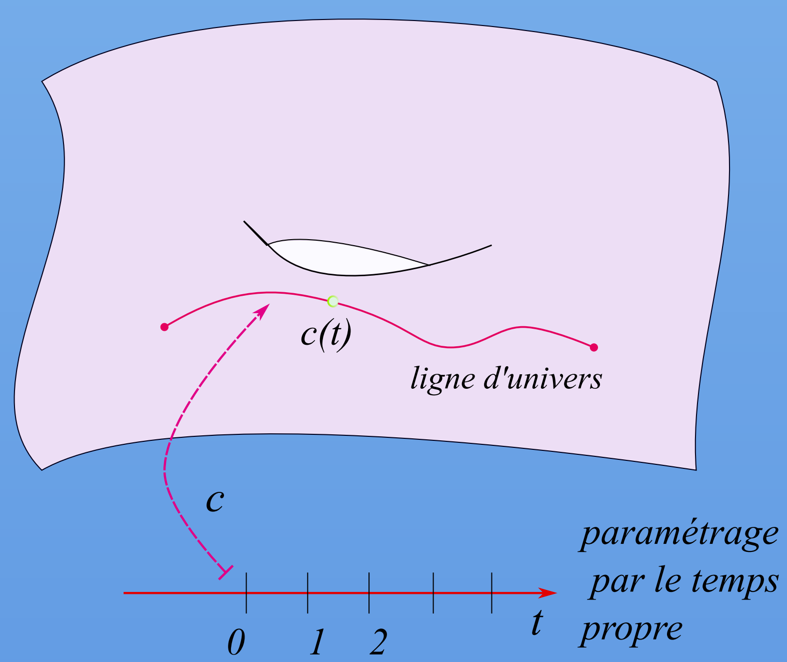
Des cônes de lumières…



Des lignes d'univers…



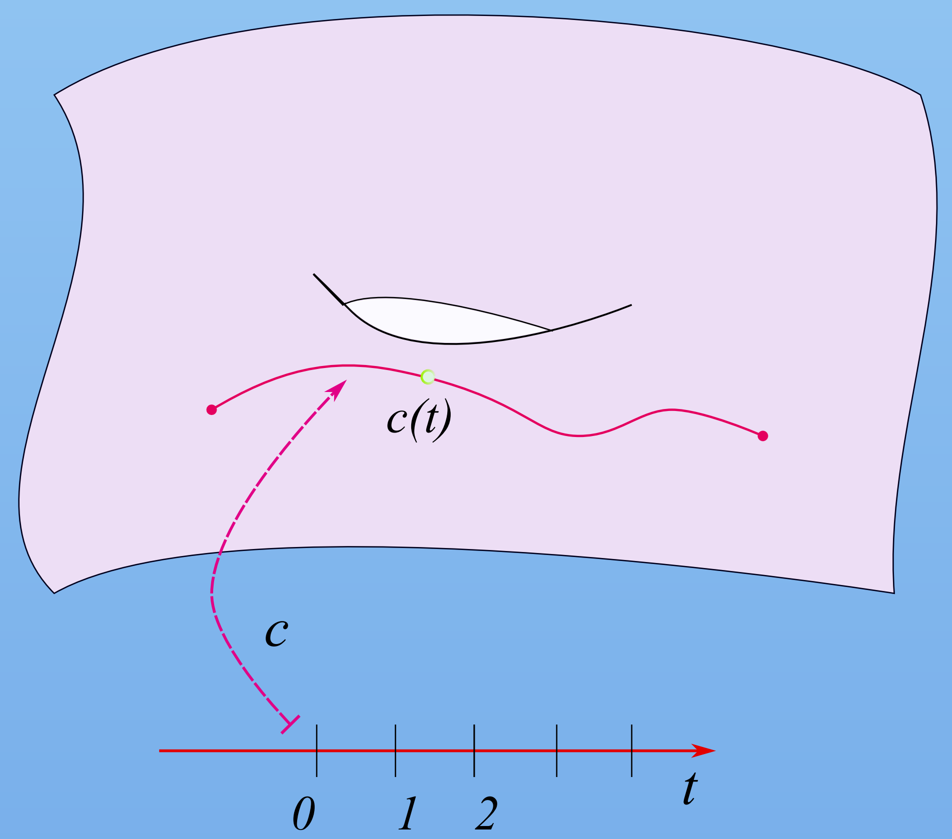
Une mesure du temps propre…



Des courbes et un espace de vecteurs en chaque point…

Pour explorer une variété, on y trace des courbes…

ce seront nos lignes d'univers…

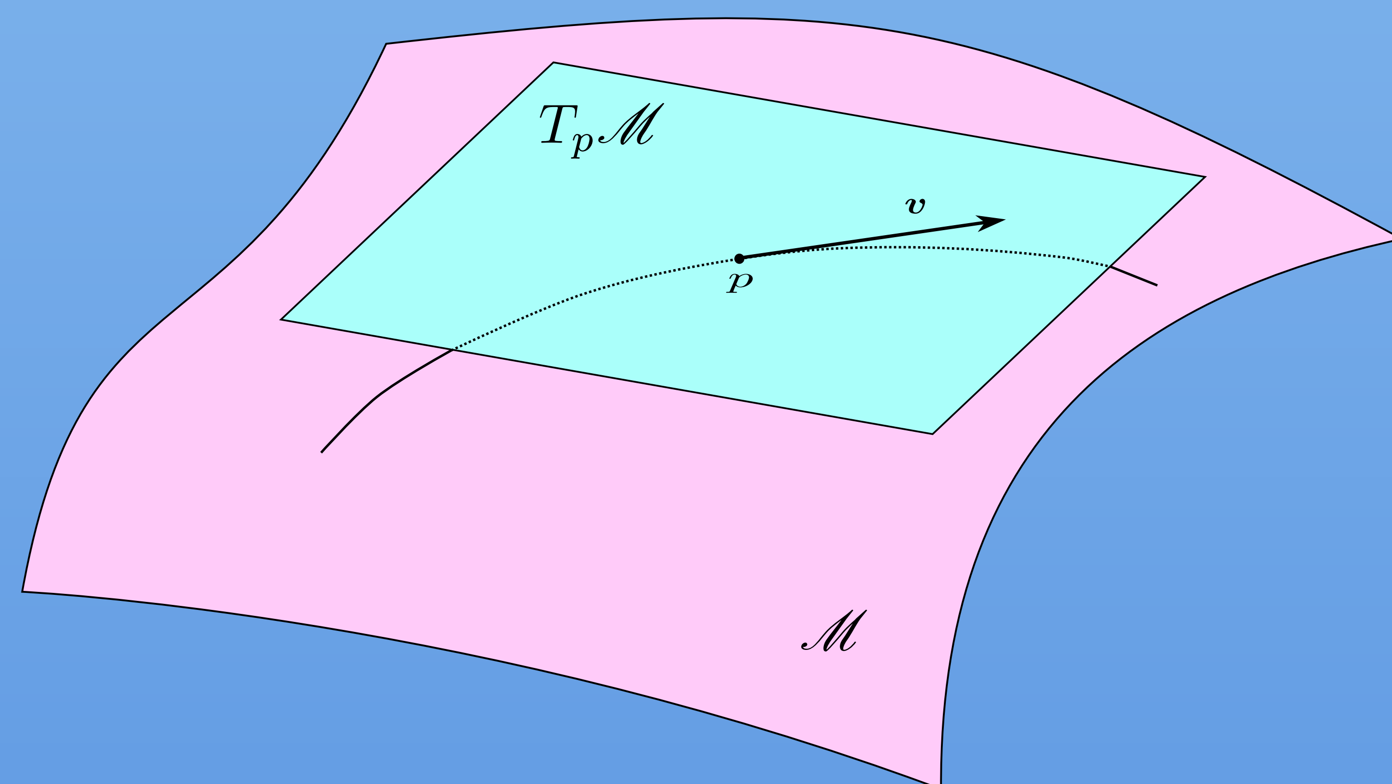


Une courbe repère les positions successives d'un point à l'aide d'un paramètre.

Une courbe, c'est une fonction continue d'un intervalle de R dans la variété.

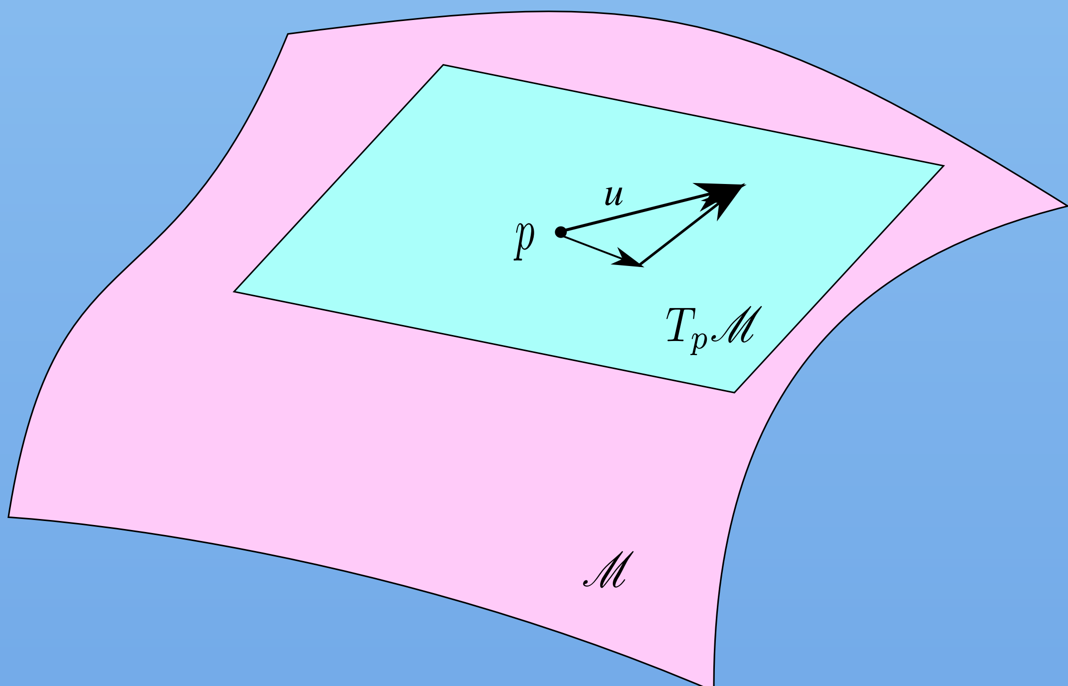
Les vecteurs tangents et l'espace tangent :

Avec les courbes et les cartes, on définit des vecteurs tangents aux courbes (leur « vecteurs vitesse »), et donc en chaque point *un espace tangent, un espace vectoriel.* (on regarde toutes les courbes passant par le point).
L'espace tangent est *de même dimension* que la variété.



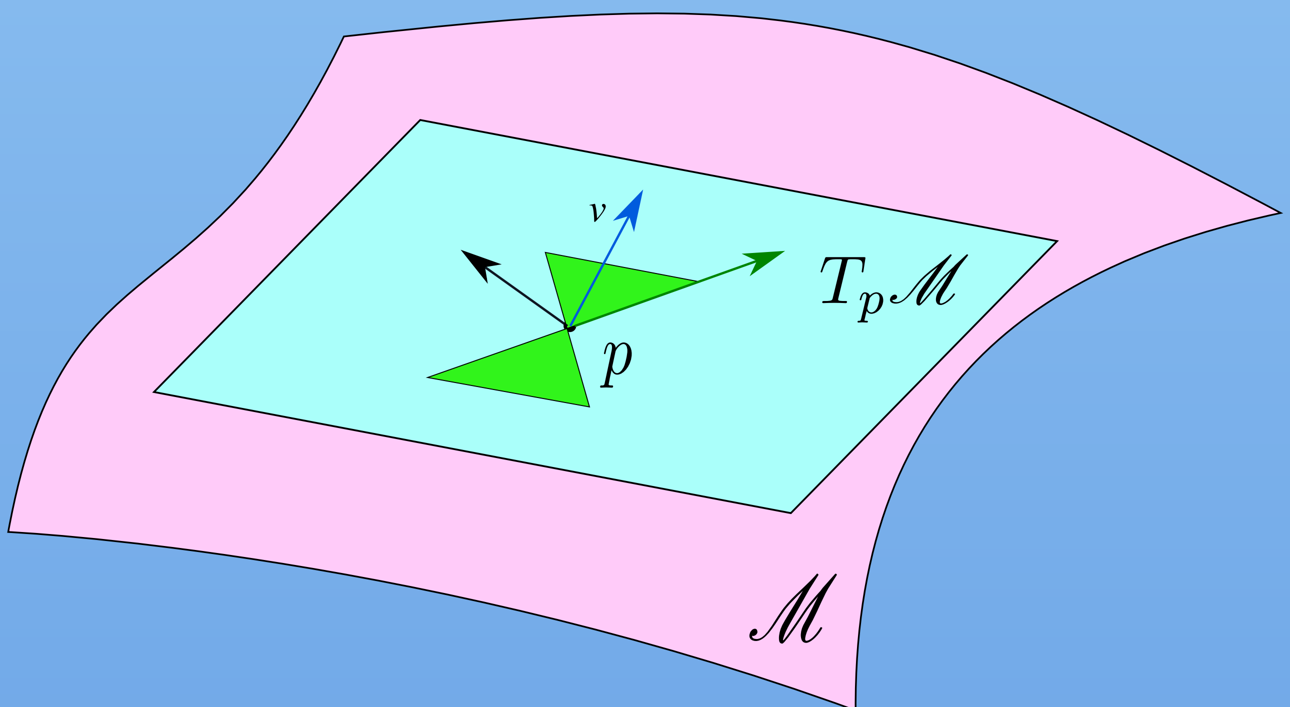
Sur chaque plan tangent, on peut…

Utiliser Pythagore…



$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

Ou utiliser Minkowski…



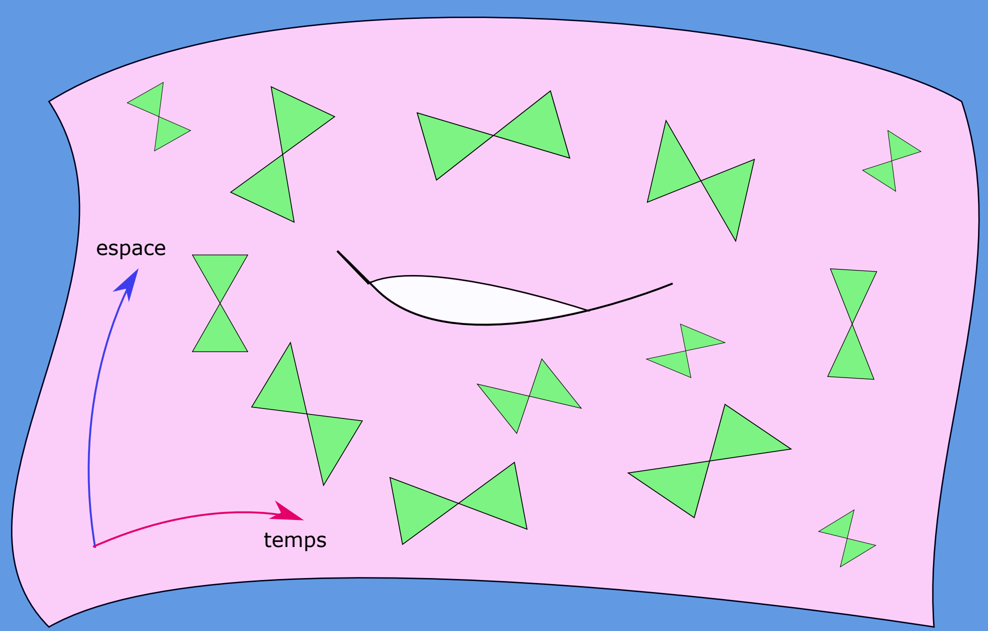
$$|v| = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|}$$

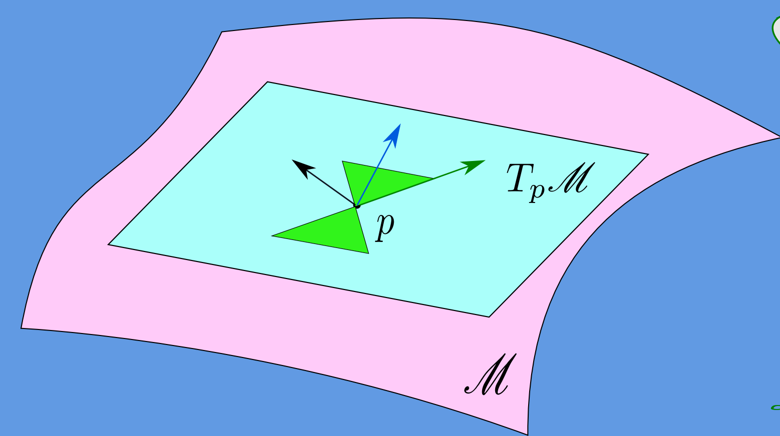
Si on utilise Minkowski sur chaque plan tangent, on obtient un cône de lumière en chaque point. Ça donne un *espace-temps courbe…*

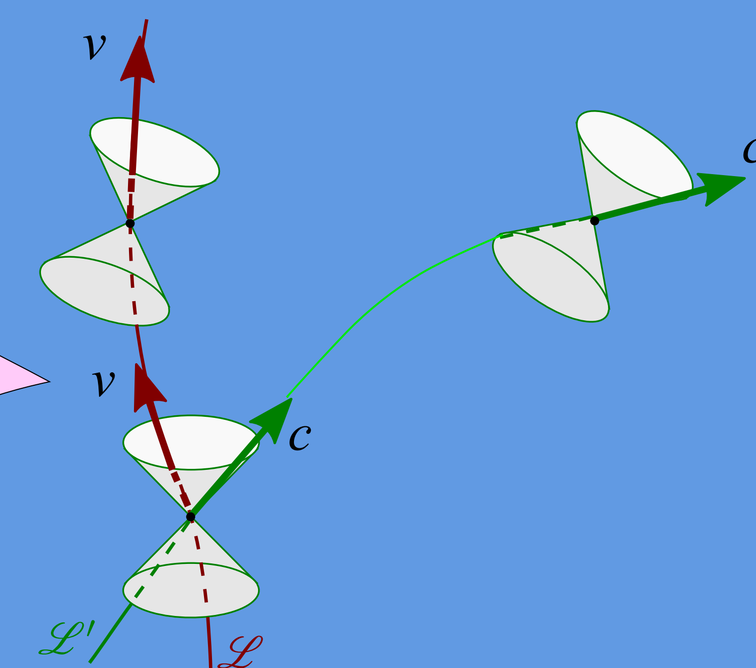
<u>L’espace-temps avec gravitation :</u>

- L’espace-temps avec gravitation est un espace géométrique de dimension 4 et de forme quelconque, ***<u>une variété</u>***, sur laquelle on trace, ***<u>en chaque point, un cône de lumière</u>***.

- Les ***<u>courbes de genre temps</u>*** sont les courbes qui passent en chaque point à l’intérieur des cônes de lumière; on postule que ce sont les lignes d’univers des objets physiques.







Un espace courbe, avec un cône de lumière en chaque point. Les espaces tangents sont indépendants les uns des autres, et la variété étant courbe, les cônes ne sont plus tous "alignés".

En chaque point, un cône. Donc en chaque point des vecteurs de genre temps, lumière ou espace…
« Localement », via l’espace tangent, l’espace-temps « courbe » ressemble à celui de la relativité restreinte…

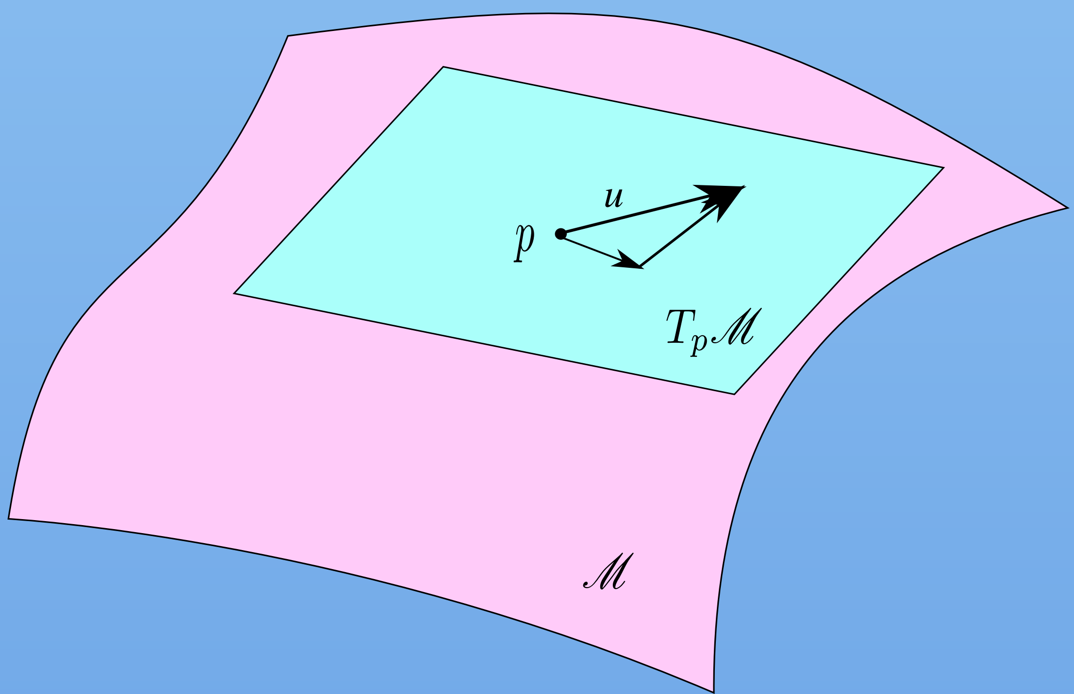
Une courbe de genre temps (en rouge) reste toujours à l’intérieur de ses cônes de lumière (précisément, ses vecteurs vitesse sont tous de genre temps). Une courbe de genre lumière (en vert) est, intuitivement, sur les bords de ses cônes.

<u>Attention !</u> Ici, on a fait un dessin d’espace-temps à 2 dimensions ! Une de temps et une d’espace. Il manque donc 2 dimensions spatiales !!

Mais on ne sait pas encore y faire grand chose…

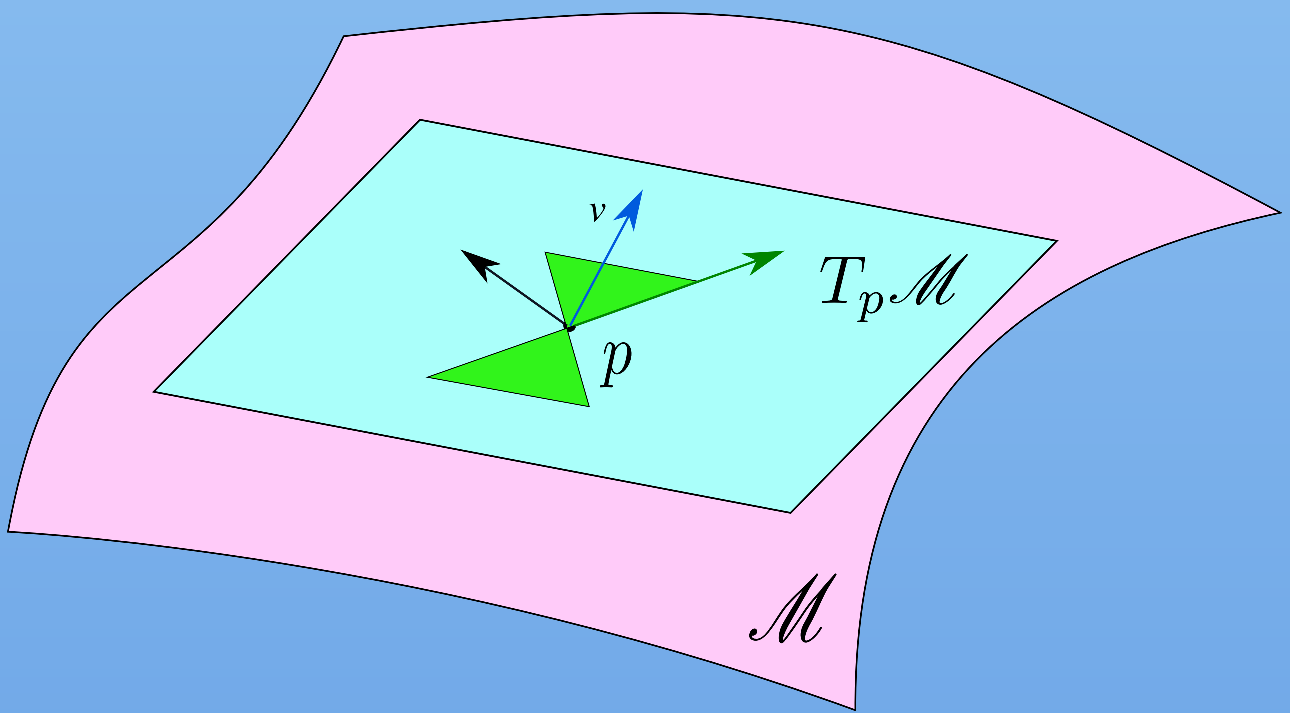
Allons plus loin : Sur chaque plan tangent, on peut…

Utiliser Pythagore…



$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

Ou utiliser Minkowski…

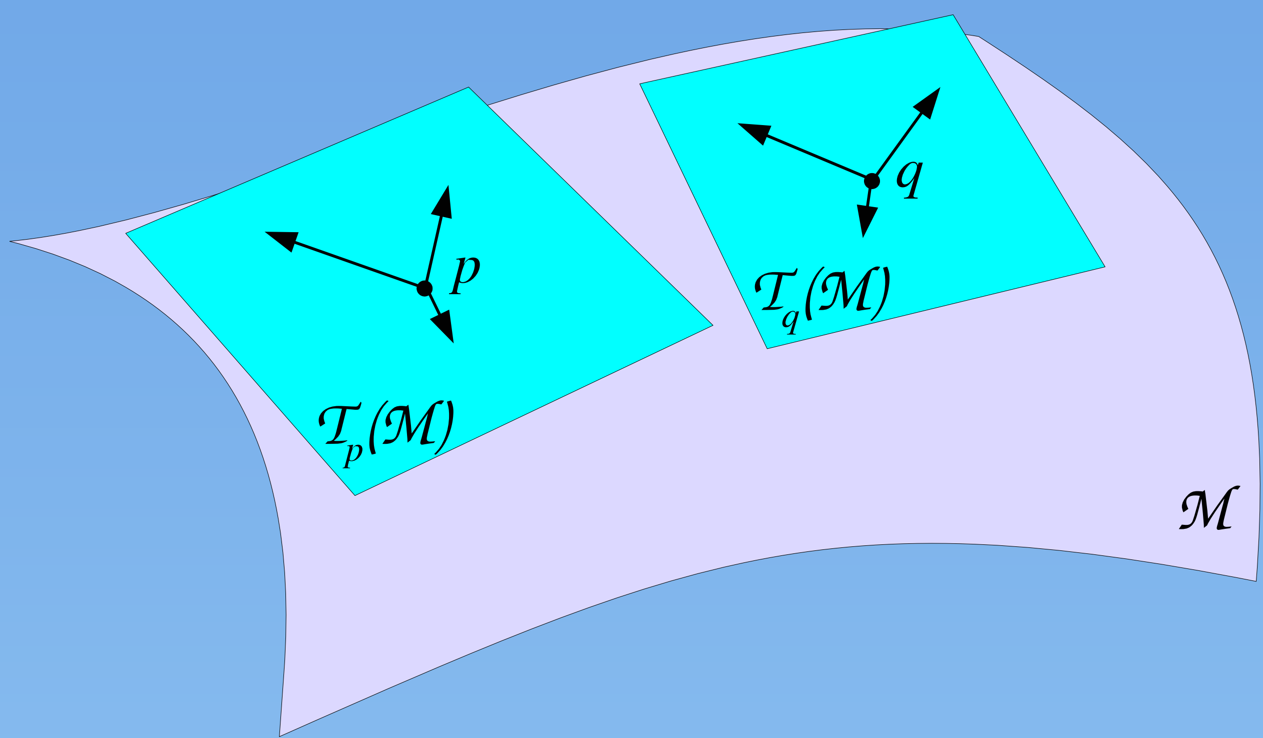


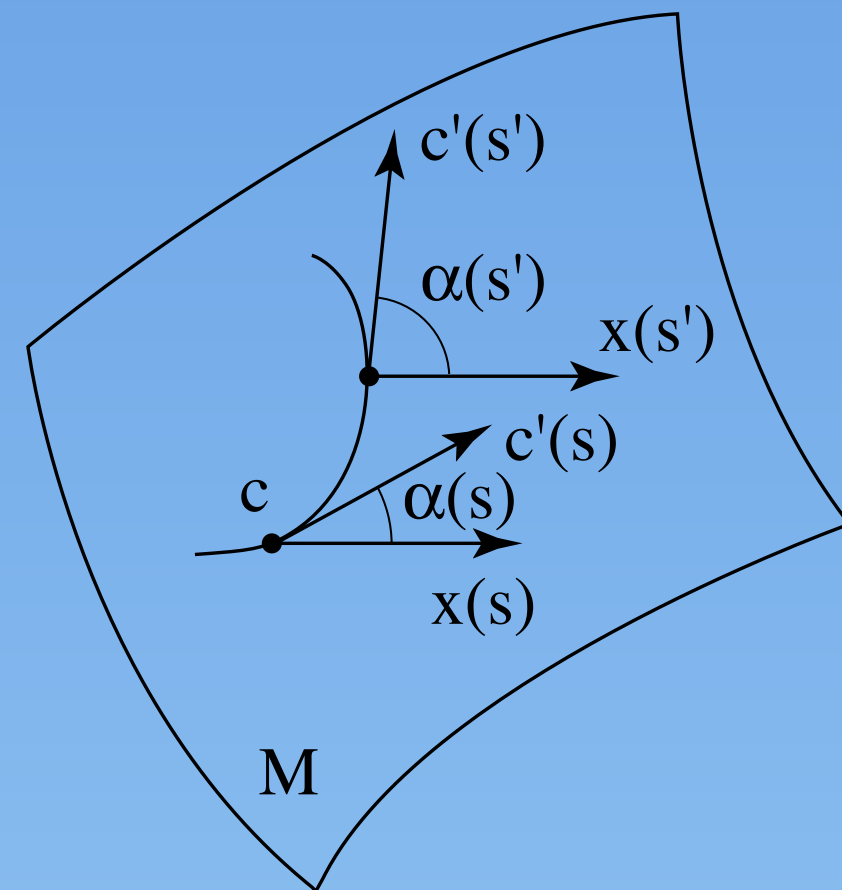
$$|v| = \sqrt{|x^2 + y^2 + z^2 - t^2|}$$

Si on fait un même choix (de manière « régulière ») sur chaque espace tangent, on obtient ***<u>une métrique.</u>***
On peut donc mesurer les vecteurs tangents en chaque point…

La *métrique*, *c'est l'outil magique de Riemann.*

Grace à une métrique, puisqu'on peut mesurer les vecteurs tangents en chaque point, on peut calculer la *(pseudo-) longueur* d'une courbe, mais aussi son *accélération*…





$$L(c) = \int_0^b |\dot{c}(t)|\, dt$$

La (pseudo-) longueur d'une courbe, c'est l'intégrale de la (pseudo-) longueur de ses vecteurs vitesses…

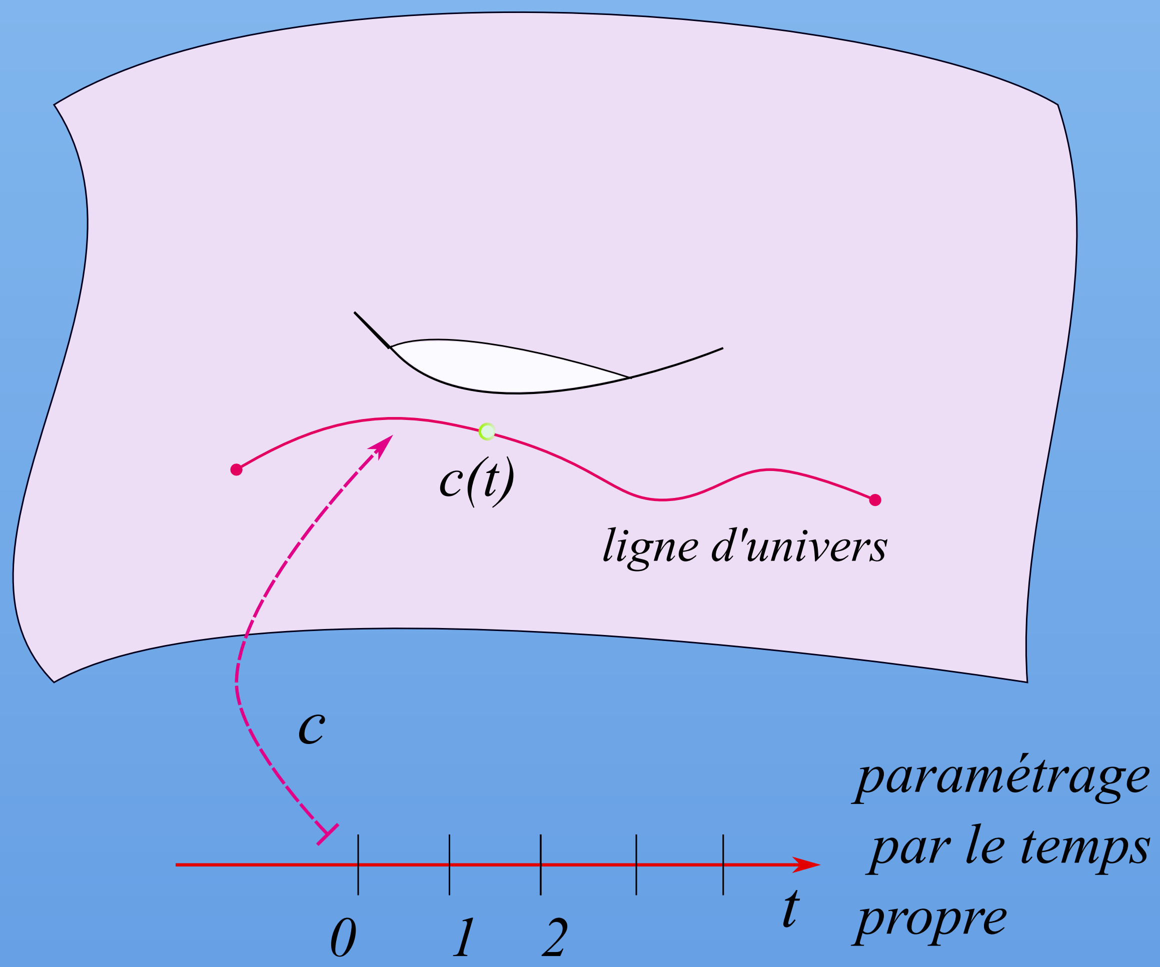
$$\ddot{c}(t) = \nabla_{\dot{c}}\dot{c}(t)$$

L'accélération d'une courbe c'est le taux de variation de son vecteur vitesse…

Avec la longueur : *Temps propre dans l'espace-temps courbe…*

La pseudo-longueur d'une courbe sur une variété Lorentzienne, (i.e où on a utilisé Minkowski sur les plans tangents), c'est ***l'intégrale*** de la pseudo-longueur de ses vecteurs vitesse entre ses extrémités.

Pour une courbe de genre temps, on l'appelle le ***temps propre*.**



$$L(c) = \int_0^b |\dot{c}(t)|\,dt$$

Avec L'accélération : *Les géodésiques de l'espace-temps.*

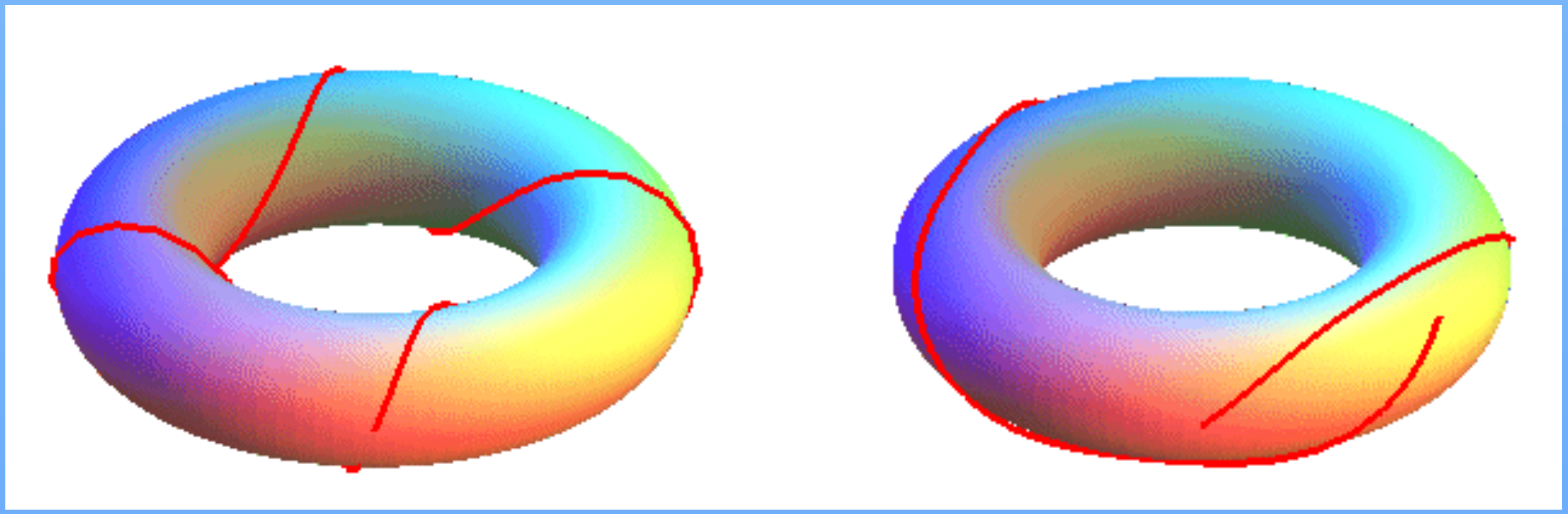
L'accélération d'une courbe, c'est le taux de variation de son vecteur vitesse d'un point à un autre.

Une géodésique est une courbe d'accélération nulle.

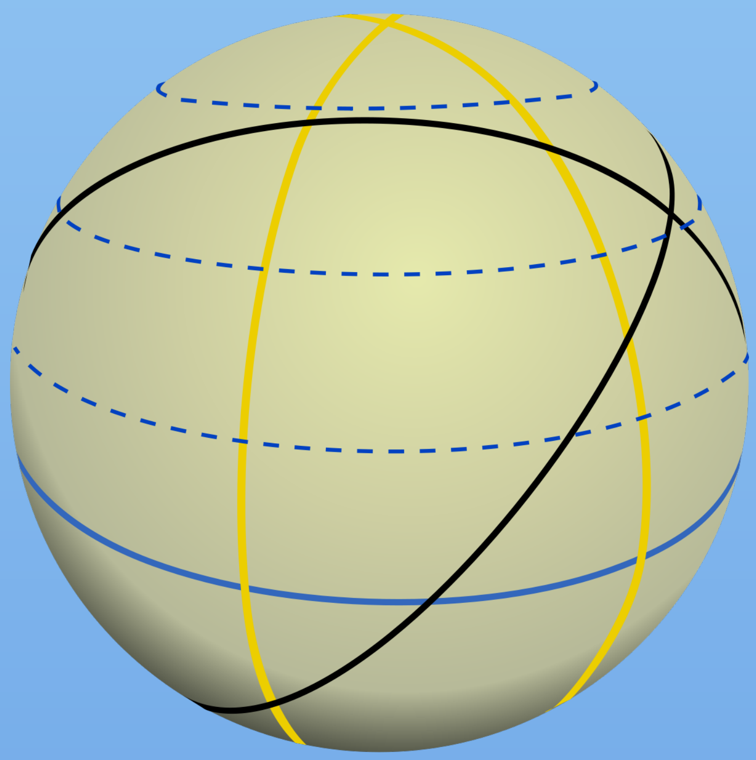
Une géodésique se contente de suivre les creux et les bosses de la variété, comme une bille qui roule sans frottement ni glissement. Ce sont les courbes naturelles de la variété, dont le cheminement n'est dicté que par la forme de la variété…

En effet, <u>l'accélération doit se mesurer au sein de la variété où la courbe vit,</u> sans faire référence à un quelconque espace extérieur englobant la variété.

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c}(t) \equiv 0$$



Si on utilise Pythagore sur les espaces tangent, une géodésique, courbe d'accélération nulle, est (sous des hypothèses raisonnables), le plus court chemin sur une variété.



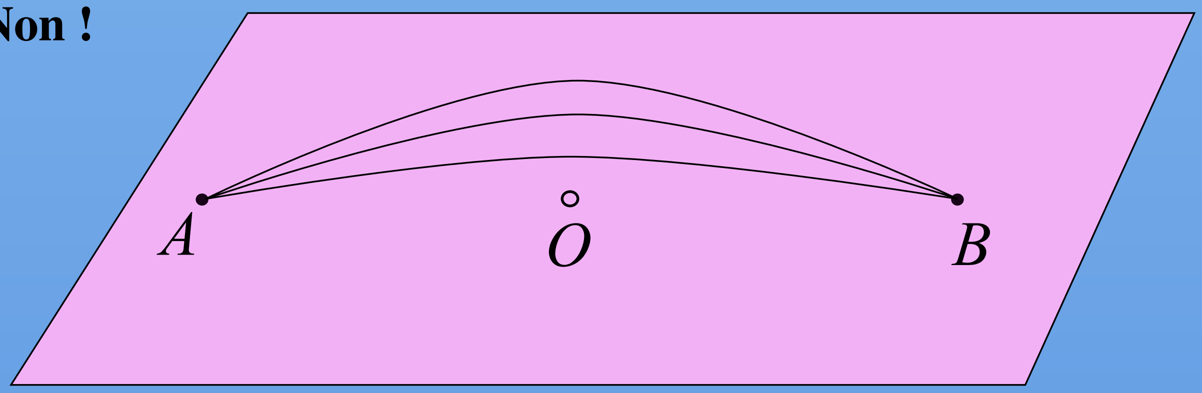
L'équation des géodésiques.

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0$$

Mais il y a des pièges…

Existe-t-il toujours un plus court chemin entre deux points ?

Non !



S'il y a un trou dans la variété, (ici on a retiré le point O), il peut ne pas y avoir de plus court chemin…

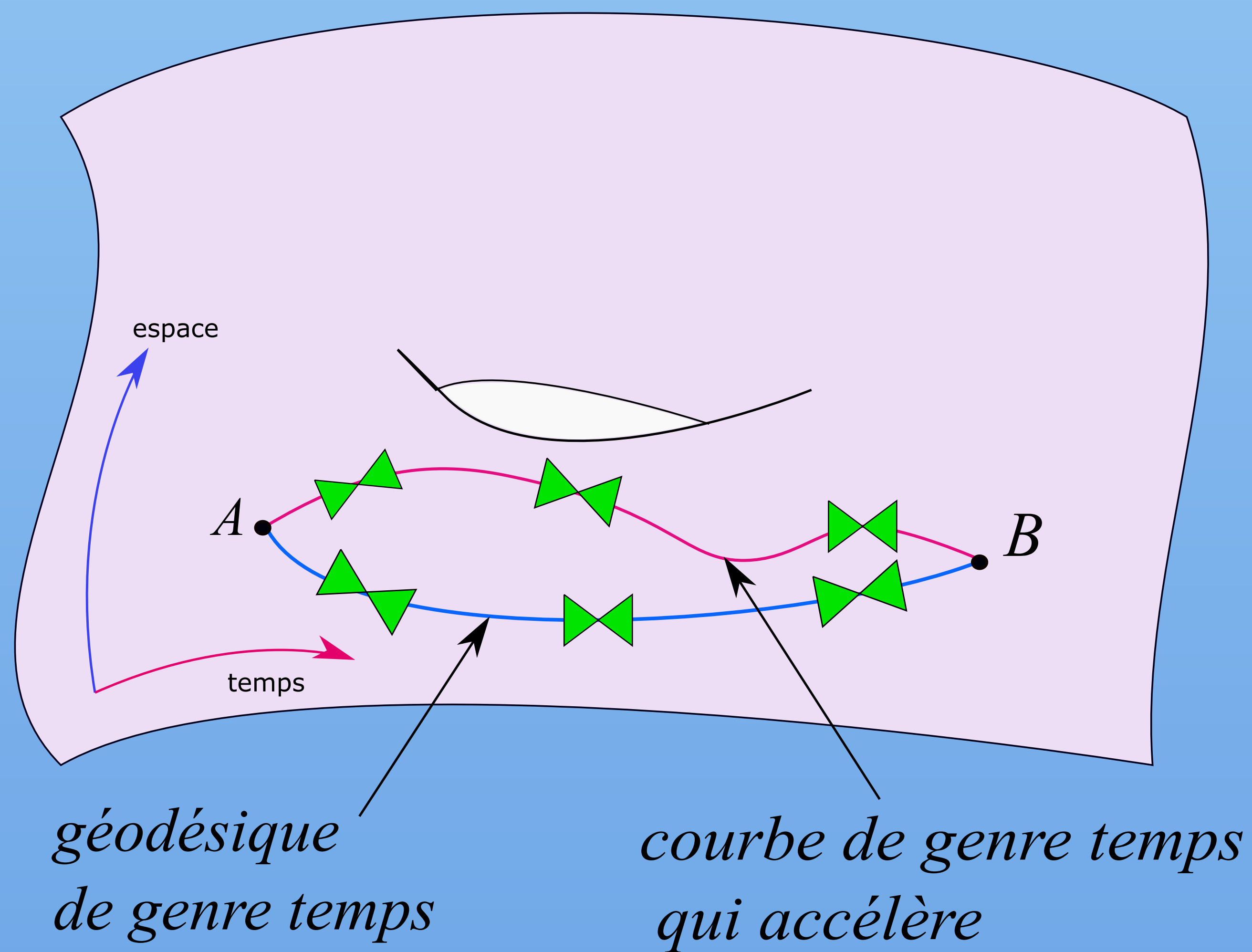
Existe-t-il un seul plus court chemin entre deux points ?

Non !

Sur une variété, il peut y avoir plusieurs géodésiques, voire une infinité, entre deux points ; le plus court chemin entre deux points n'est pas forcément unique ! Sur la terre par exemple, tous les méridiens allant du pôle nord au pôle sud sont des géodésiques.

Mais avec la pseudo-distance de Minkowski :

On obtient une nouvelle géométrie !



Une géodésique de genre temps est *le plus (pseudo-) long chemin* entre deux événements de la variété espace-temps.

C'est le paradoxe des jumeaux dans l'espace-temps courbe.

La relativité générale

Des postulats très simples et élégants :

-1 L'espace-temps est une variété différentielle de dimension 4 munie d'une métrique Lorentzienne.

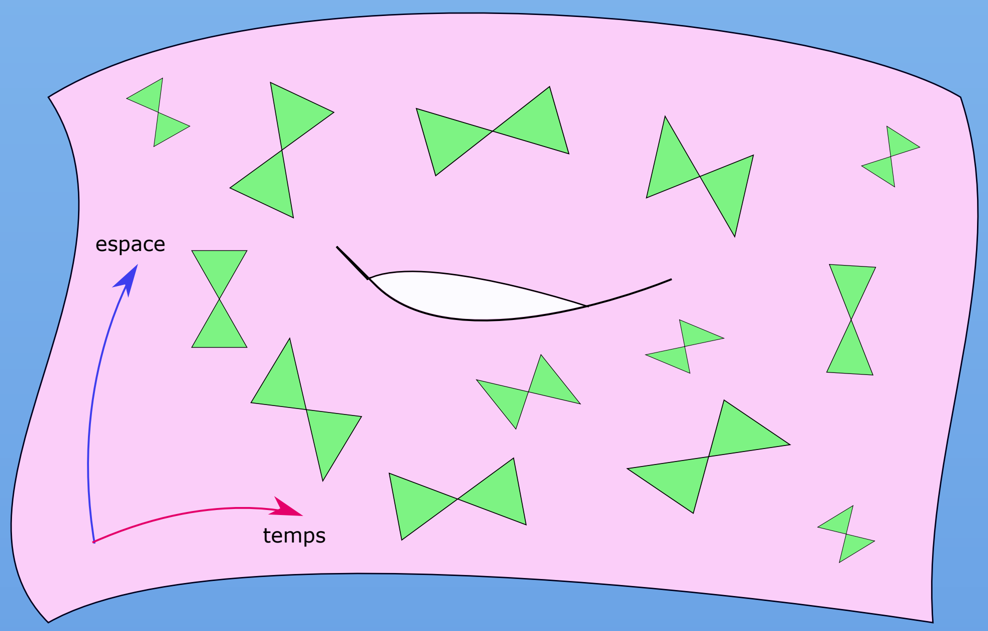
*-2 Les corps libres, **i.e. soumis uniquement à la gravitation**, suivent les géodésiques de genre temps de l'espace-temps.*

-3 La lumière suit les géodésiques de genre lumière.

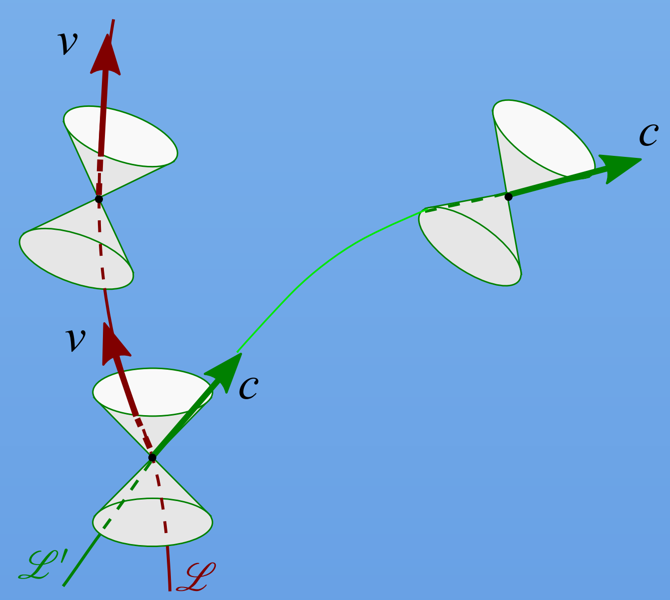
La gravitation n'est plus une force, comme chez Newton.

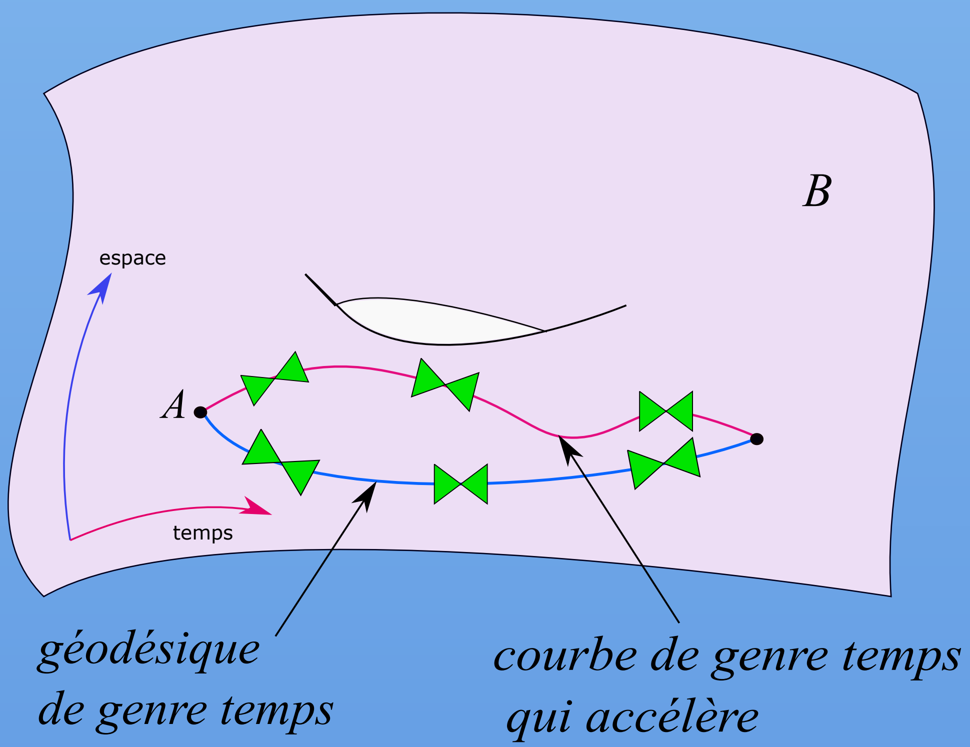
Pour Einstein, **la gravitation c'est la forme de l'espace-temps.**

C'est pourquoi un objet qui n'est soumis qu'à la gravitation est libre, et suit donc une géodésique...



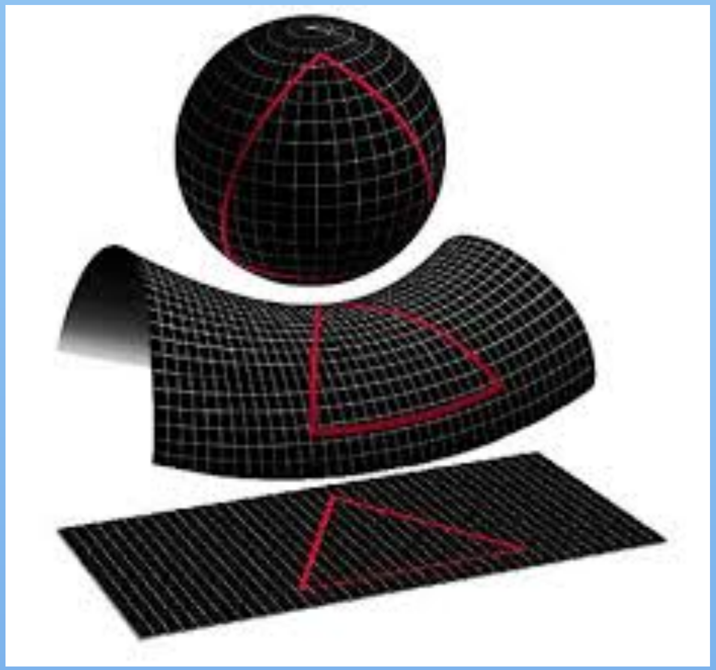
Ici, on a fait un dessin d'espace-temps à 2 dimensions ! Une de temps et une d'espace. Il manque donc 2 dimensions spatiales !!





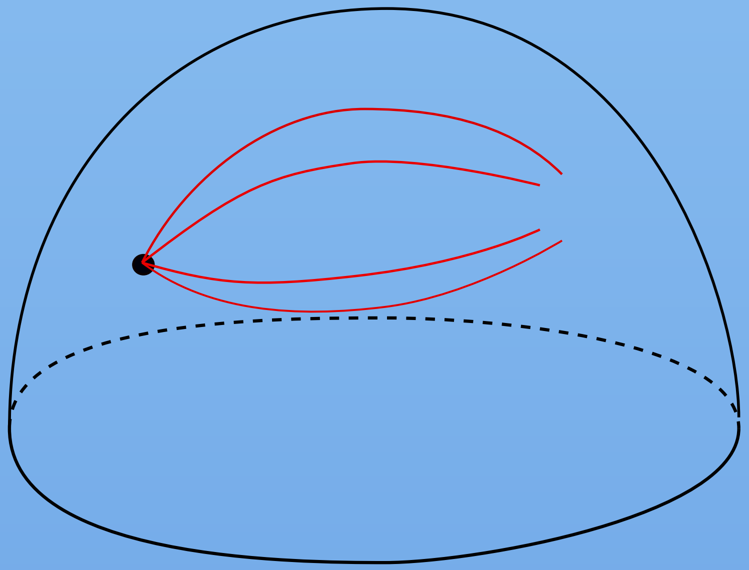
Il manque un dernier ingrédient géométrique fondamental…

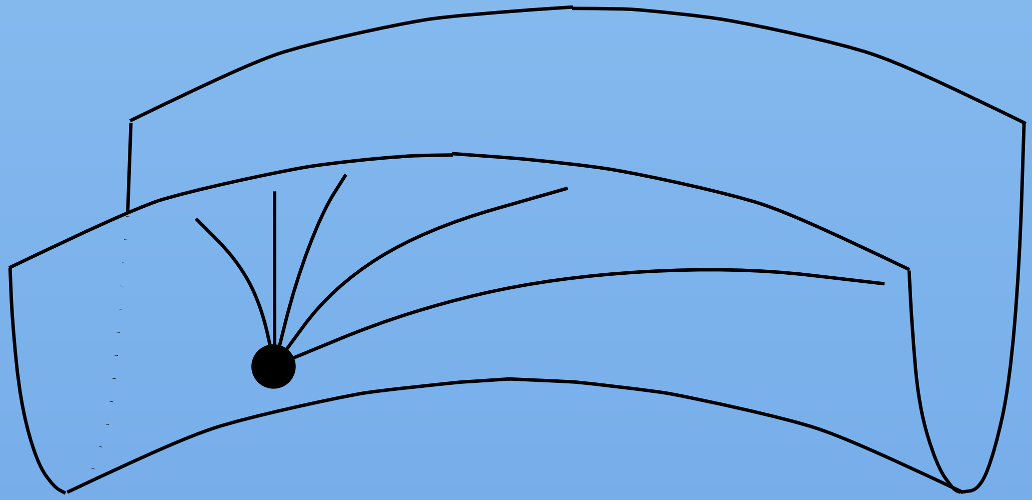
La courbure de l’espace-temps…



La courbure, c’est difficile à définir en dimension supérieure à 3.
En dimension 2, ça va encore : c’est la somme des angles d’un triangle tracé avec des géodésiques…

La __courbure__, c’est la mesure du taux de dispersion ou de rapprochement des géodésiques issues d’un même point.





A gauche, une courbure dite positive force les géodésiques à converger.
A droite, une courbure dite négative force les géodésiques à se disperser

Puisque les géodésiques de genre temps sont les lignes d’univers des particules soumises à la gravitation, on voit que *__le mouvement relatif des particules soumises à la gravitation est dicté par la courbure__*.
Les photons suivant également des géodésiques, leur trajectoire est elle aussi dictée par la courbure…

On a toute la géométrie de la relativité,
on peut faire un peu de physique…

Le seul postulat physique : L'équation d'Einstein.

C'est l'équation qui relie la forme de l'espace-temps à la masse et à l'énergie qu'il contient

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}S \, . \, g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

Géométrie : courbure

Physique : énergie

L'idée fondamentale : C'est la matière et l'énergie qu'il contient qui donnent sa forme, sa géométrie, à l'espace-temps.

L'espace-temps dit à la matière comment se déplacer.
La matière dit à l'espace-temps comment se courber.
(John A Wheeler)

Mais un mathématicien peut se passer de la partie physique…

En résumé : La relativité Générale, c'est…

…

— **trois postulats géométriques globaux :**

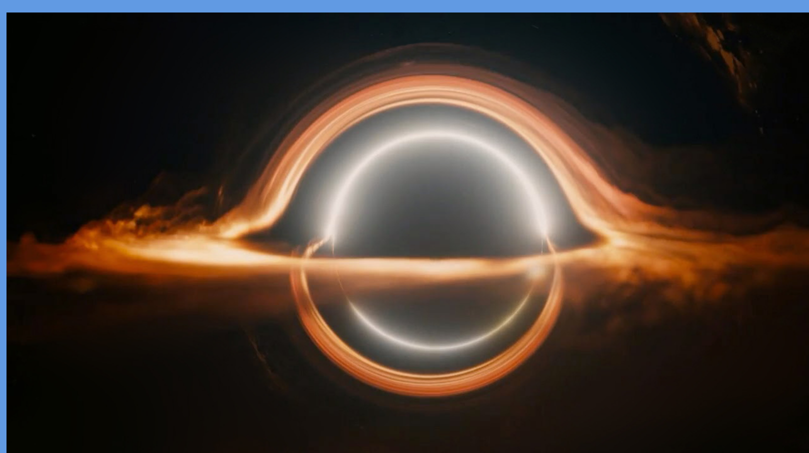
- L'espace-temps est une variété de dimension 4 munie d'une métrique Lorentzienne.
- Les particules massives libres suivent les géodésiques de genre temps,
- Les photons suivent les géodésiques de genre lumière
- — **un postulat physique local :**
- L'équation d'Einstein $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, qui relie localement la courbure au flux de matière-énergie.

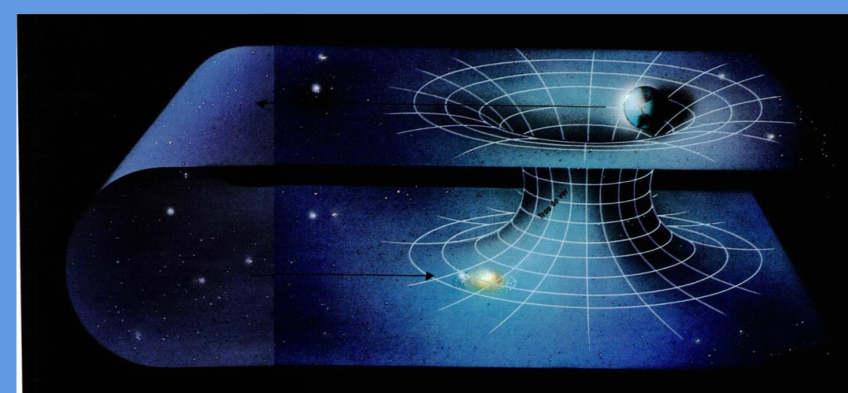
- Une simplicité formelle d'une élégance sans équivalent…
- On peut se passer du postulat physique pour découvrir des objets et des problèmes géométriques fascinants, qui mènent à des objets physiques extraordinaires…

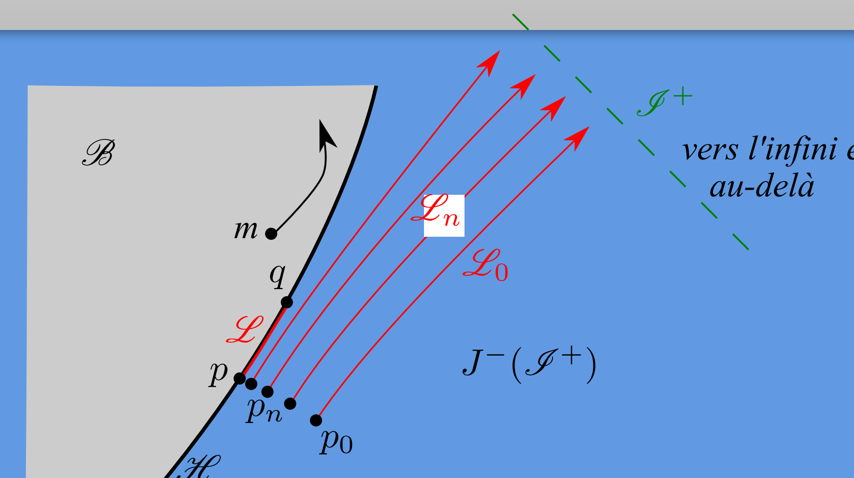
9. Une Théorie Géométrique !!

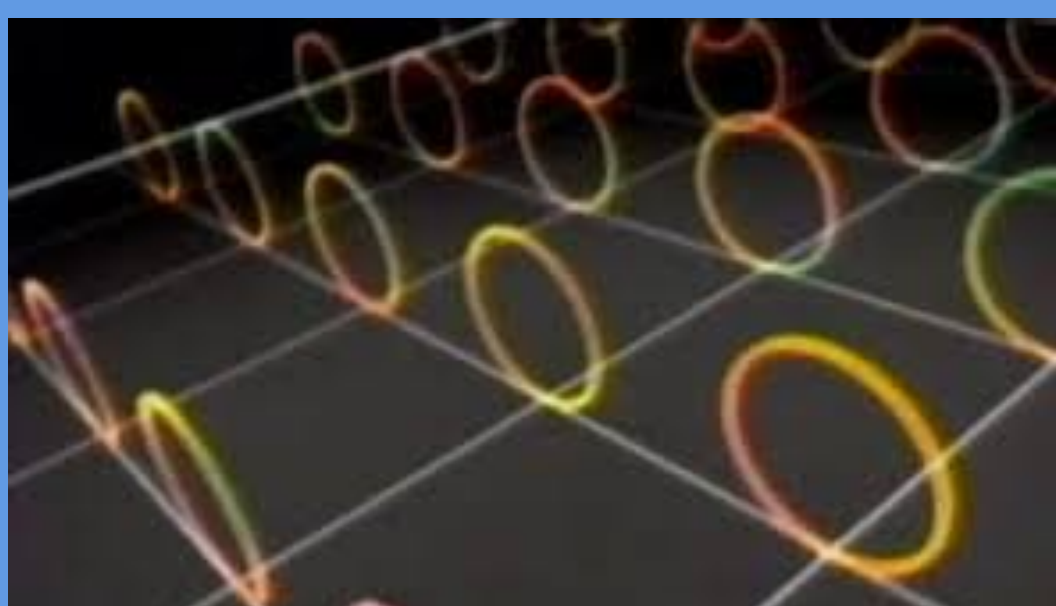
Des objets et problèmes faisant intervenir uniquement les postulats géométriques de la théorie ($G_{\mu\nu} = 0$).

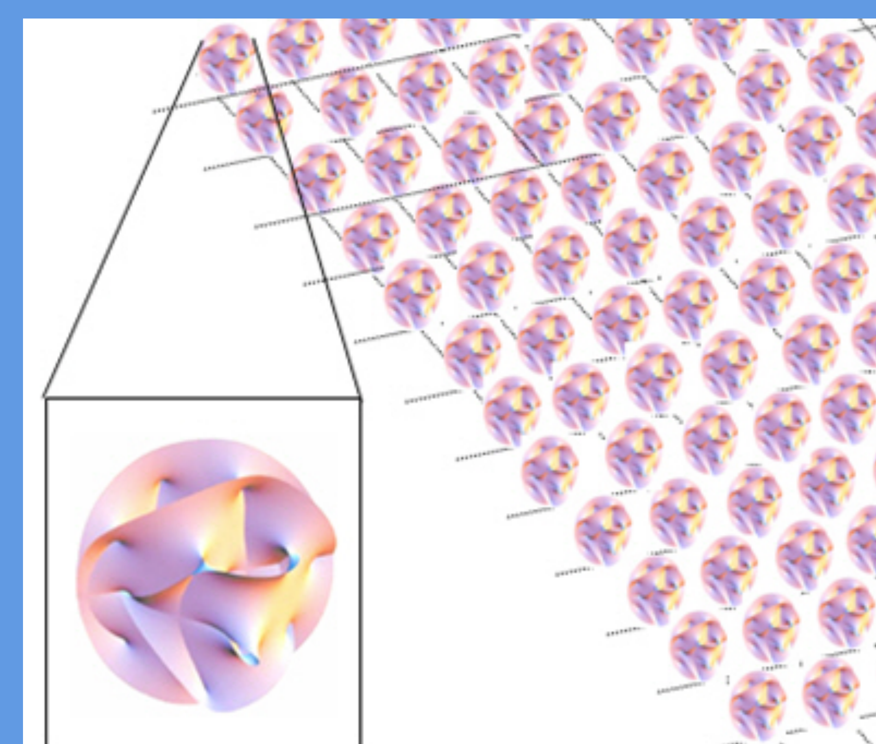
Des objets physiques extraordinaires, purement géométriques,
De formidables problèmes de géométrie,
Un tremplin vers des géométries subtiles, de dimension 5, 8, 10, 11…
La relativité générale est bien une théorie de mathématiciens !











Des objets physiques extraordinaires, purement géométriques…

Les Trous Noirs :

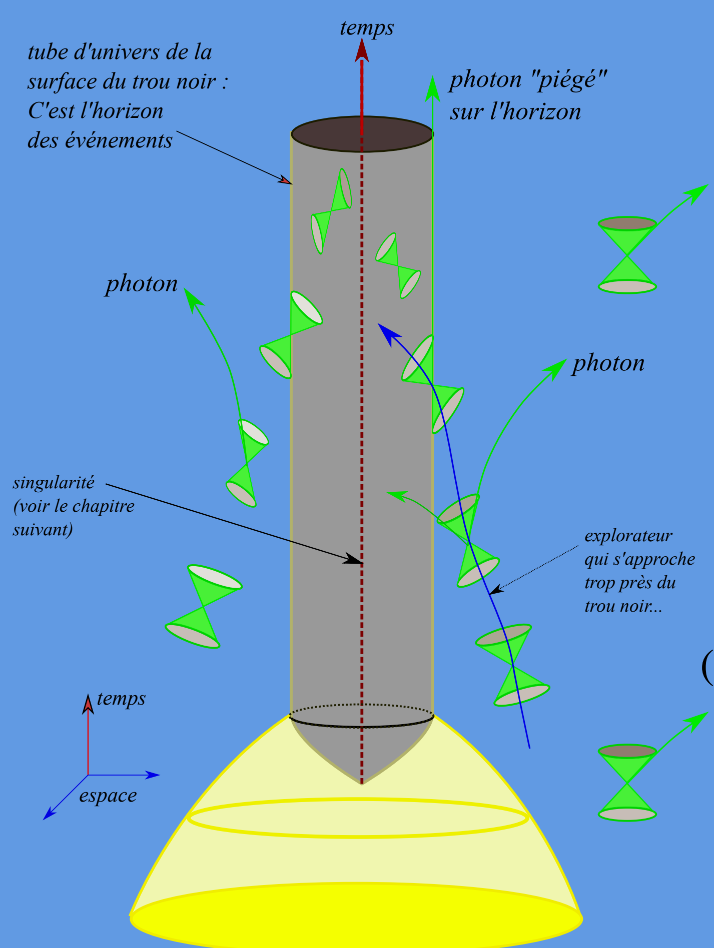
C'est un « tube d'univers », sur la surface duquel tous les cônes sont tangents (on appelle cela une *surface de genre lumière),* le demi-cône du futur étant à l'intérieur. On appelle ce tube *un Horizon des Événements.*

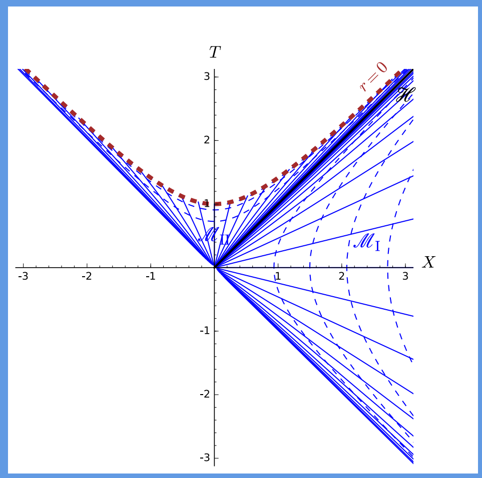
C'est une définition purement géométrique !

Les Trous de Ver :

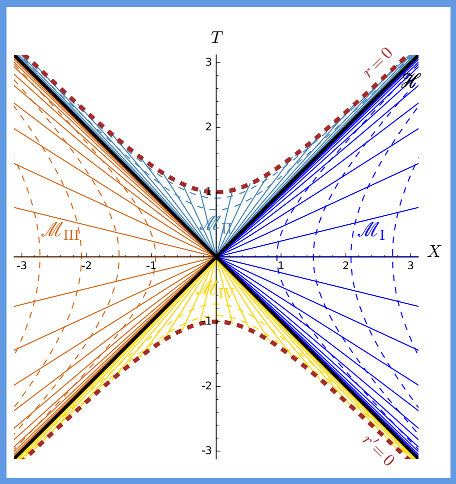
Un objet purement mathématique, construit par symétrie à partir de la solution de Schwarzschild.

C'est une définition purement géométrique !

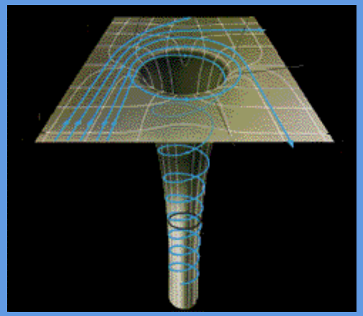




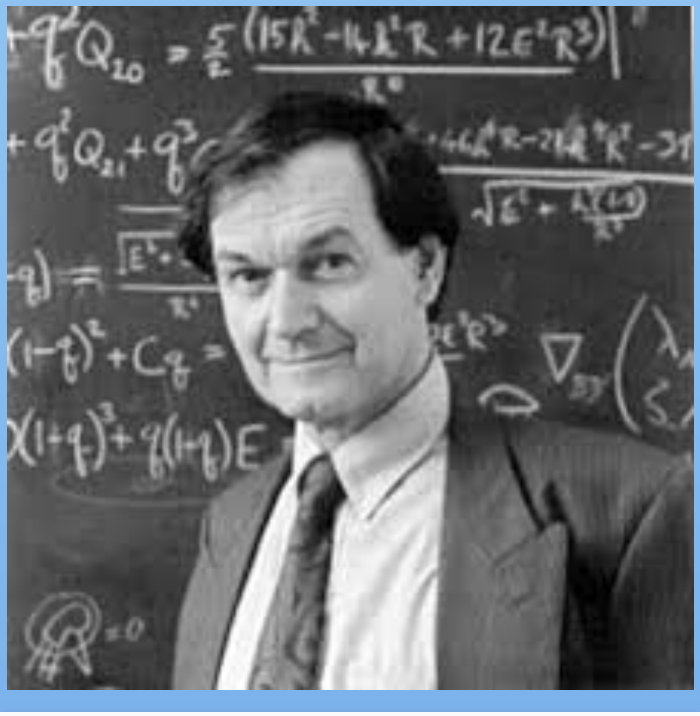
Une "carte" du trou noir de Schwarschild.
(Carte dite de Carter-*Penrose*)



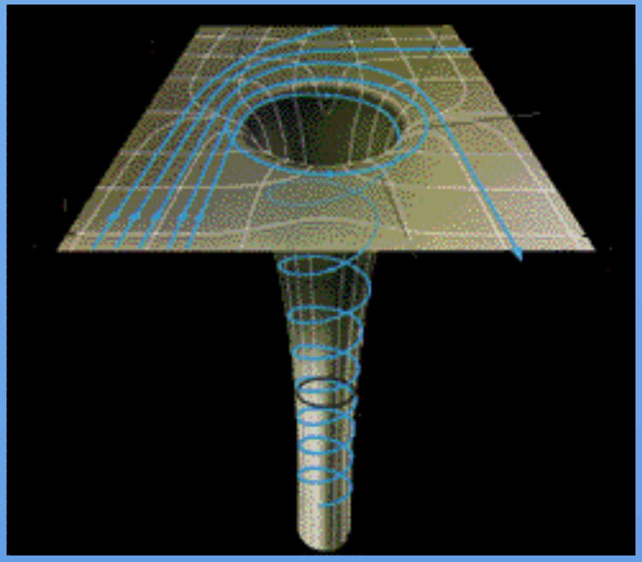
Une "carte" du trou de ver, obtenue en « symetrisant » la carte de Scharschild



De formidables problèmes de Géométrie…



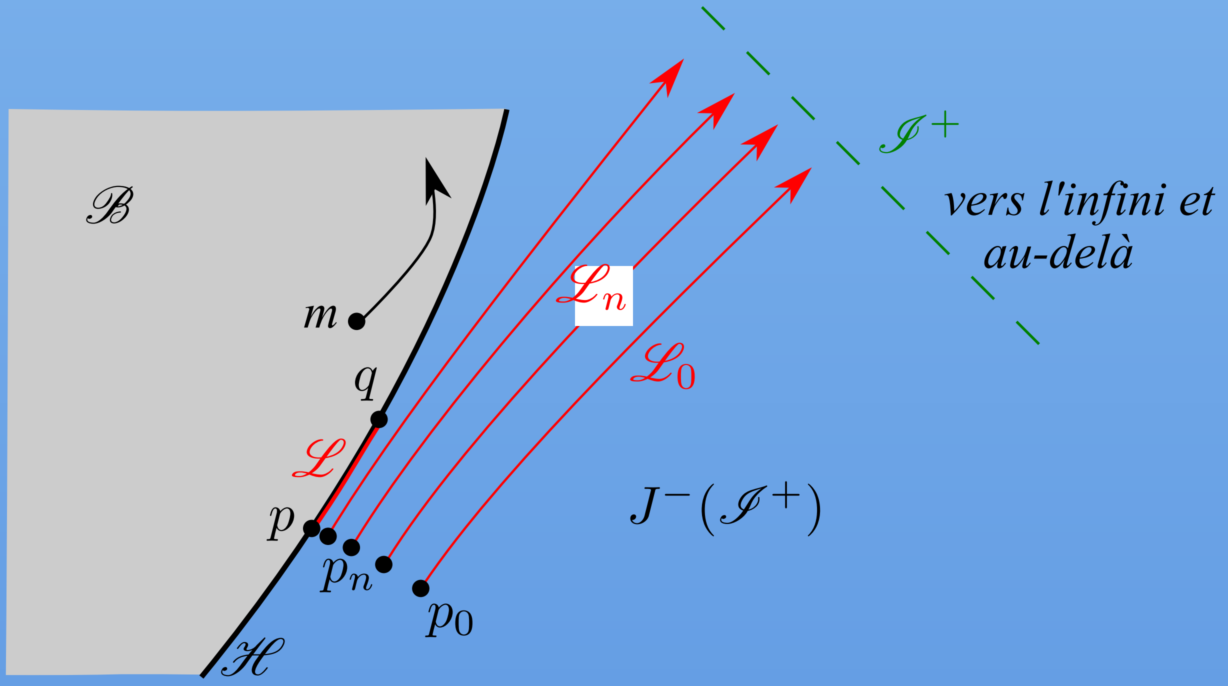
Roger Penrose:
Premier (et seul)
prix Nobel de Mathématiques !



Les théorèmes de singularités de Roger Penrose

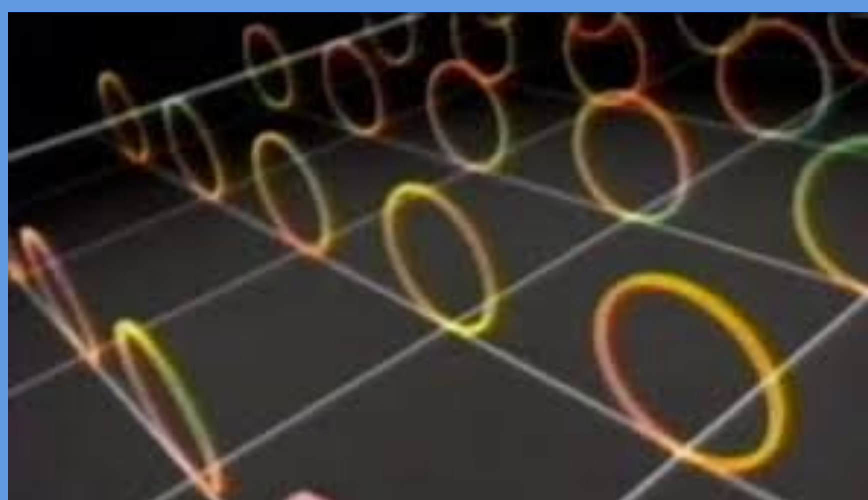
Théorème de Penrose (1964) : Si un espace-temps vérifie de « bonnes » conditions de causalité (topologie), et si il y existe une zone de courbure suffisamment forte, il existe nécessairement des géodésiques de genre temps qui ne peuvent être prolongées indéfiniment. (aucune hypothèse de symétrie).
Démonstration : par contradiction ! inhabituelle pour les physiciens !

Conjecture de censure cosmique (1970) : Une singularité est toujours masquée par un horizon des événements (par la surface d'un trou noir).
Problème géométrique toujours ouvert !
C'est néanmoins cette conjecture qui affirmerait mathématiquement l'existence des trous noirs…

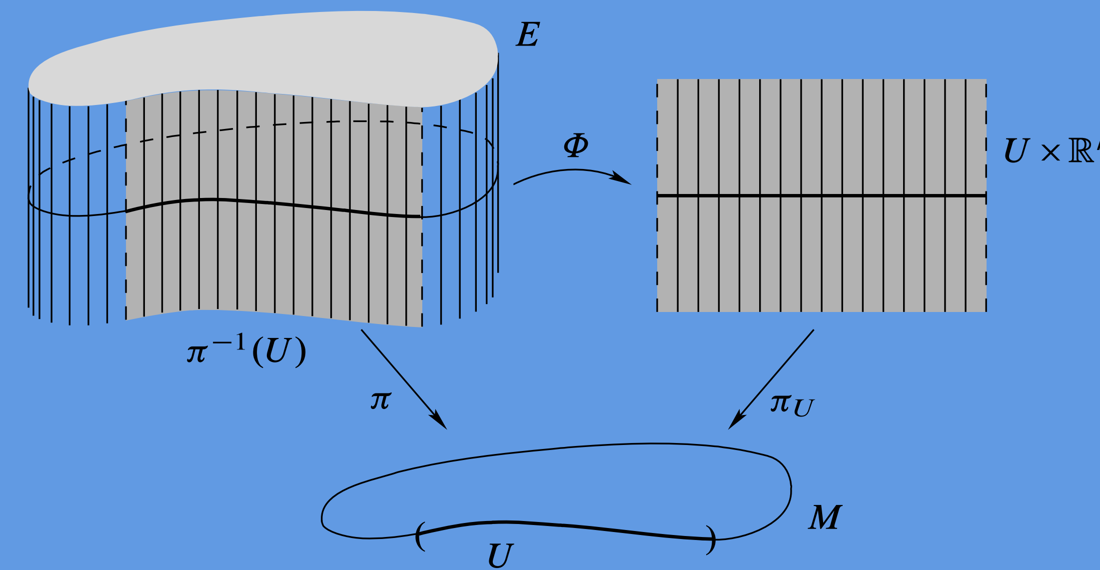


Un tremplin vers des géométries subtiles, de dimension 5, 8, 11…

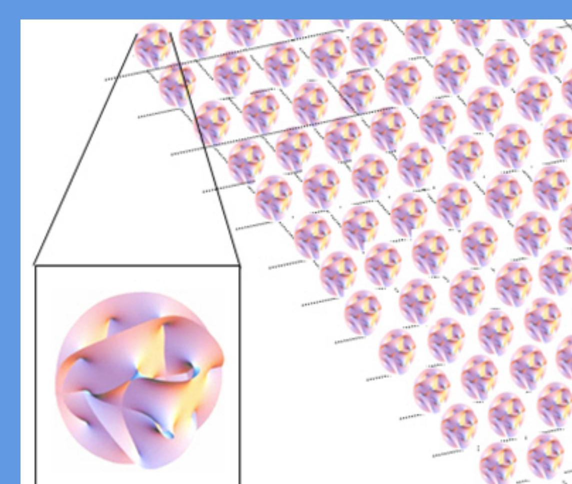
L'espace-temps de Kaluza-Klein, variété « fibrée » de dimension 5…
Pour inclure gravitation et électromagnétisme dans un même espace géométrique…

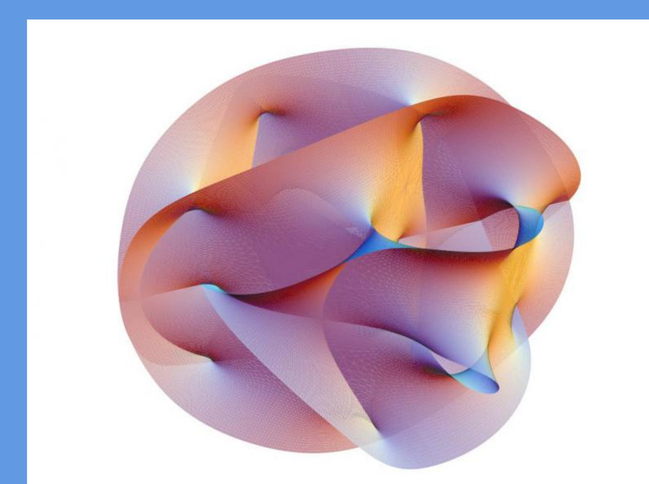


Les Variétés Fibrées…

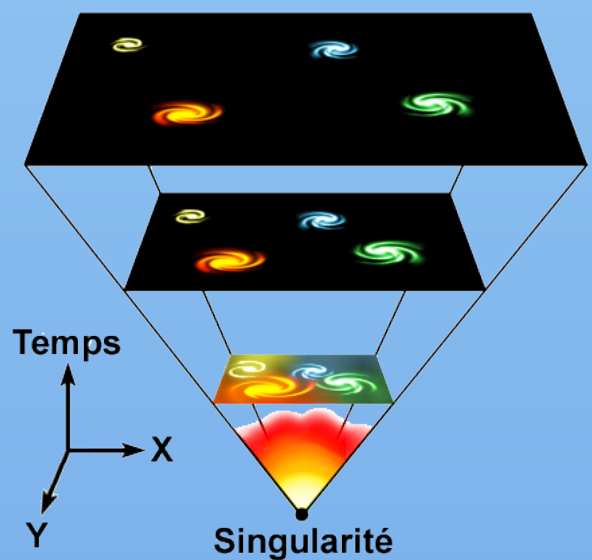


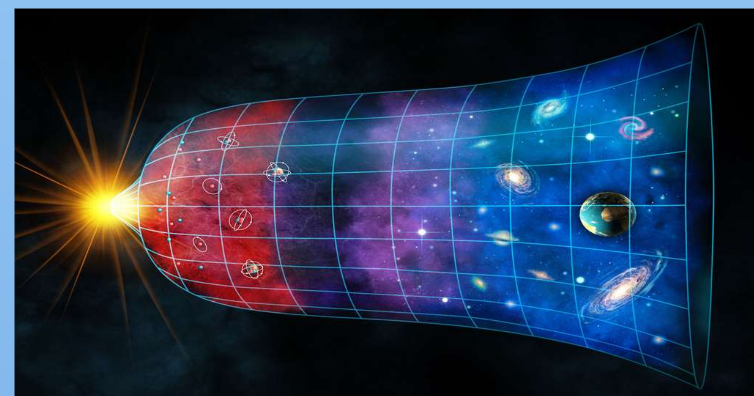
La théorie des cordes et les variétés de Calabi-Yau, variétés « fibrées » de dimension 8, 10 ou 11… Pour tenter d'inclure mécanique quantique et relativité dans un même cadre géométrique…

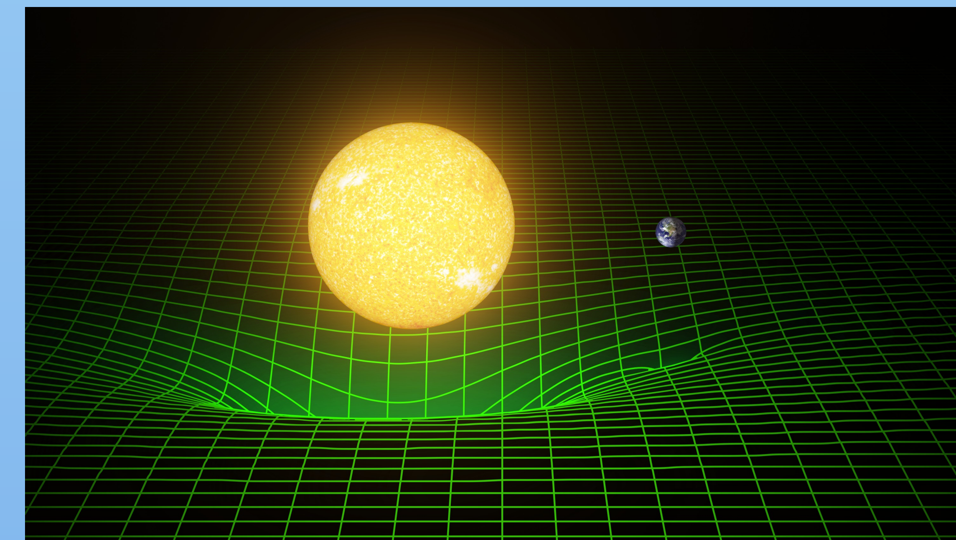


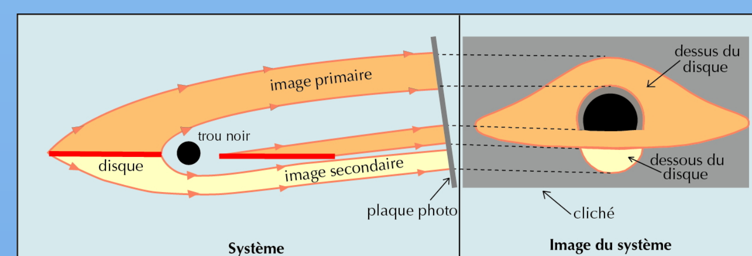


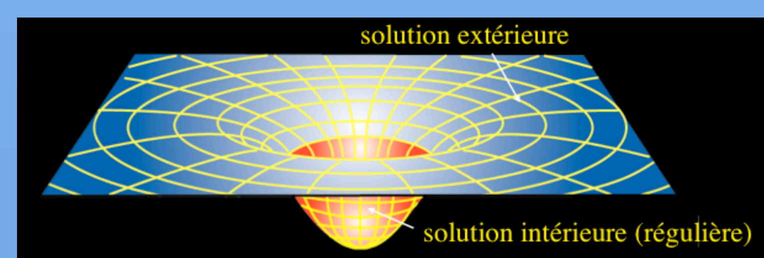
Et plein d'autres merveilles…

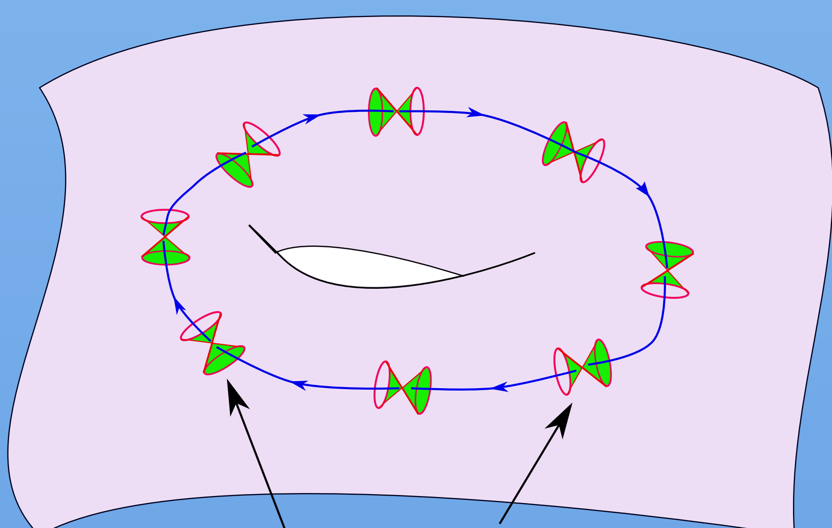




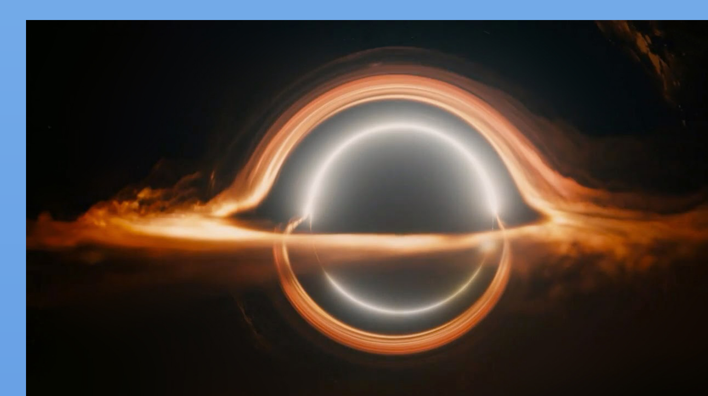








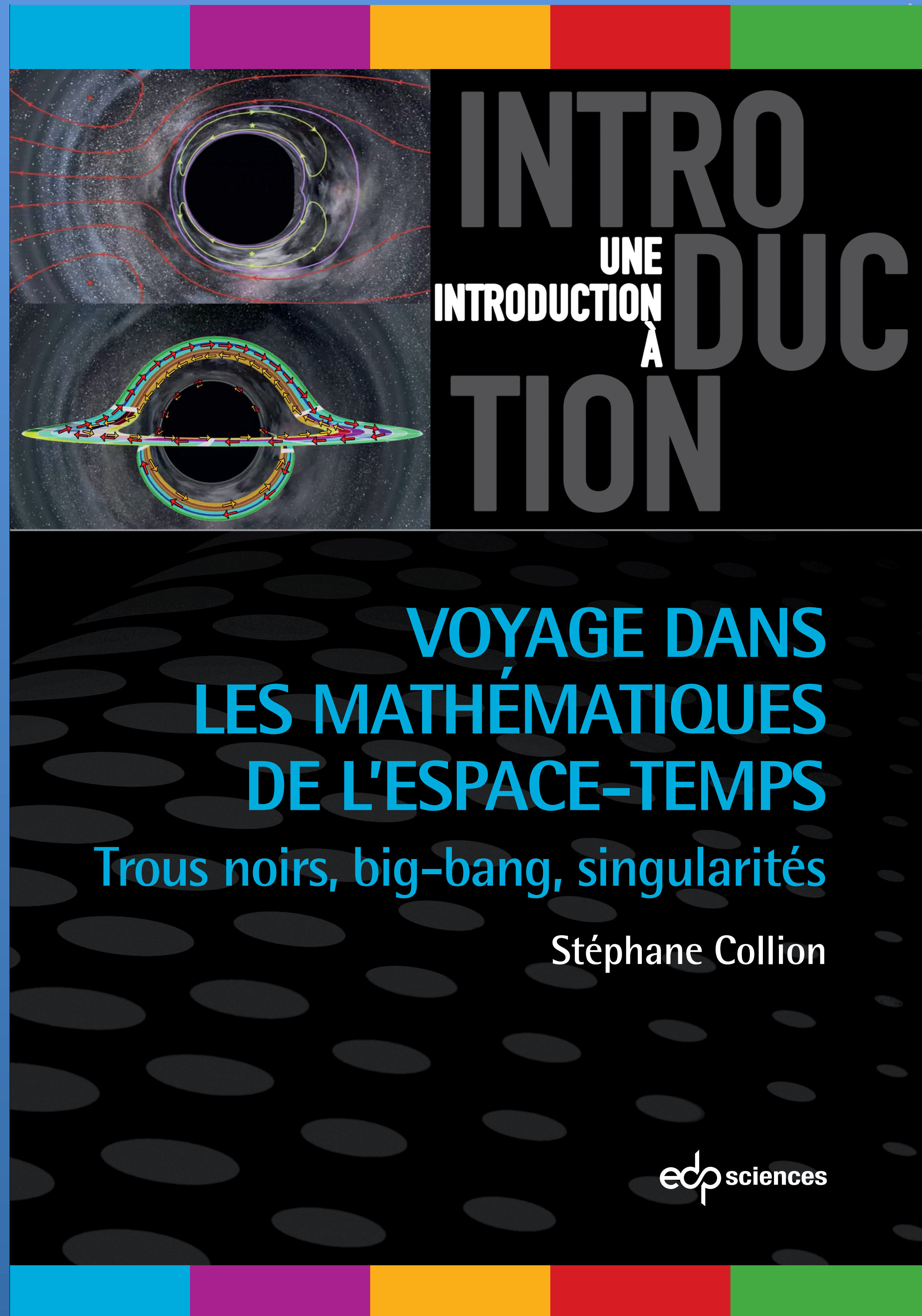
cônes de lumière
déformés par la courbure
et orientés par la forme de la variété.



A découvrir en 2024, dans la Partie 2…

Publicité.

Pour
Approfondir :



Un livre sympa,
pleins de dessins.