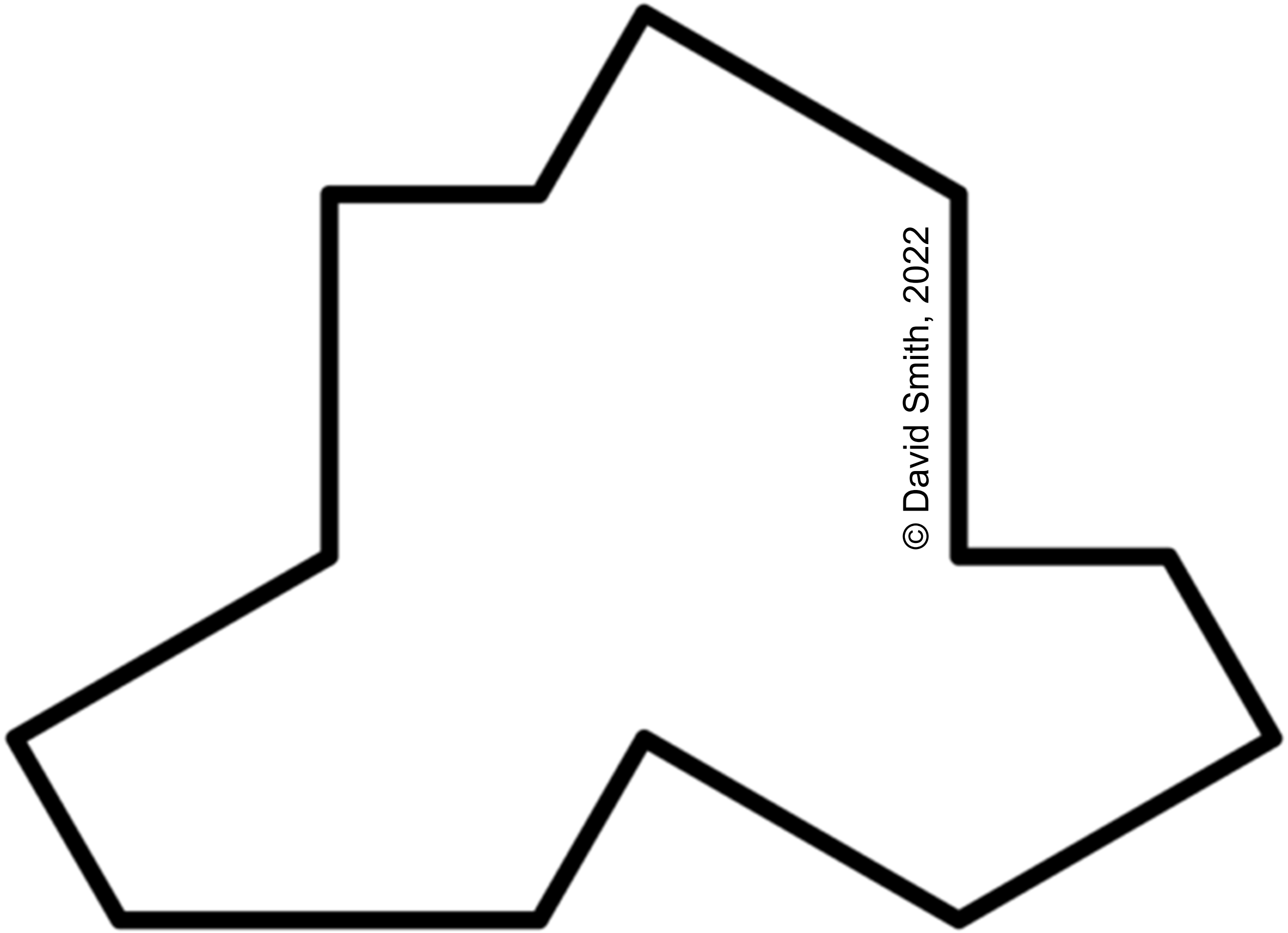
Un moment historique pour les pavages du plan



Aire Ona
1 rue du docteur Goujon
75012 Paris

Édouard Thomas
Secrétaire de Kafemath

« Plan »

Les pavages périodiques, non périodiques et quasi-périodiques

Les pavages de Penrose, d’Amann et de Goodmann-Strauss

La tuile de Voderberg, la tuile de Socolar–Taylor

Le problème « ein Stein »

Le nombre de Heesch

Structure hiérarchique unique et pavages apériodiques

Les découvertes de David Smith (2022 et 2023)

Des pavages réguliers du plan

au problème « ein Stein »

Au Kafemath :

Facettes des cristaux. Pierre Pansu, jeudi 18 septembre 2014.

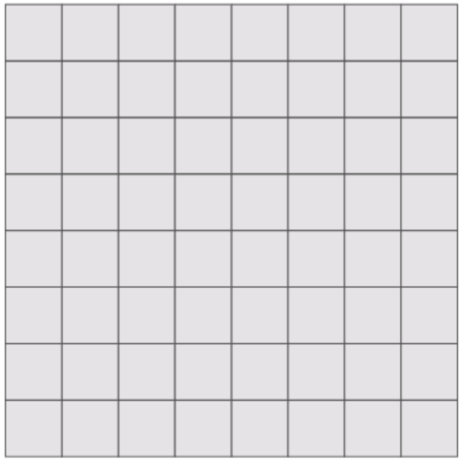
Pavages de Penrose. François Lavallou, mercredi 21 octobre 2020.

Pavages. François Lavallou, jeudi 1er avril 2021.

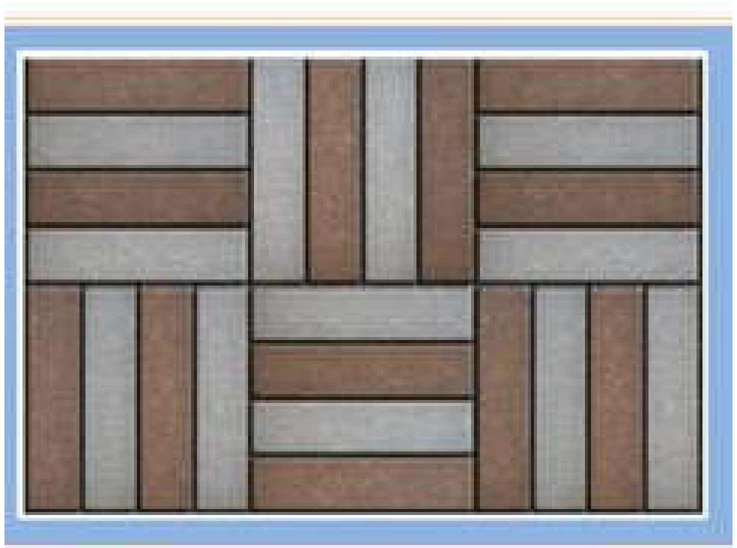
Balade historique dans le monde des pavages : de l'Alhambra aux quasi-cristaux. Emmanuelle Féaux de Lacroix, jeudi 6 avril 2023.

Chapeau, les pavages apériodiques du plan ! Édouard Thomas, samedi 21 octobre 2023.

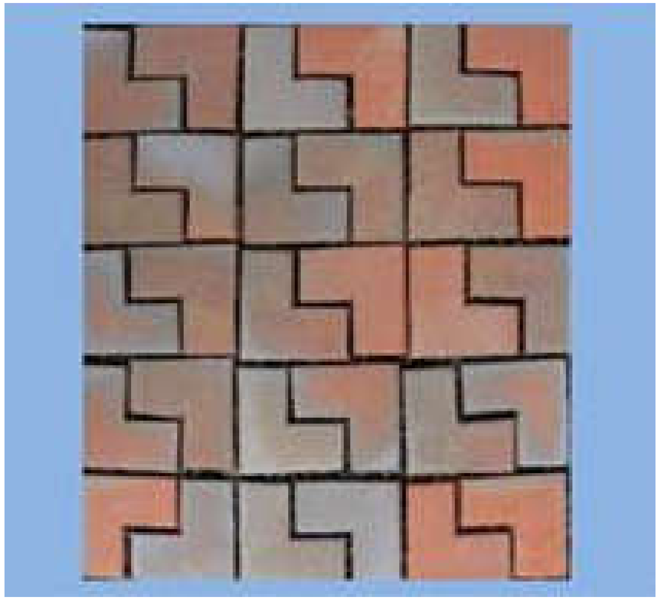
Les pavages périodiques



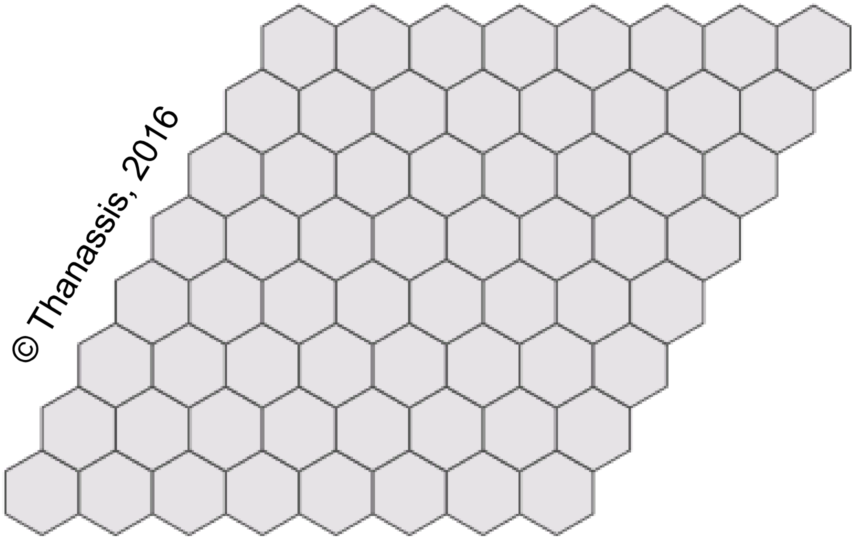
© Thanassis, 2016



© Gérard Villemin, 2016



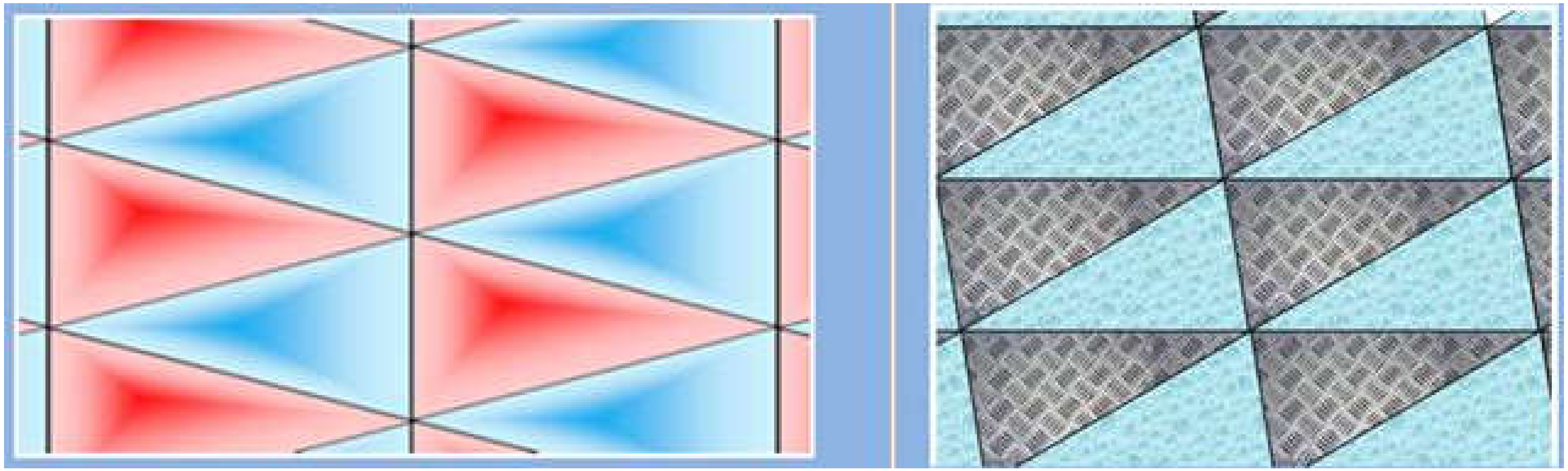
© Gérard Villemin, 2016

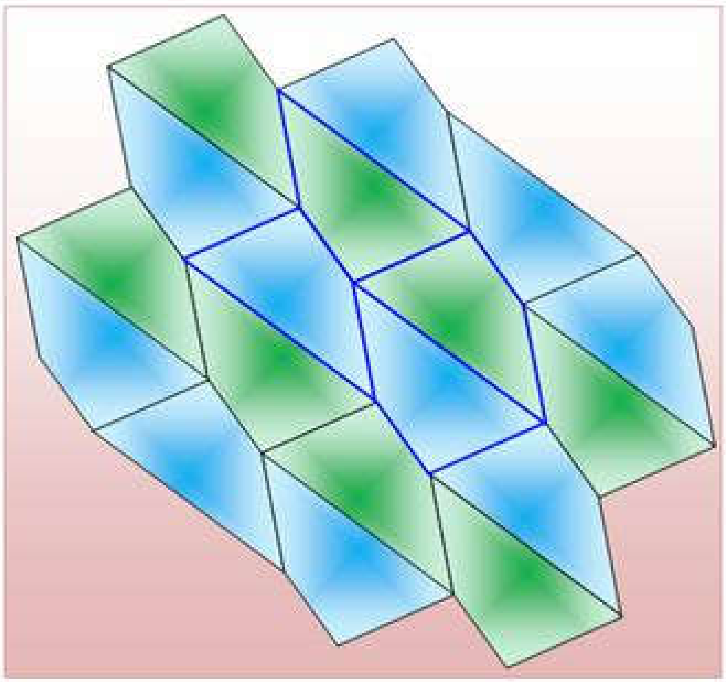


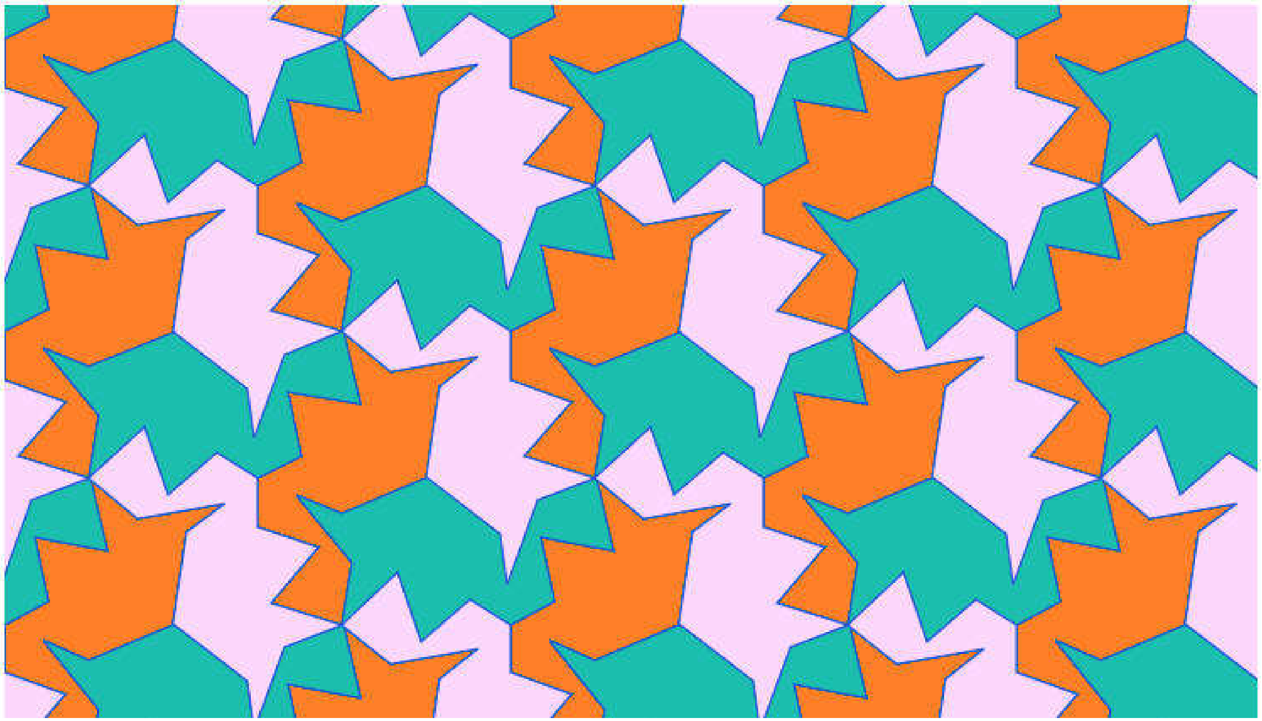
© Thanassis, 2016

© Gérard Villemin, 2016

Des invariances par translation



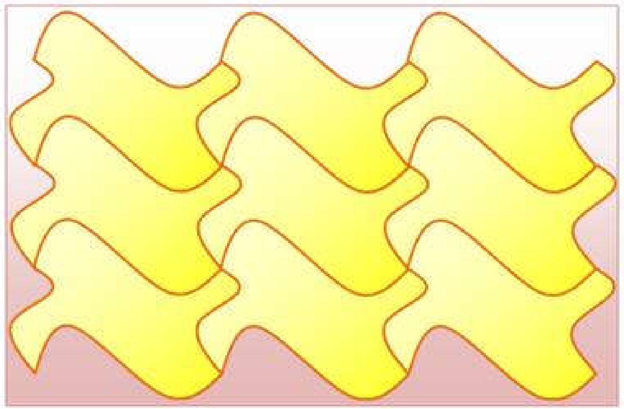


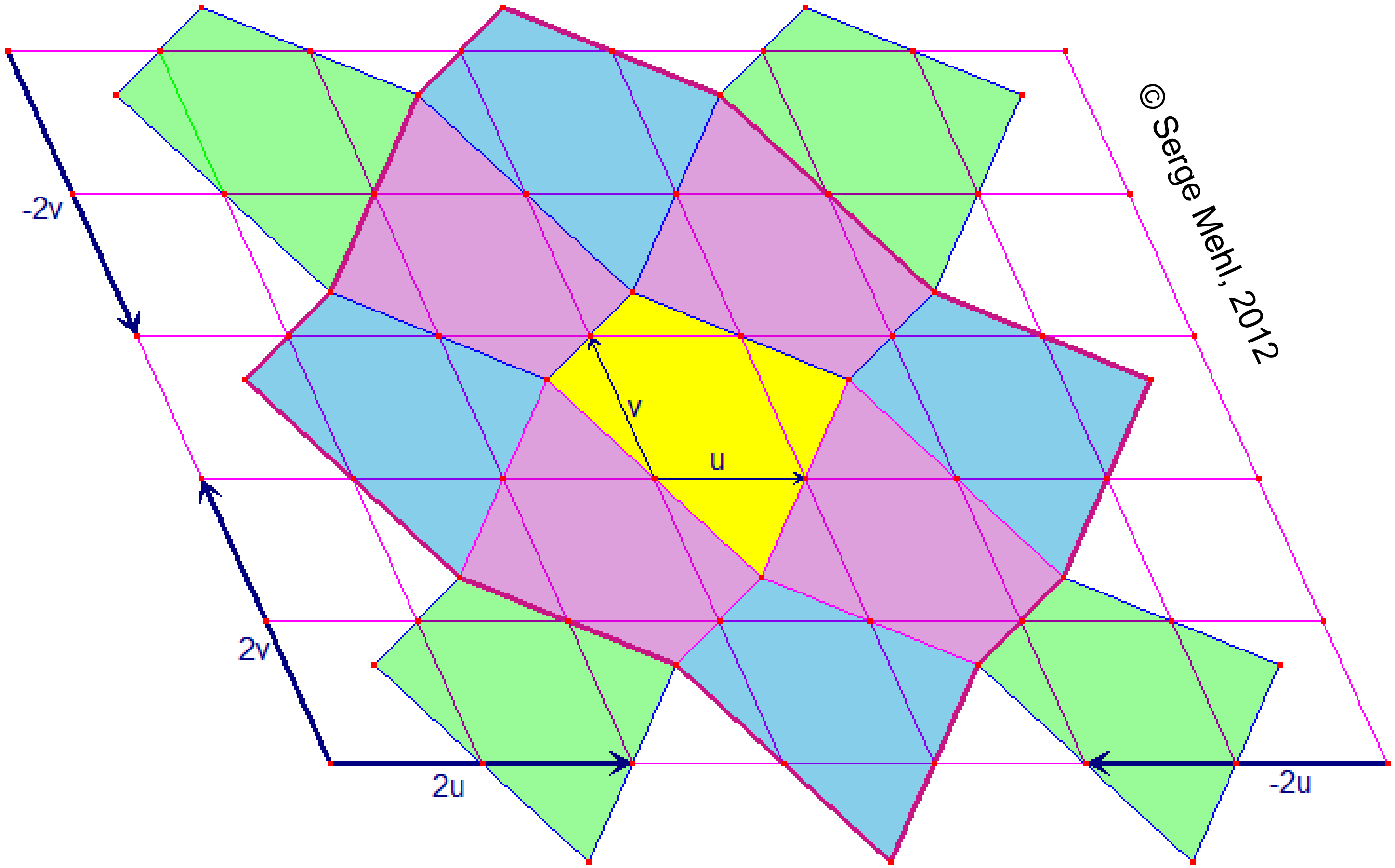


Le théorème de Varignon

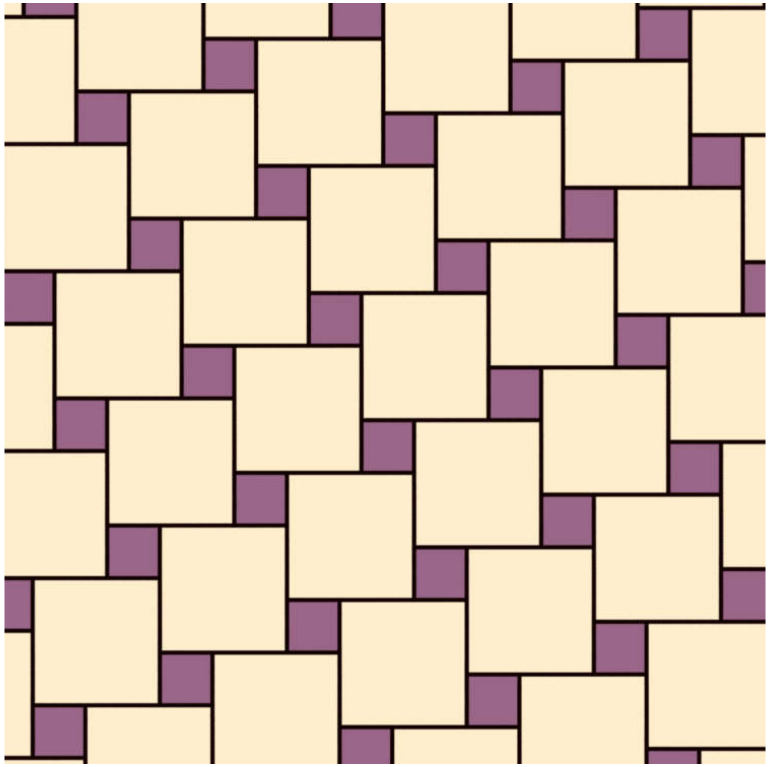
Le quadrilatère joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est un parallélogramme.

Corollaire : le pavage périodique du plan est possible par tout quadrilatère.

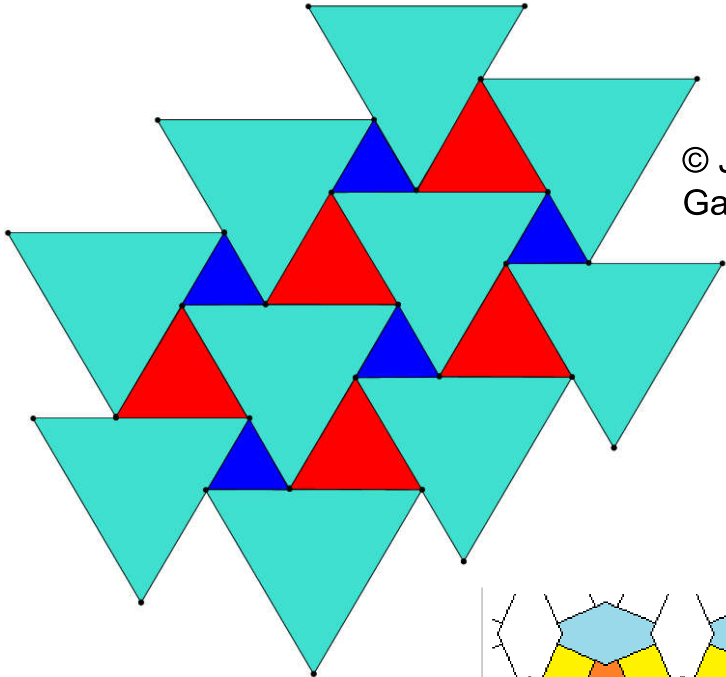




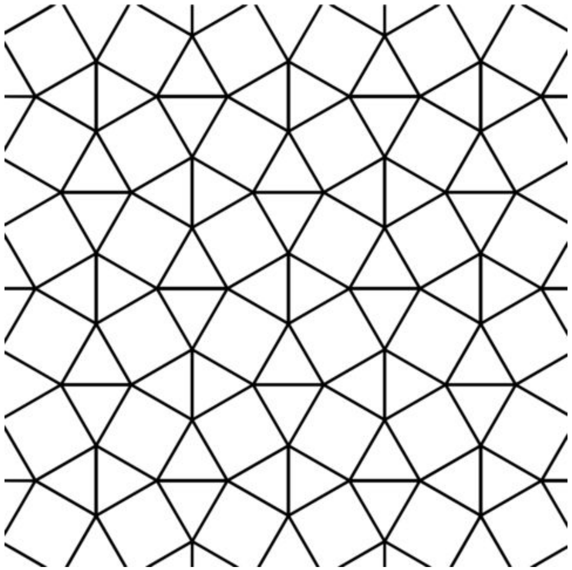
Avec plusieurs tuiles



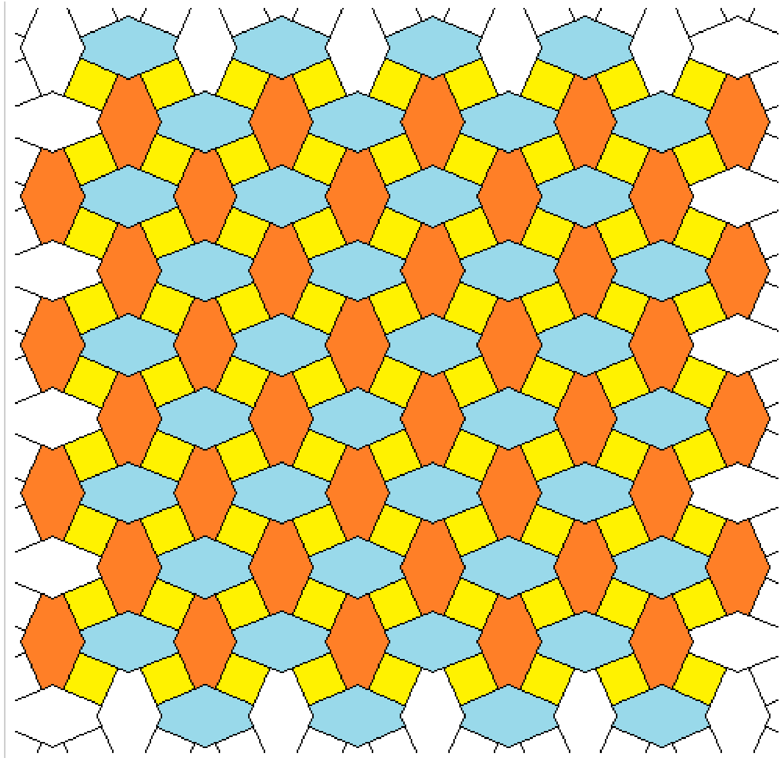
© Baelde, 2012



© Janos Pach et Gabor Tardos, 2018

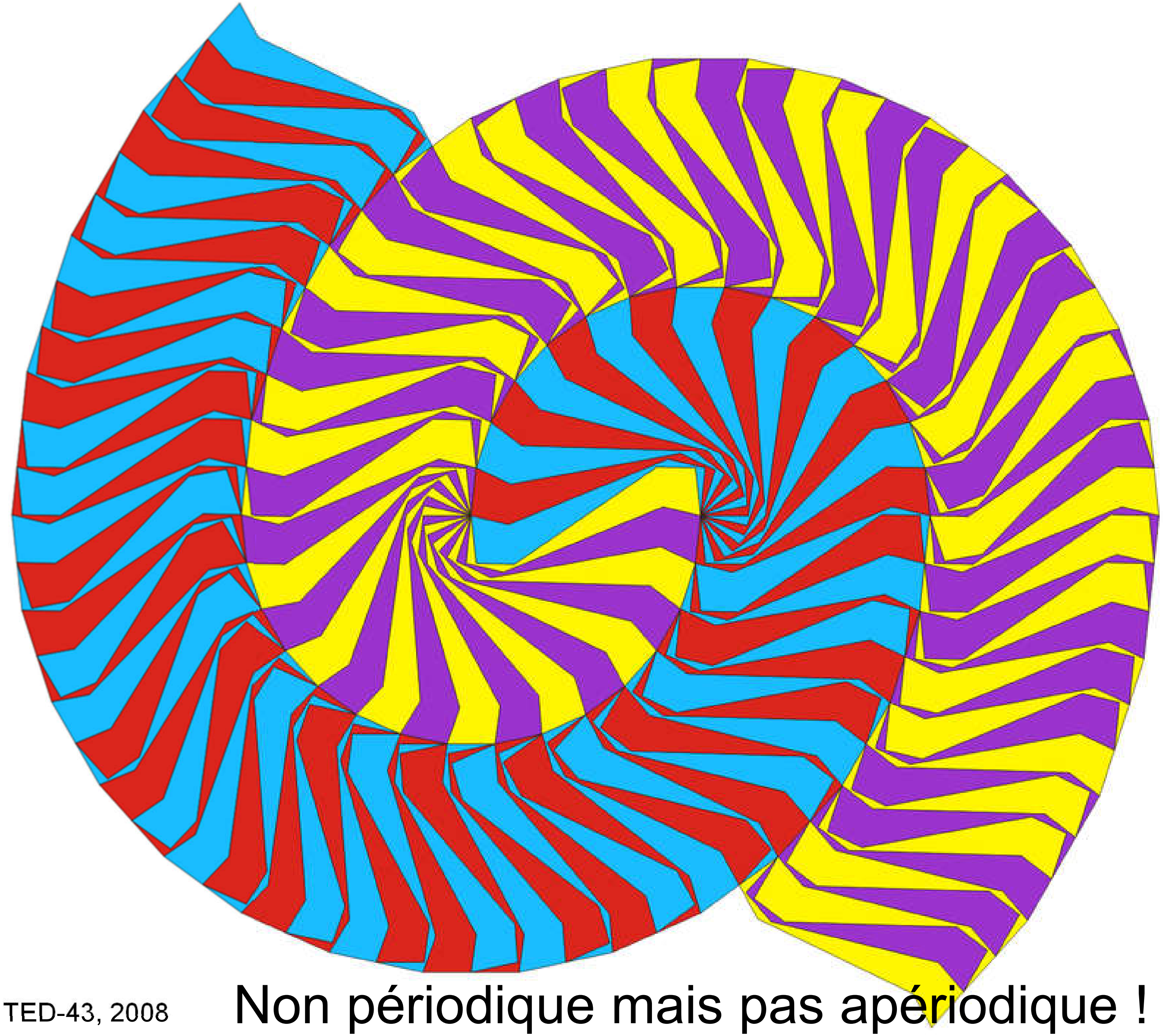


© supercoloring.com



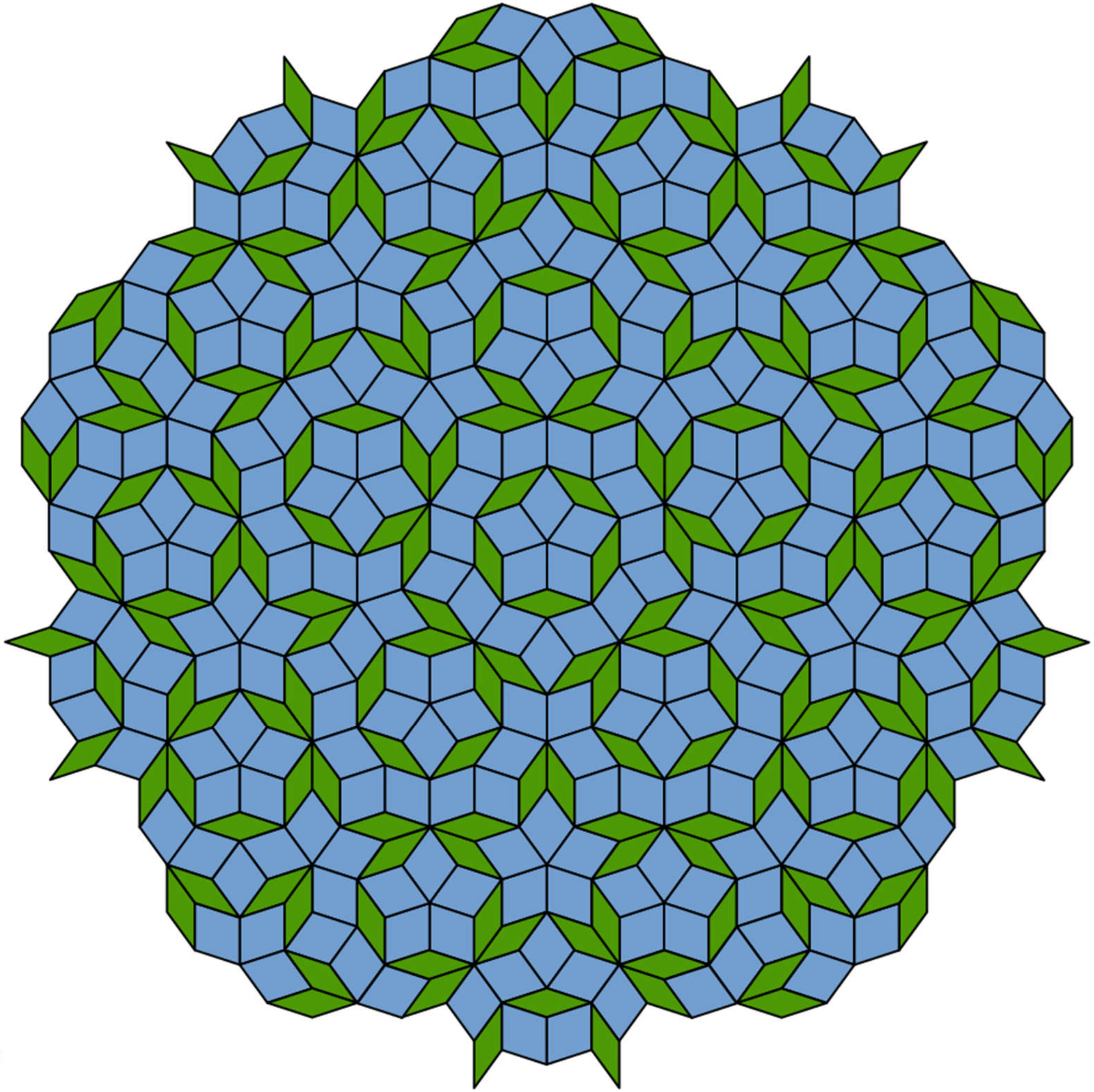
© Serge Mehl, 2012

Le pavage de Voderberg (1936)

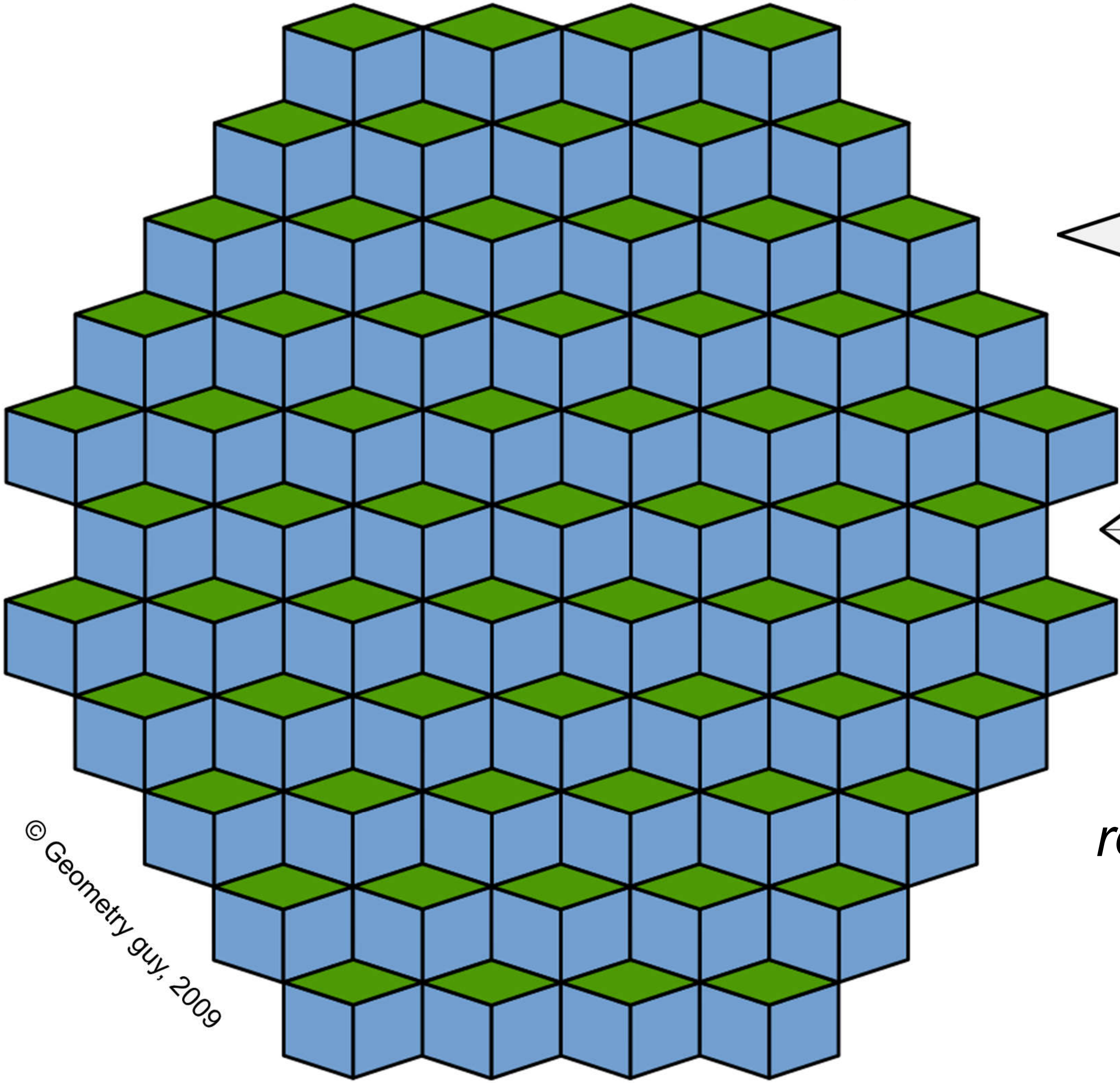


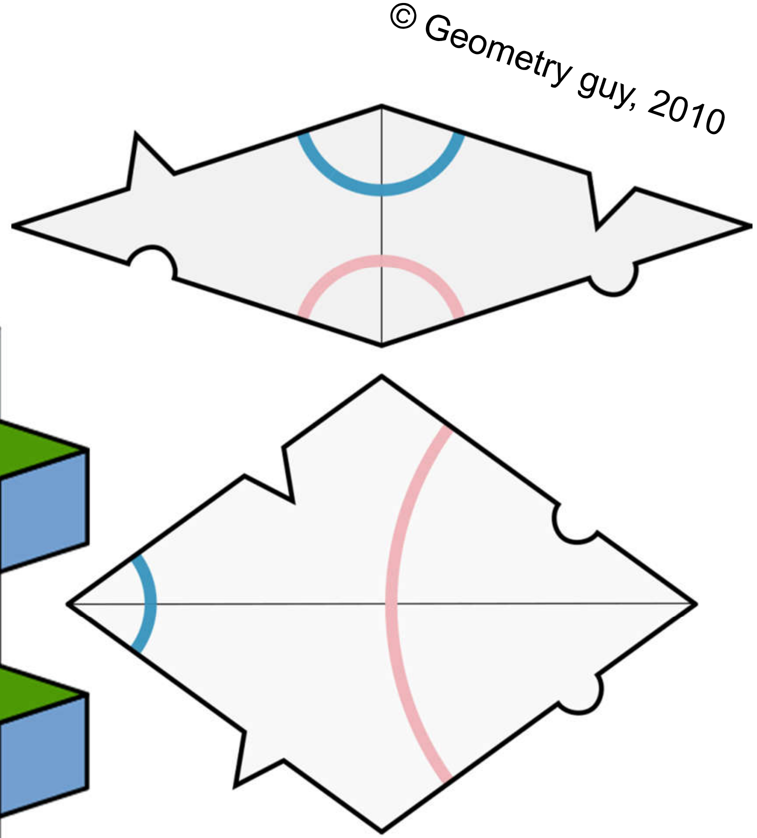
Non périodique mais pas apériodique !

Des pavages apériodiques



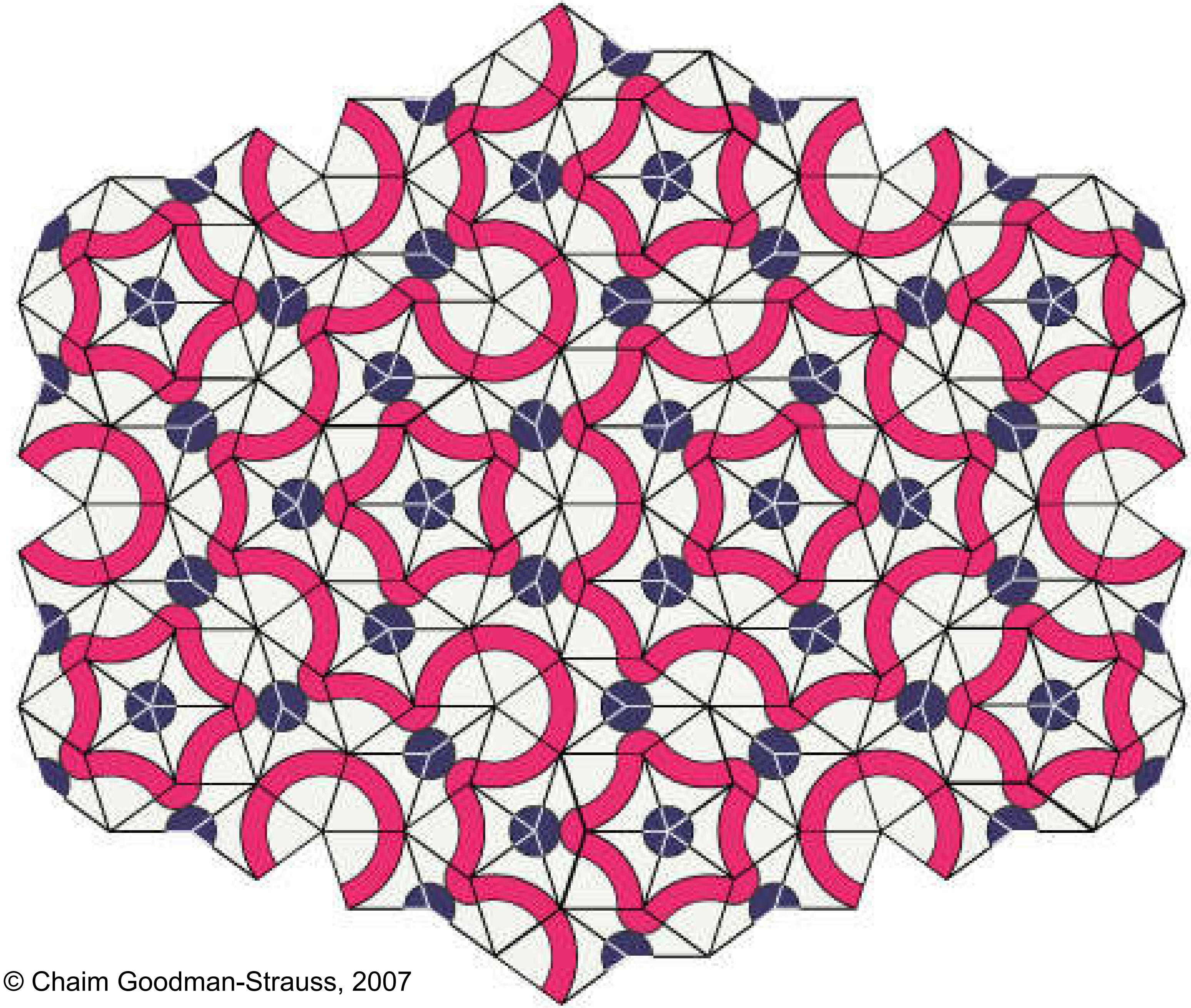
On peut réarranger les pièces !





Les
règles d'assemblage
imposées

Des questions ouvertes (Penrose)

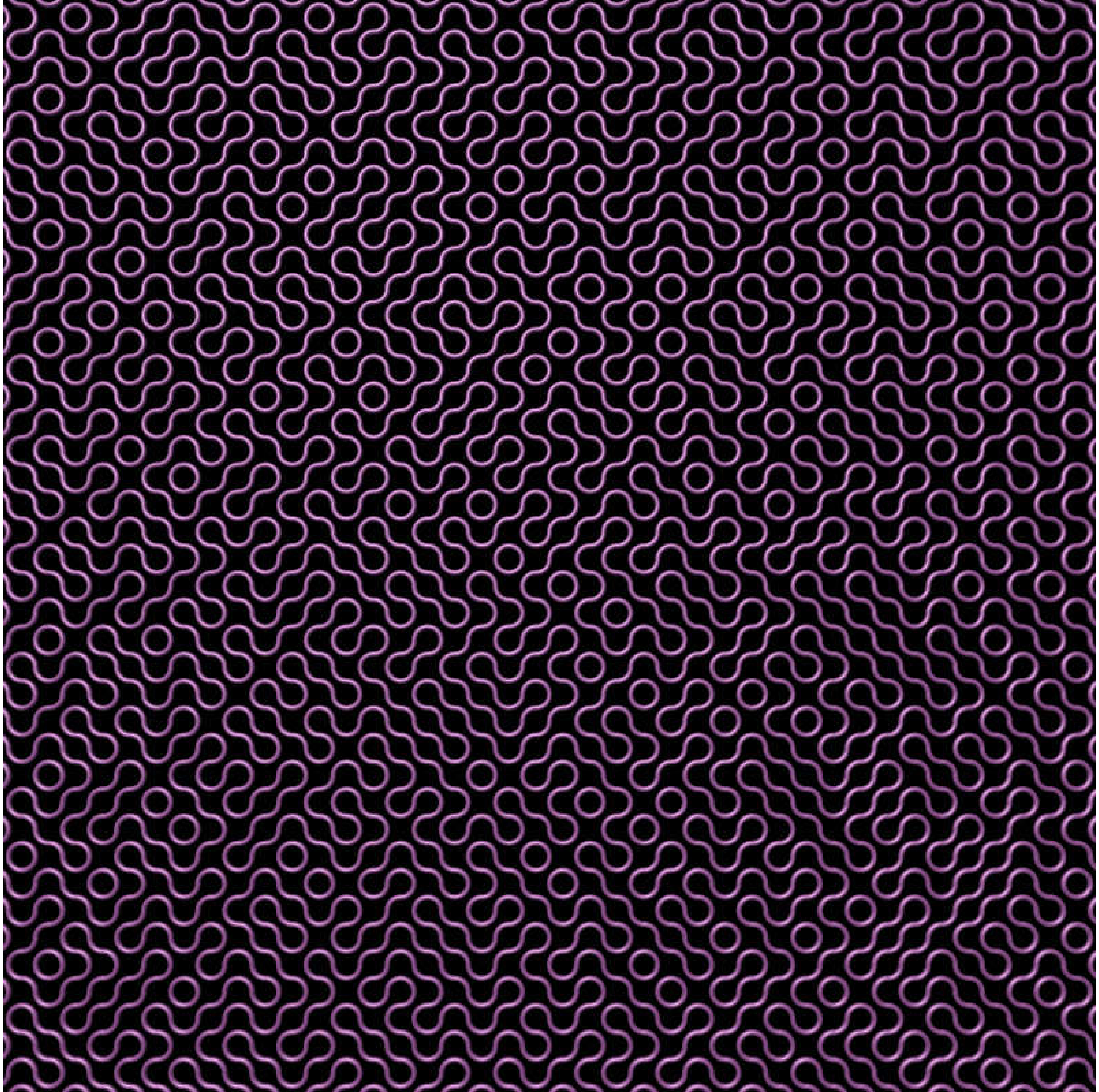


© Chaim Goodman-Strauss, 2007

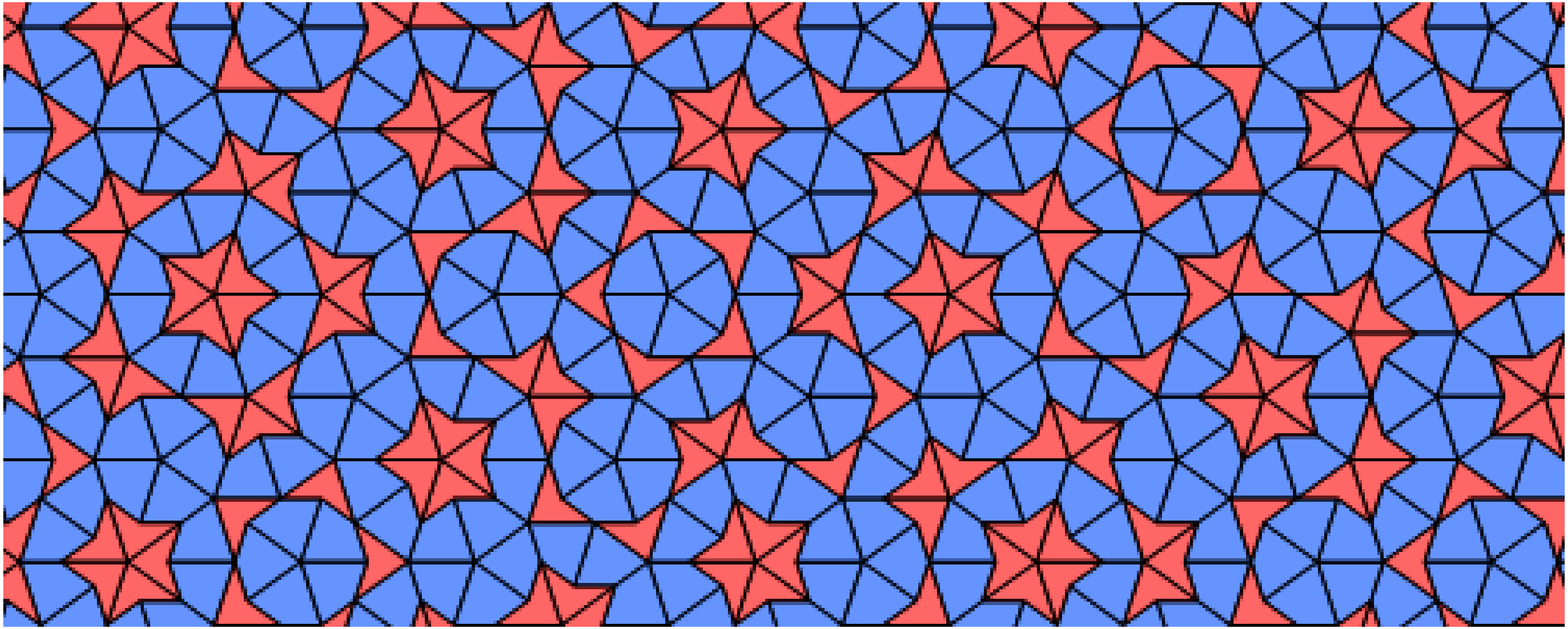
Les décorations produisent des motifs géométriques dans le pavage.

Lesquels ?

Sont-ils (« presque » toujours) **des courbes fermées ?**

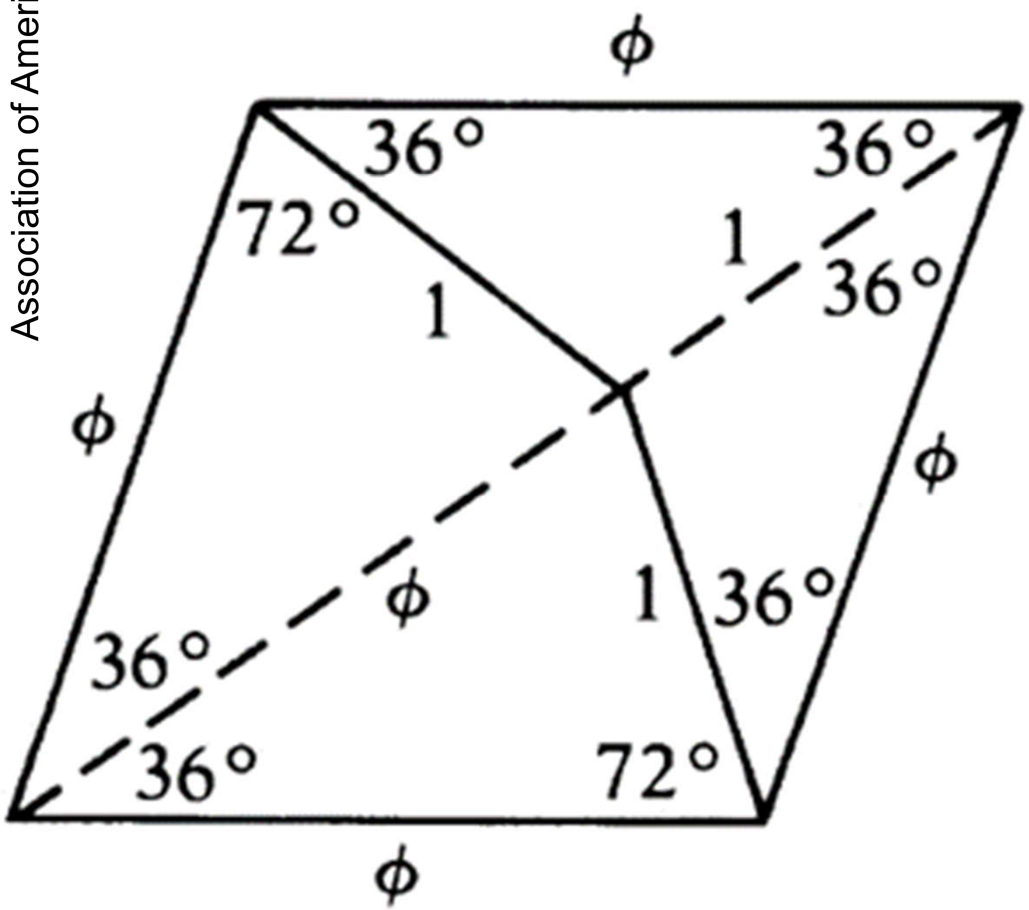


Un autre pavage de Penrose

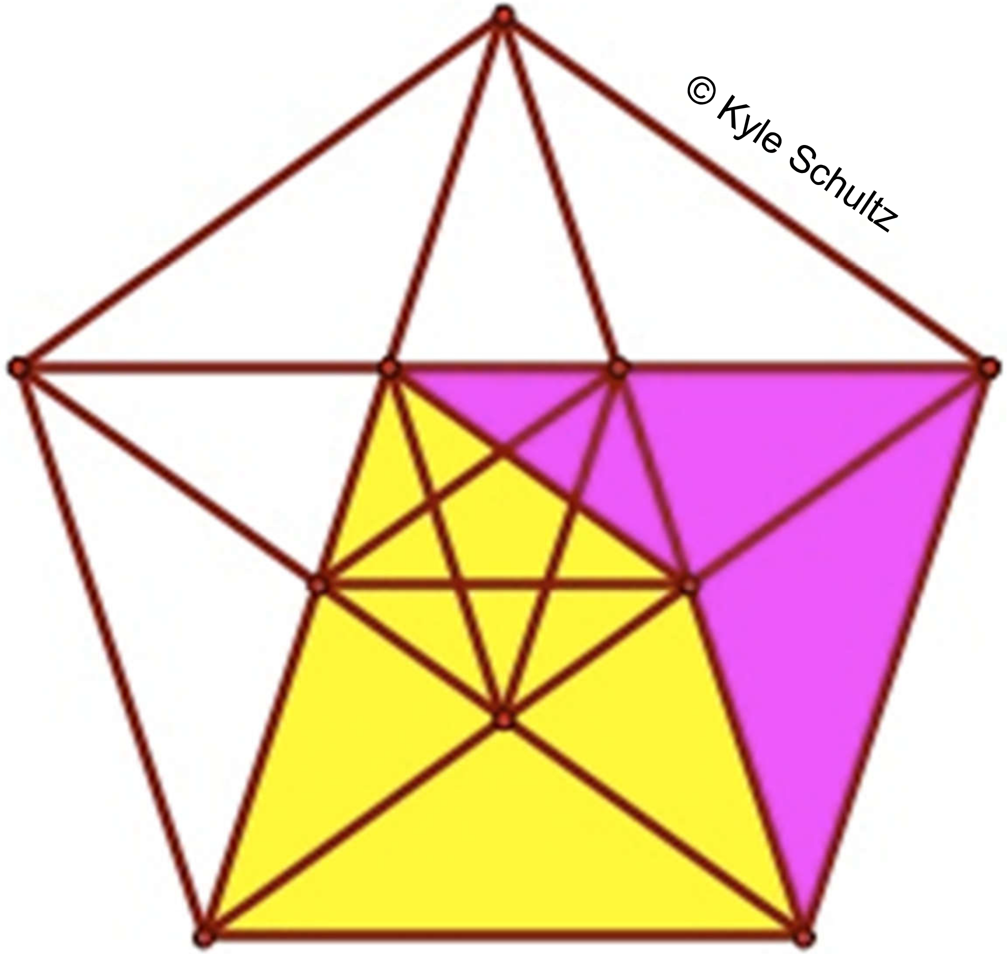


Le rapport (1,612…) entre le nombre de tuiles bleues (245) et le nombre de tuiles rouges (152) tend vers le nombre d'or (1,618…).

Deux tuiles fameuses (1974)



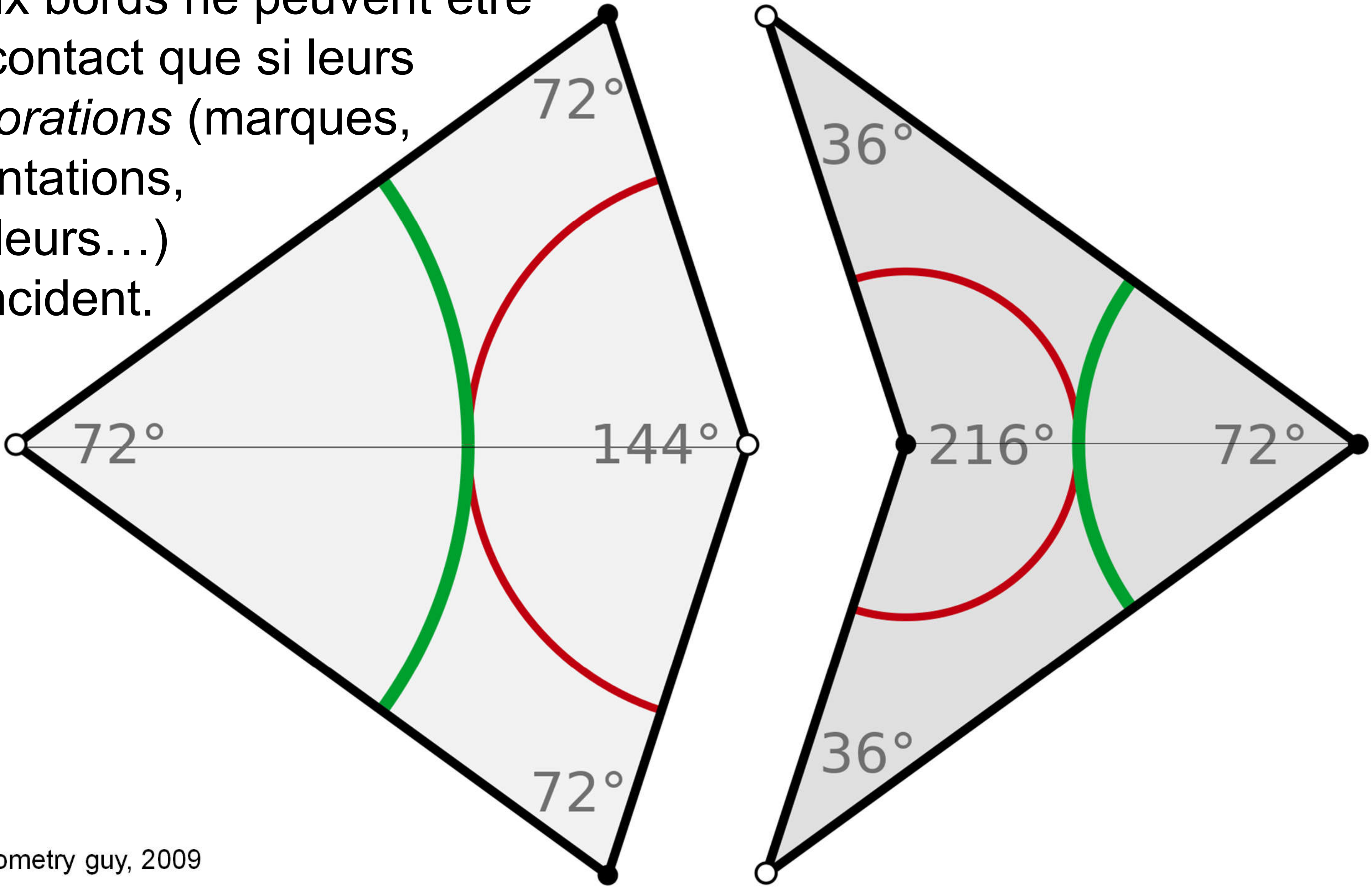
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



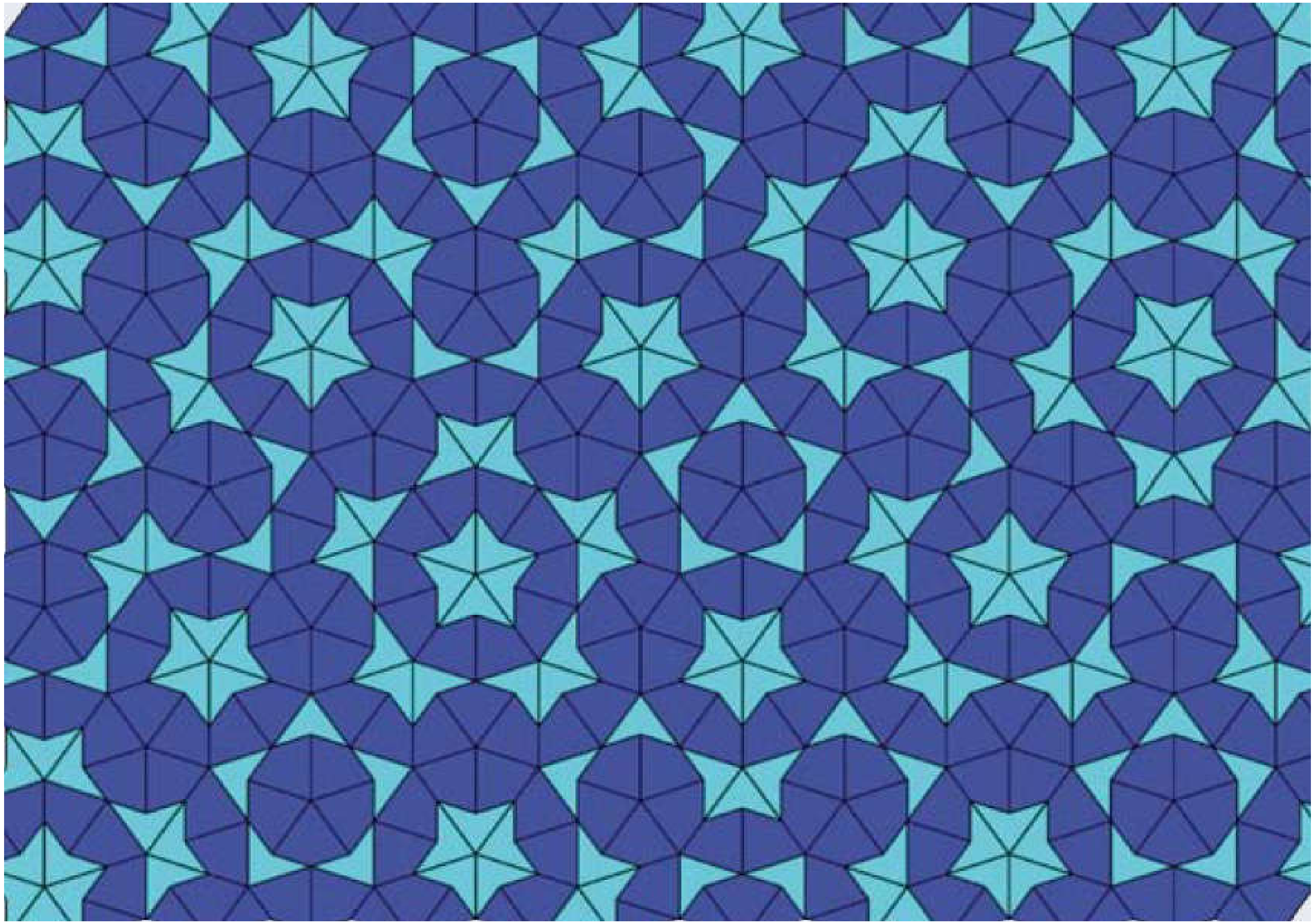
Le *cerf-volant* (ou *kite*, en jaune)
La *flèche* (ou *dart*, en violet)

Les règles d’assemblage

Deux bords ne peuvent être en contact que si leurs *décorations* (marques, orientations, couleurs…) coïncident.



Avec le cerf-volant et la flèche



Pavage apériodique quasi-périodique

Aucune symétrie de translation.

Toute partie finie du pavage se retrouve une infinité de fois dans le pavage (infinité non dénombrable de pavages de Penrose !).

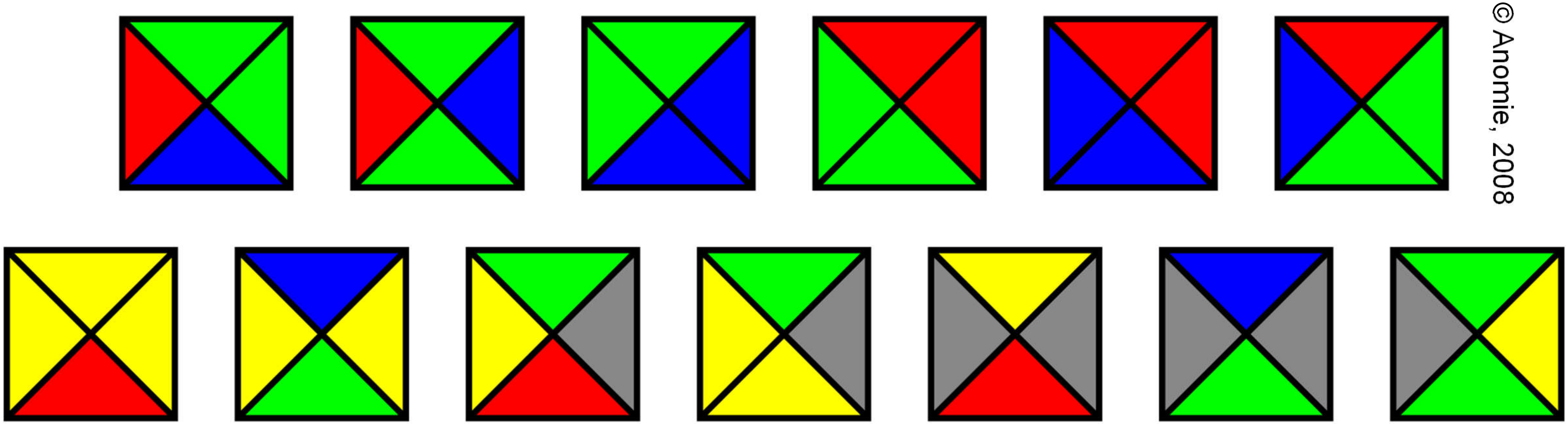
Mais revenons

aux origines

des pavages apériodiques

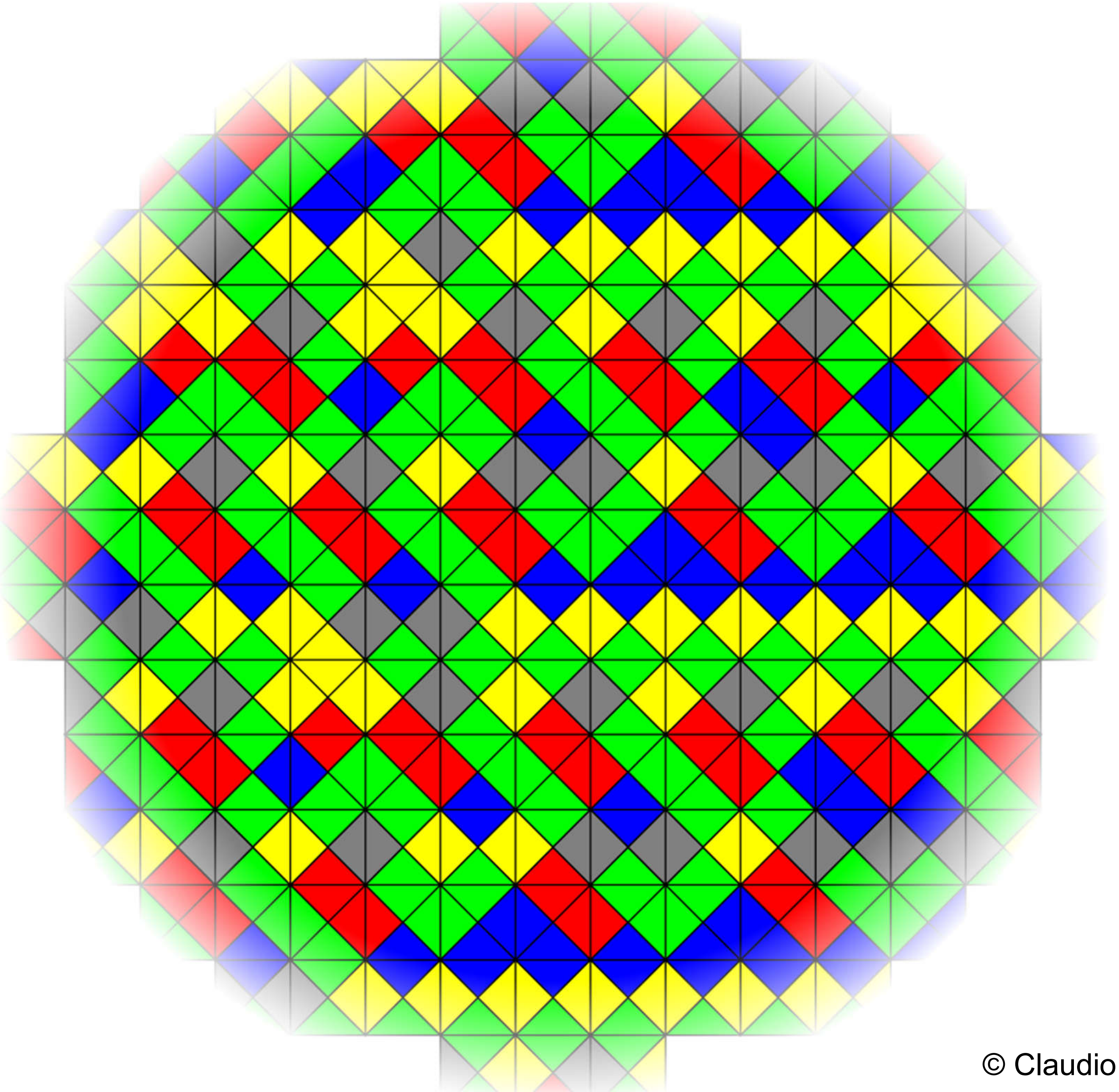
Un peu d'histoire

1961 : premier ensemble de prototuiles apériodique
avec les treize *dominos de Wang* (preuve : Robert Berger, 1964).



Rotations et symétries axiales interdites :
seules les translations sont autorisées !

Un pavage avec les treize dominos



La quête commence !

1964 : il existe un ensemble de **tuiles** apériodique (inattendu !).
Berger (né en 1938) en trouve un comprenant 20 426 tuiles.
Il réduit cet ensemble à 103 tuiles.

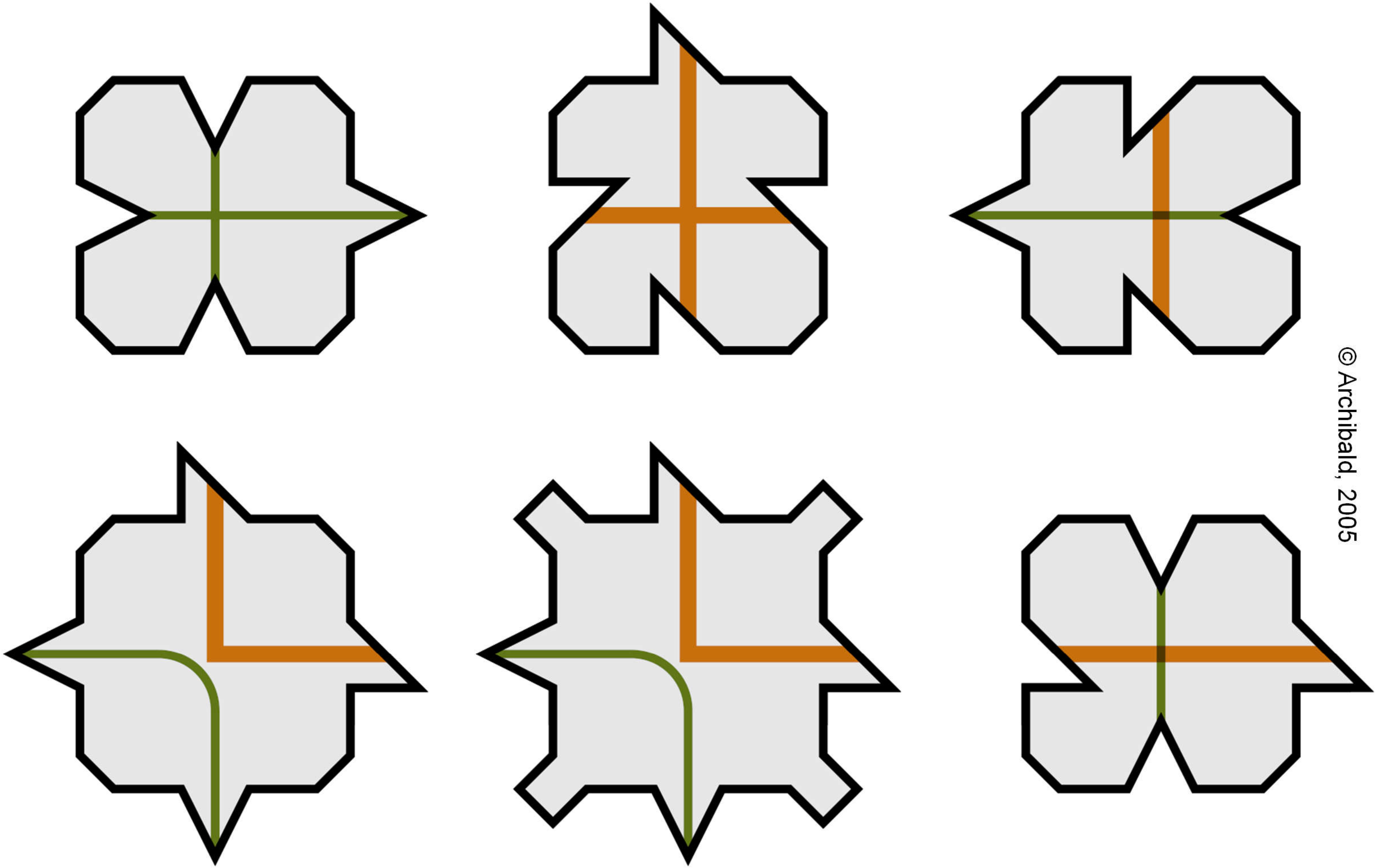
1968 : Donald Knuth obtient 86 tuiles.

1971 : Raphael Robinson trouve un ensemble de 6 tuiles.

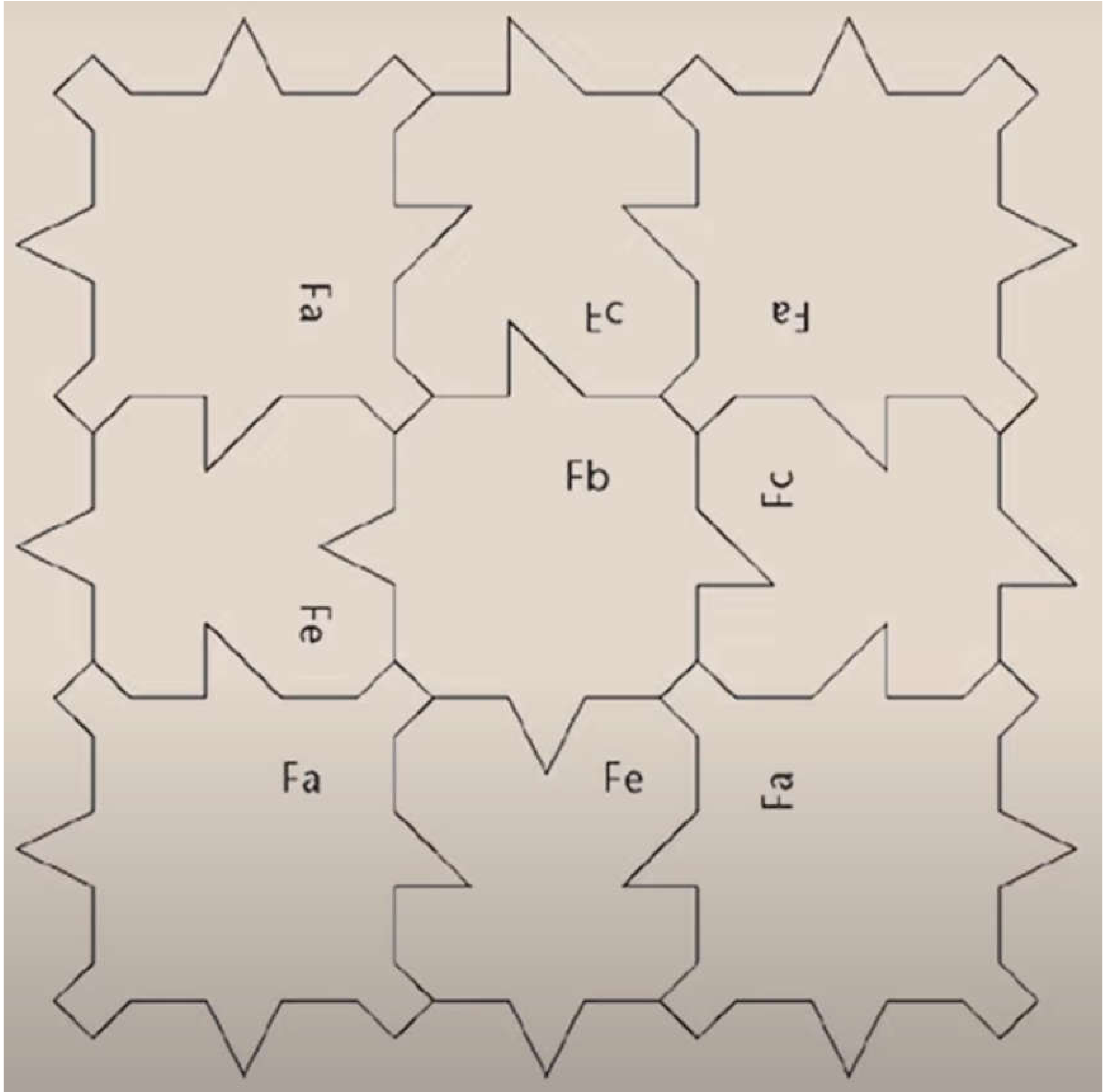
Hao Wang
(1921–1995)

Raphael
Mitchel
Robinson
(1911–1995)

Les six tuiles de Robinson

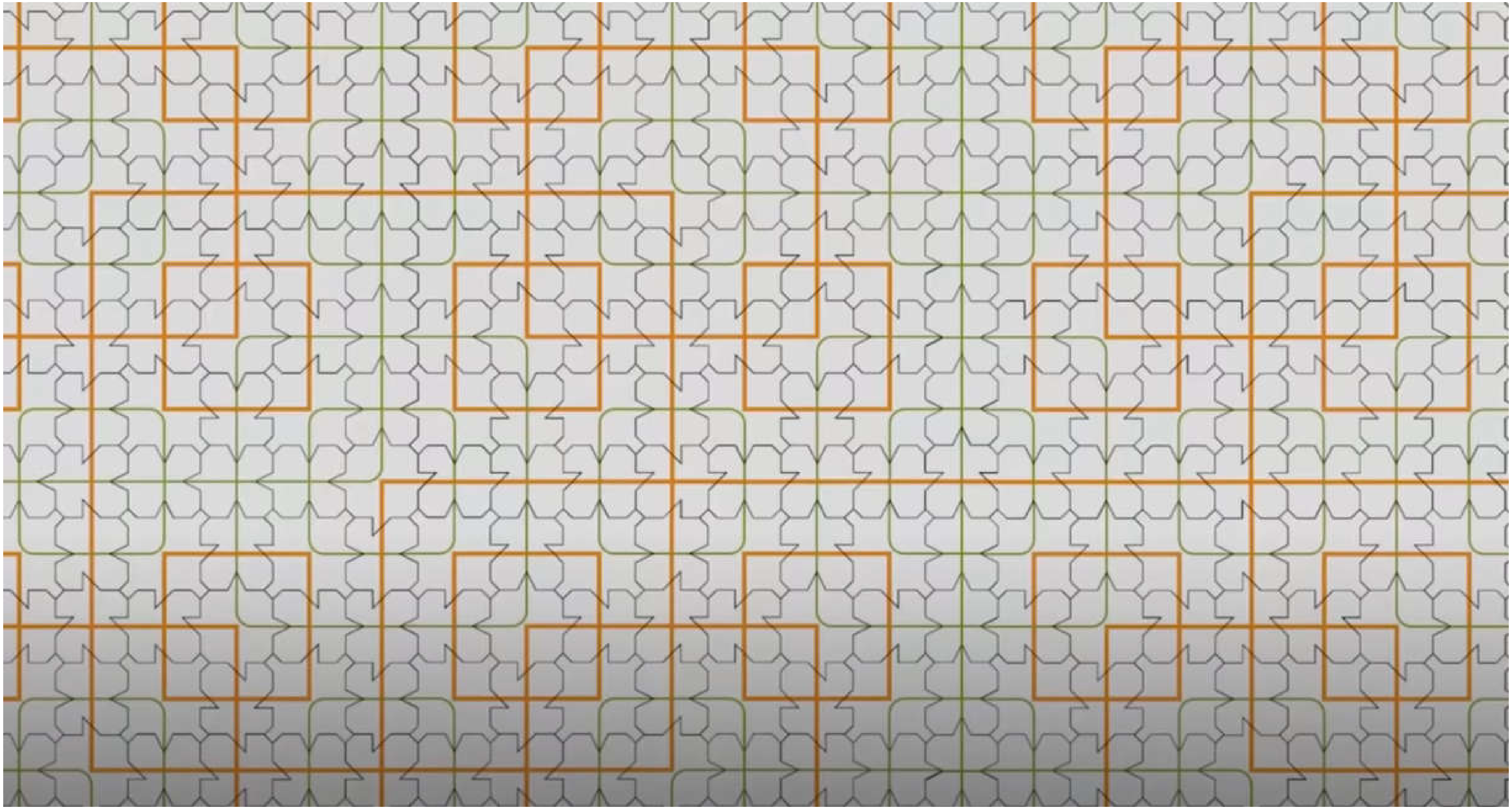


Rotations et réflexions permises !

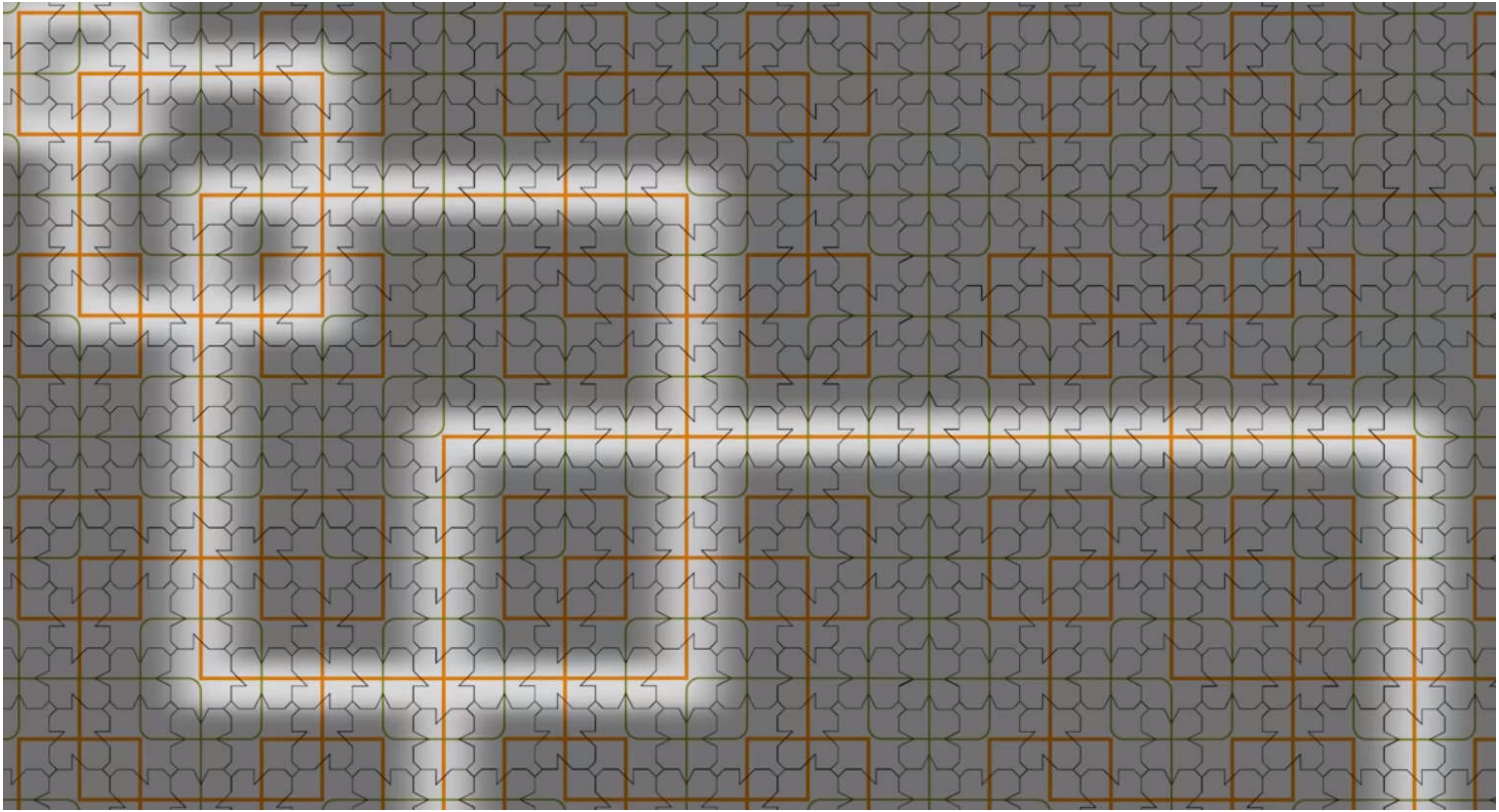


© Robinson, 1971

Un pavage possible

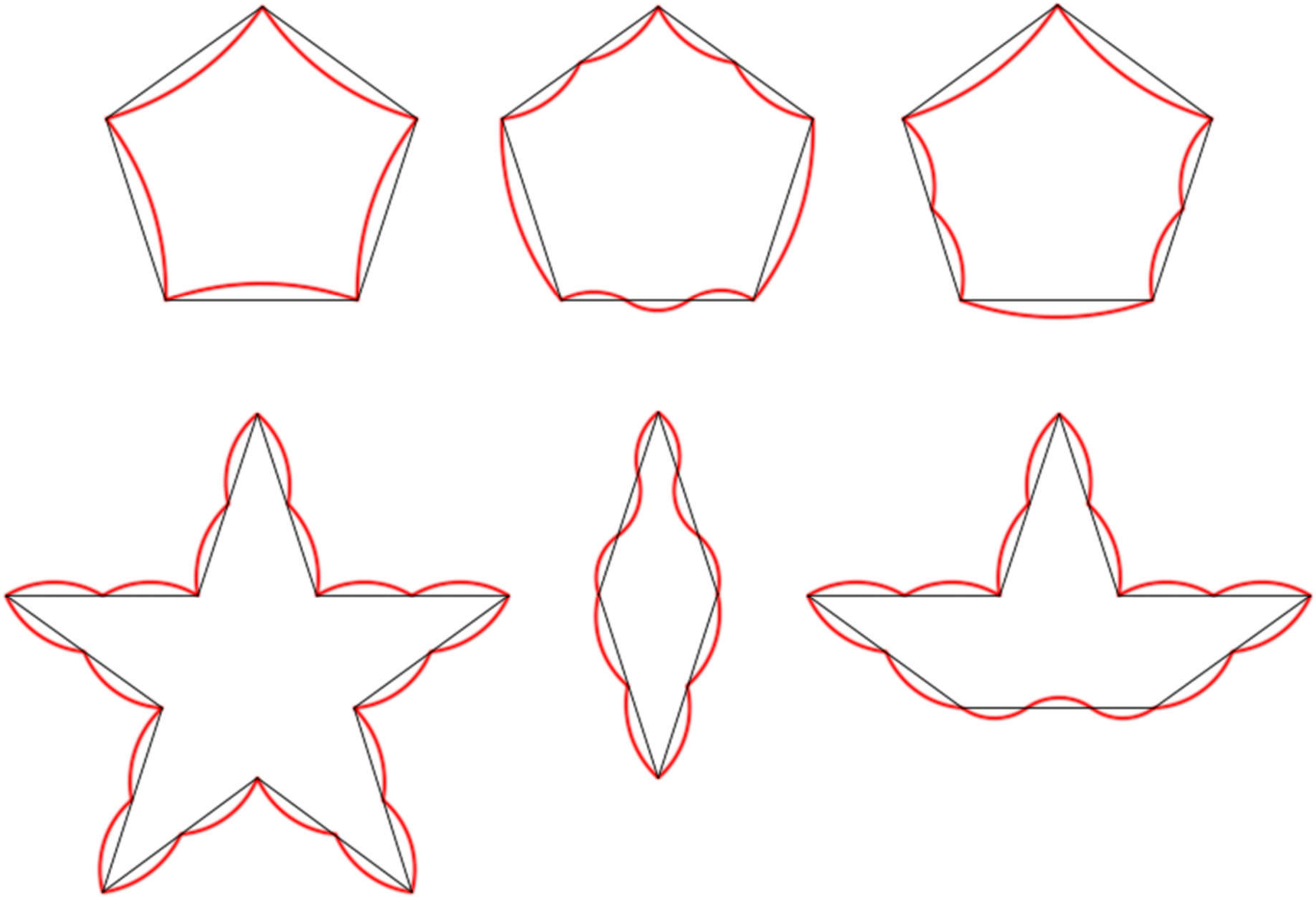


Une structure hiérarchique émerge

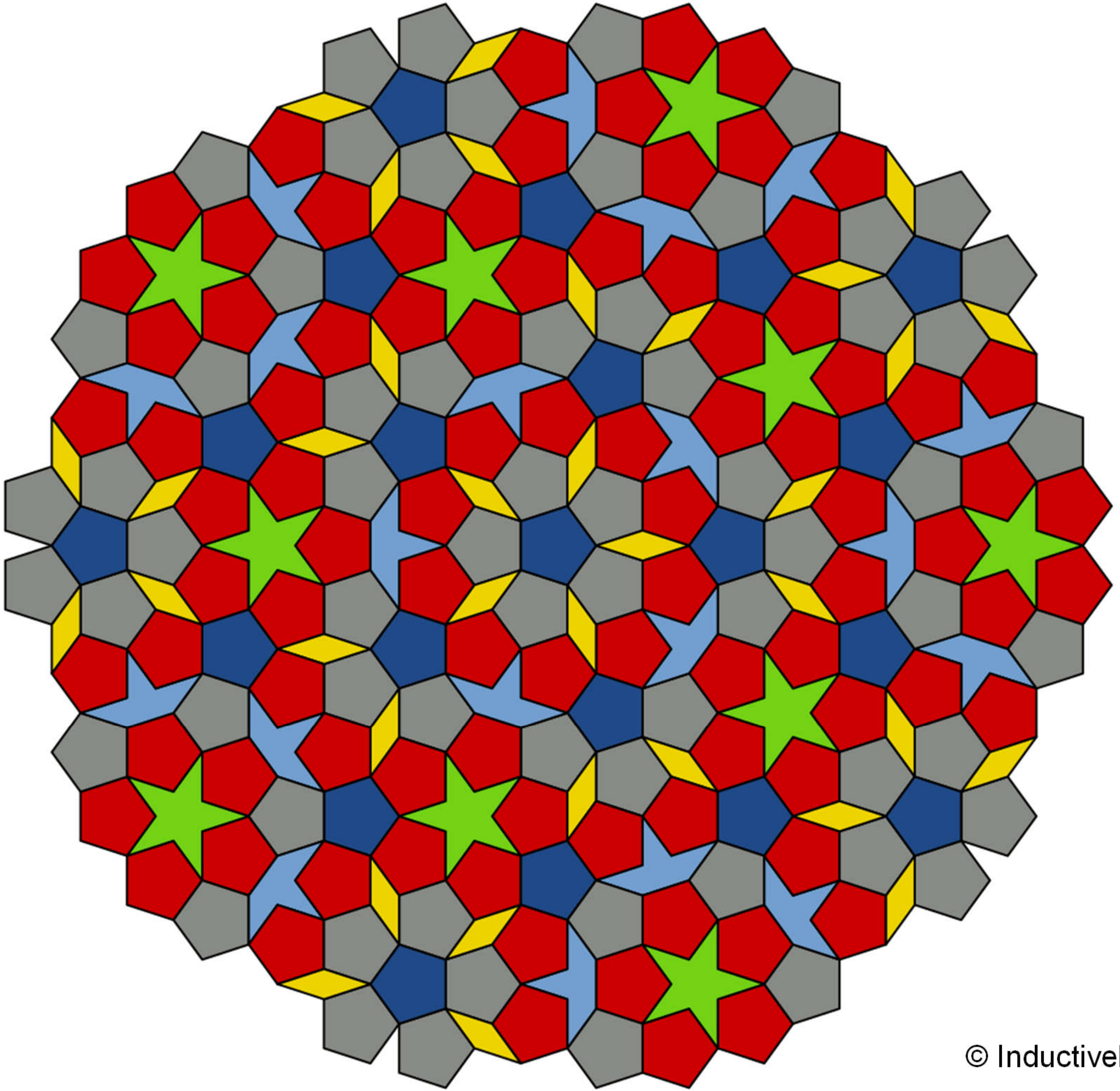


Les six tuiles de Penrose

1973 : Roger Penrose obtient 6 tuiles à partir de pentagones.



Un pavage correspondant



Deux tuiles… et ?

1974 : Roger Penrose réduit ses 6 tuiles à 3, puis à 2.
Première publication en 1977 par… Martin Gardner !

Un losange fin et un losange gras (avec règles d'assemblage) ;
un cerf-volant et une flèche (avec règles d'assemblage).

Problème « ein Stein »

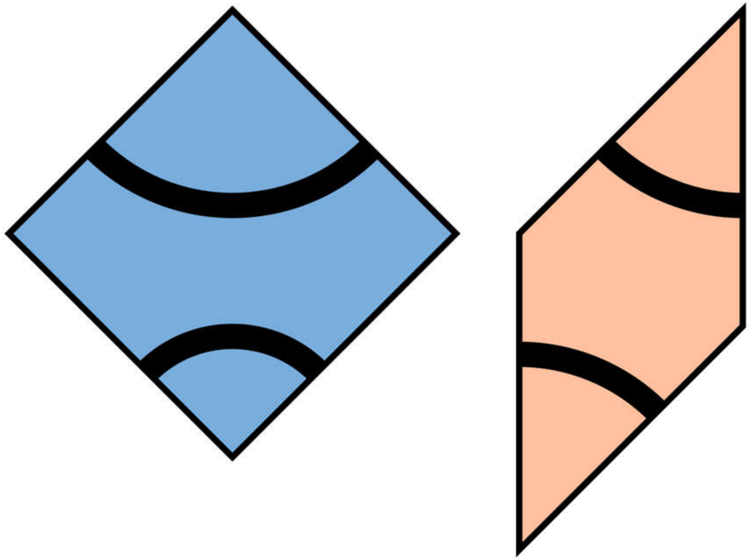
Existe-t-il une *monotuile apériodique* (une forme, idéalement un polygone, qui pave tout le plan <u>et</u> qui ne pave le plan **que de manière apériodique**) ?

Roger Penrose pense depuis toujours qu'une telle tuile (*Stein* en allemand) pourrait bien exister…

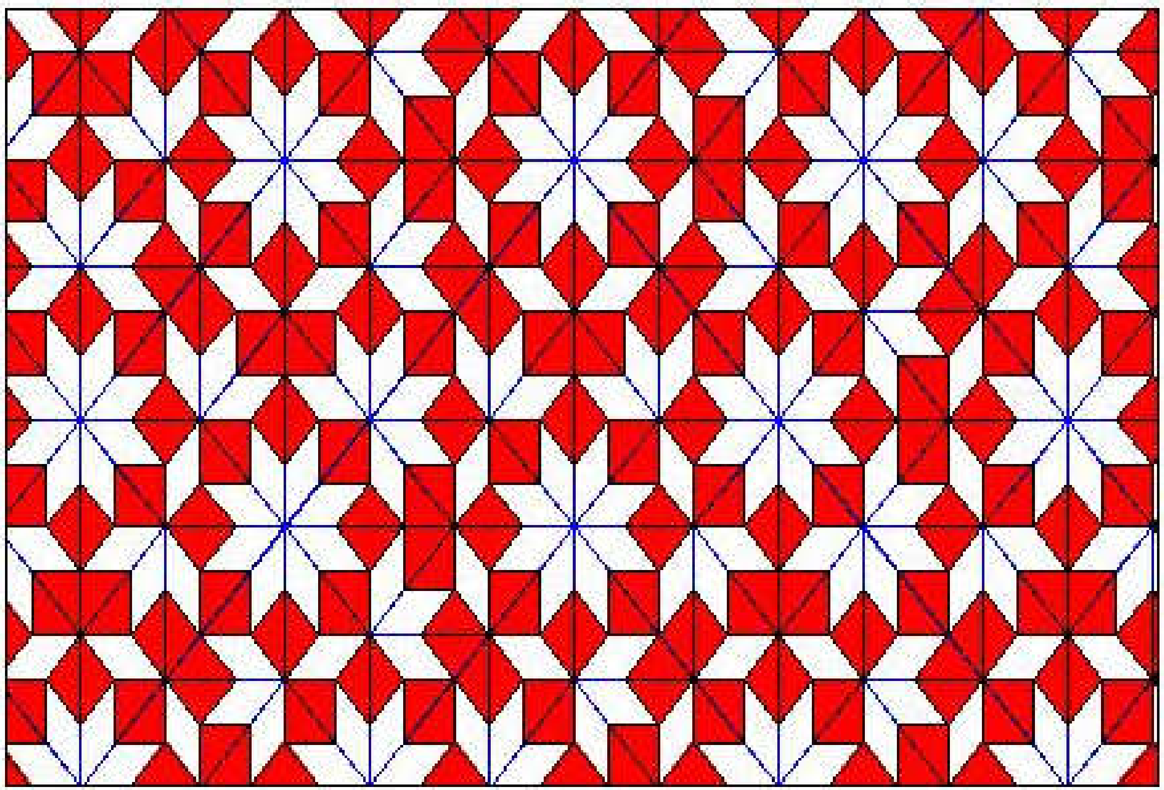
Sir Roger Penrose (né en 1931)

L’annonce d’Ammann

1976 : Robert Ammann (1946–1994) redécouvre les pavages de Penrose avec les deux losanges. Ils sont quasi-périodiques (ces pavages sont tous *mutuellement localement dérivables*).



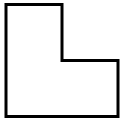
© Huacayacauh, 2022



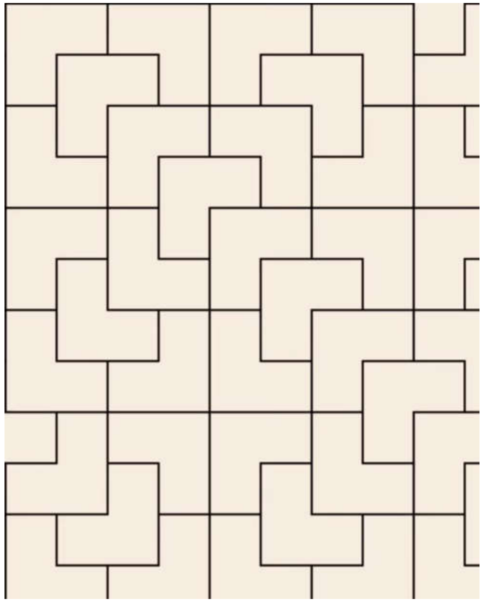
© Ael 2, 2006

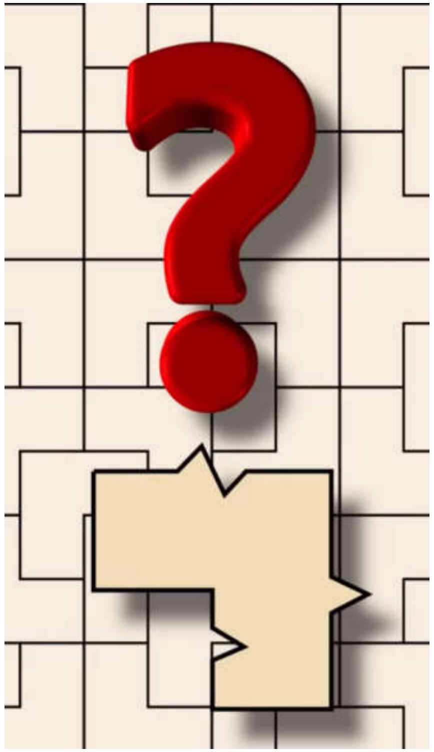
Avec des équerres

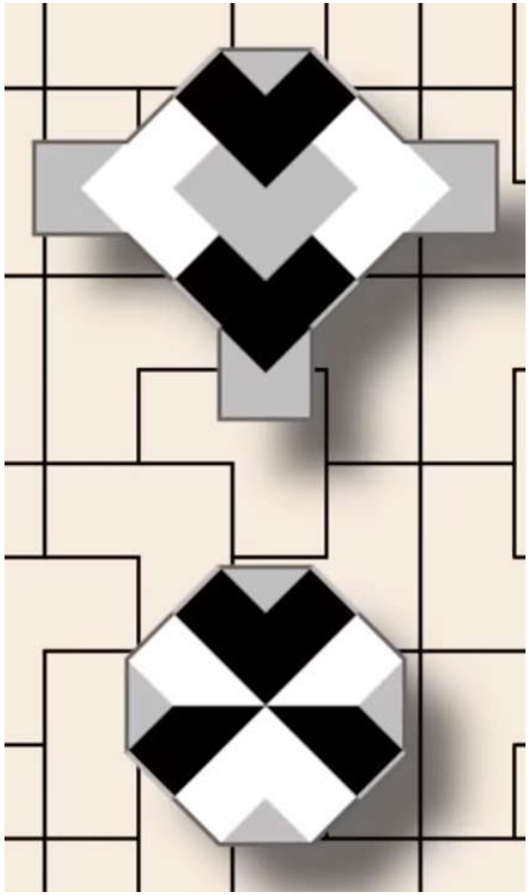
Pavage apériodique possible avec des équerres.



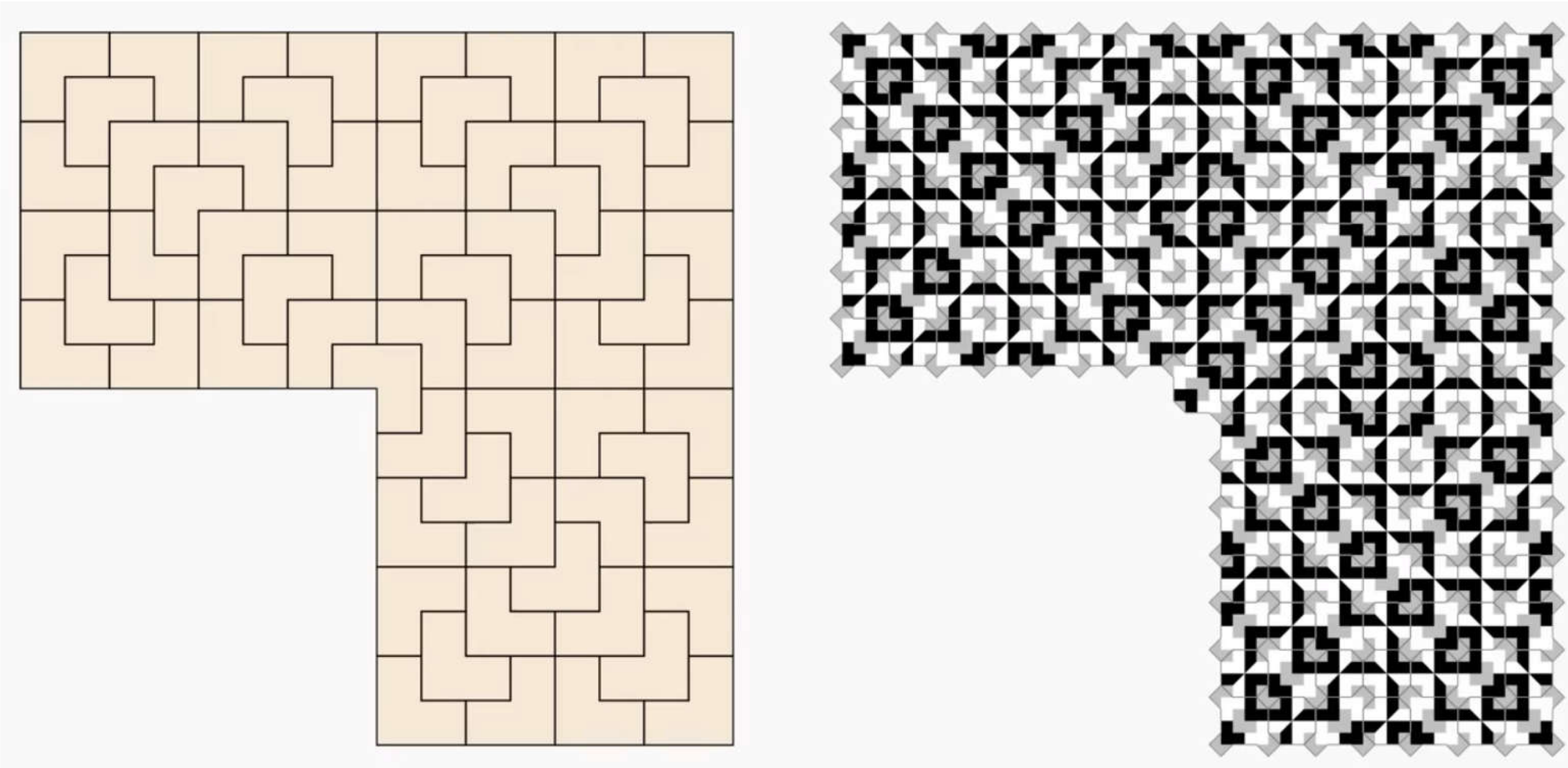
Les règles d'assemblage pour interdire tout pavage périodique conduisent à deux tuiles : le trilobite et le crabe !



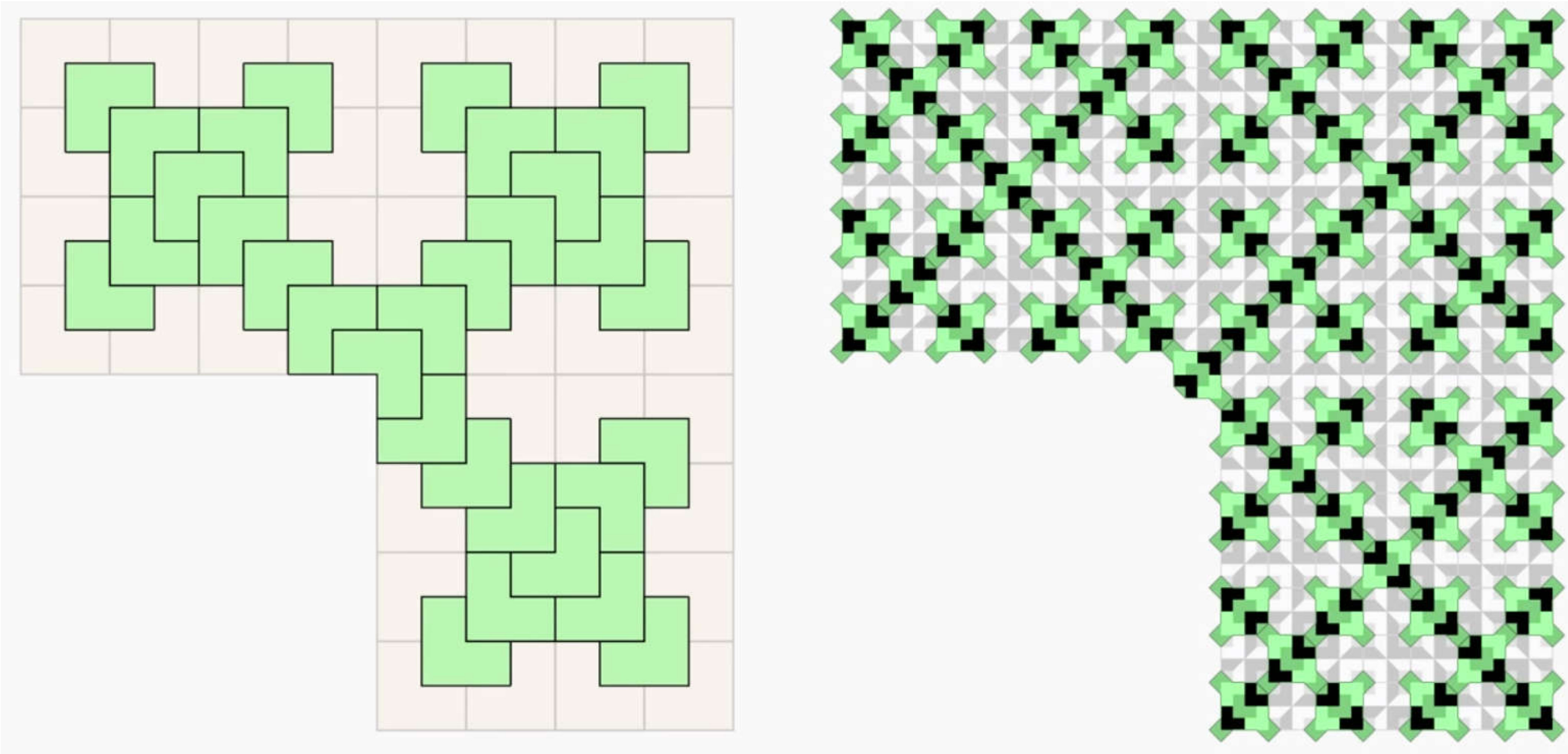




Pavage local (trilobite et crabe)

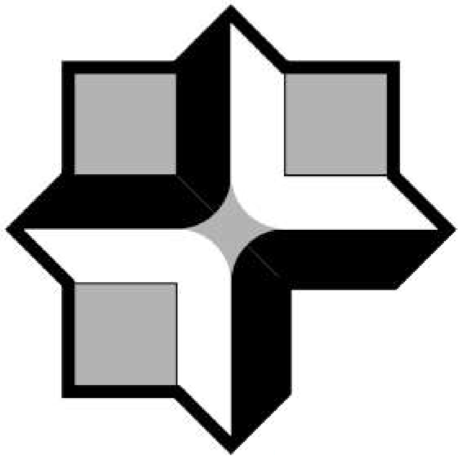


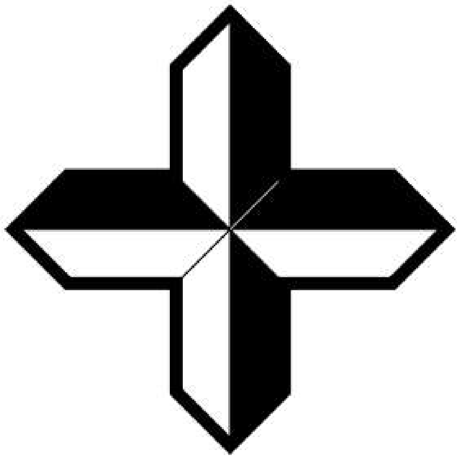
La même structure !

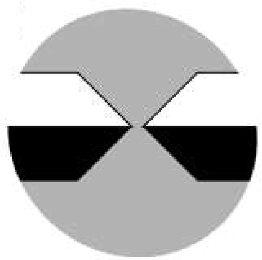


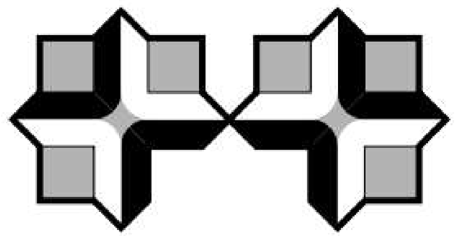
Le trilobite et la croix

1999 : nouvel ensemble apériodique de 2 tuiles, par Chaim Goodman-Strauss (le trilobite, la croix, une règle d’assemblage).

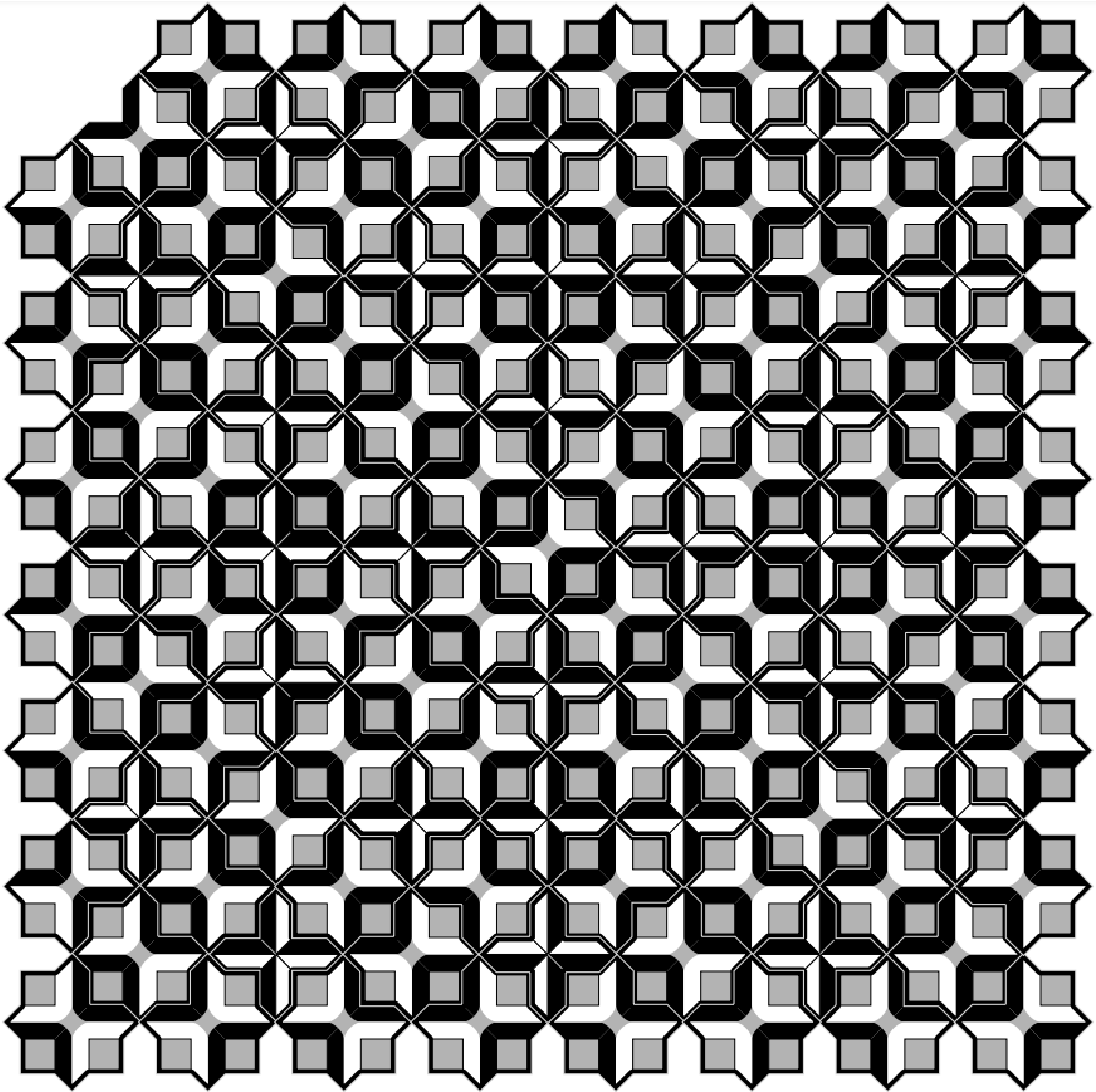








Pavage du plan (trilobite et croix)



La tuile de Socolar–Taylor

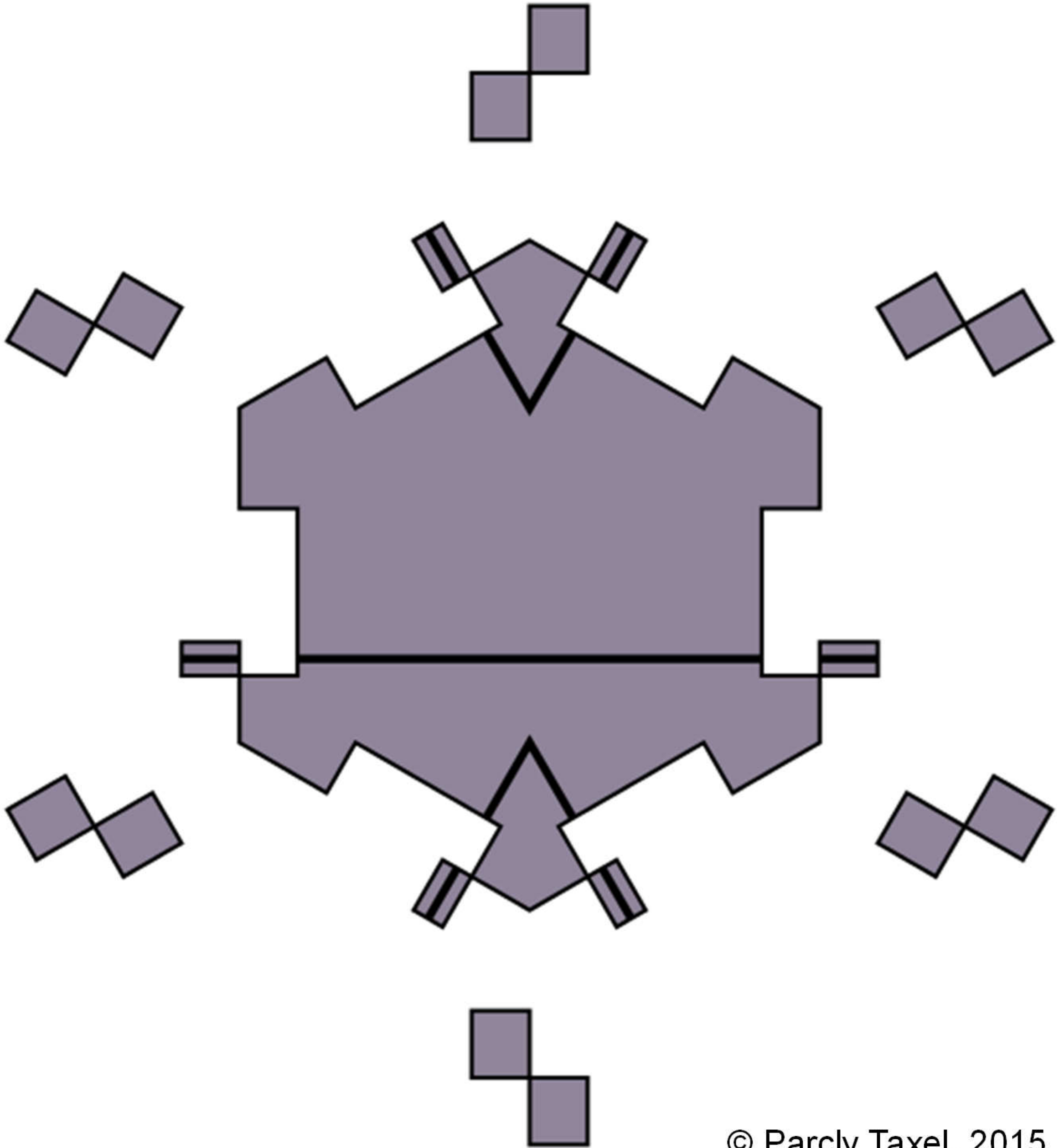
Due à Joshua Socolar
et Joan Taylor (2010)

Construite à partir
d'un hexagone régulier

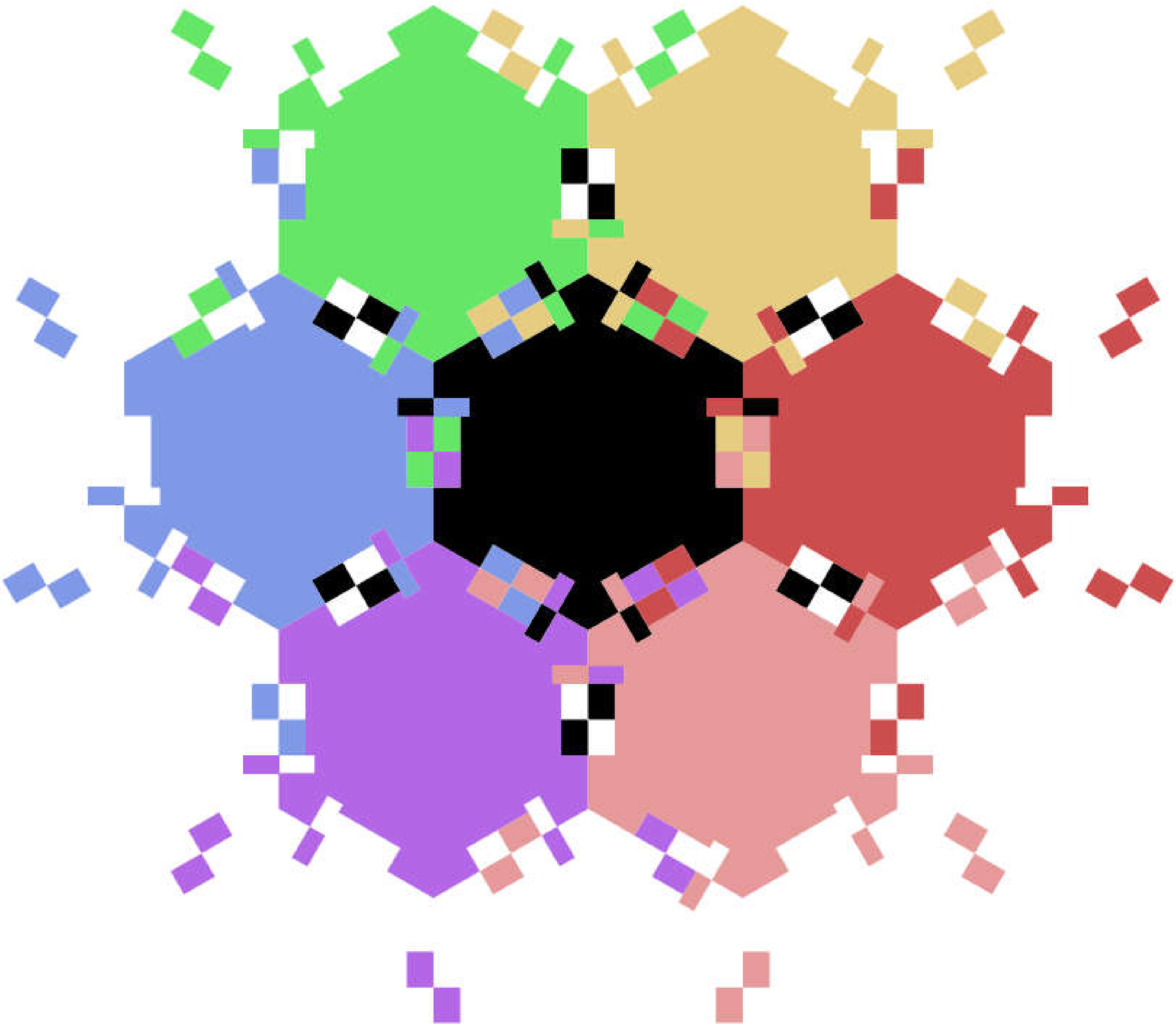
Deux règles
d'assemblage

Répond au problème
« ein Stein »

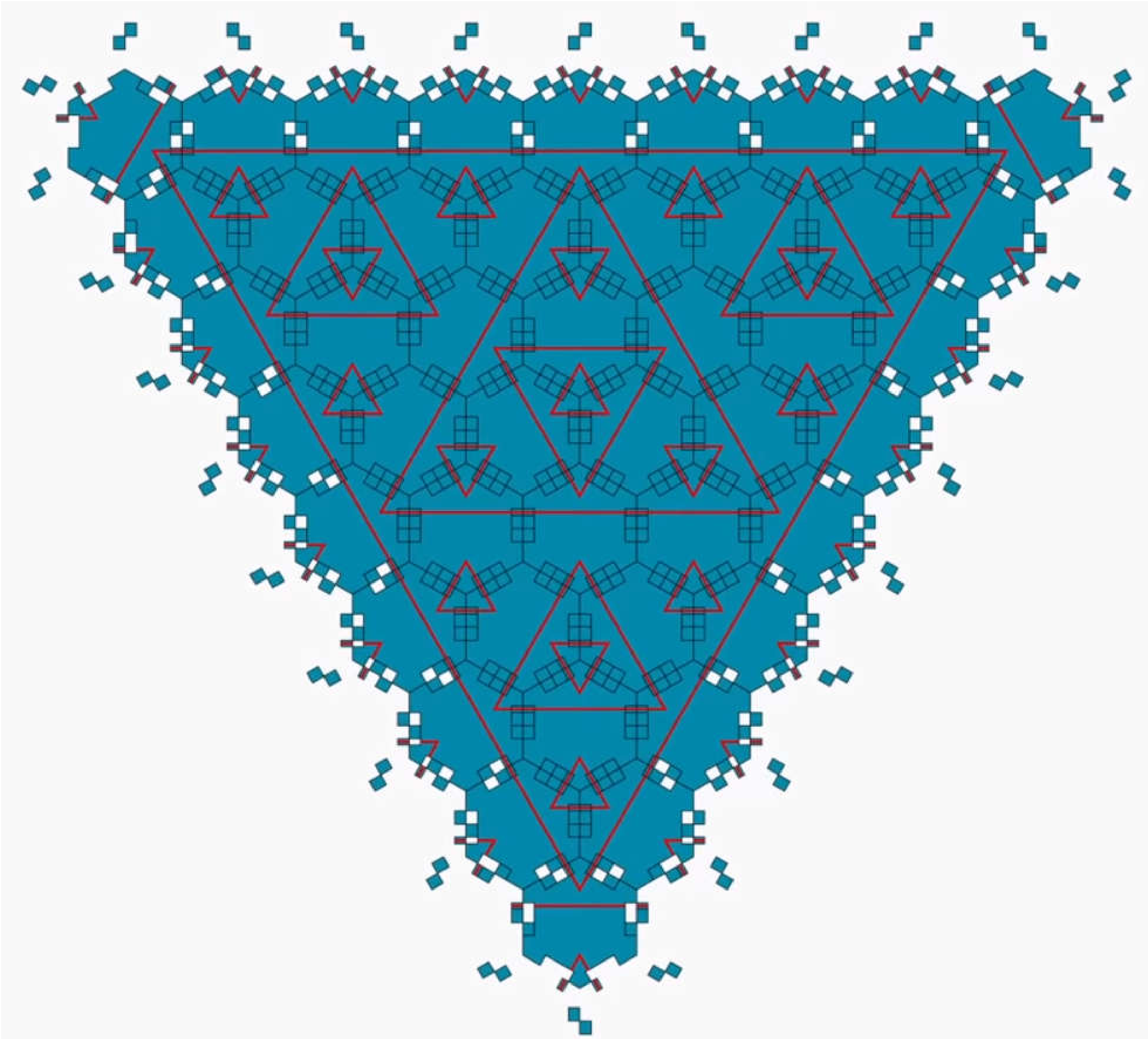
Forme non connexe !



Pavage de Socolar–Taylor



Structure : triangles de Sierpinski

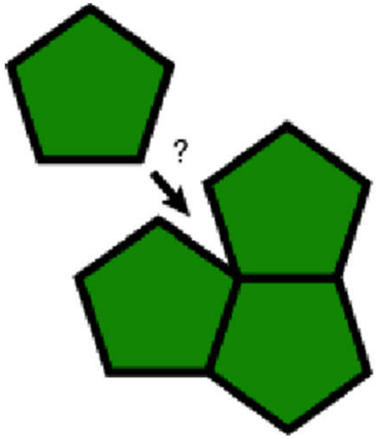


D’autres contributions

Hans Läuchli ;
Bruno Poizat ;
Marjorie Rice et Doris Schattschneider ;
Branko Grunbaum et Geoffrey Shephard ;
Stav Olav Aanderaa et Harry Lewis ;
Jarkko Kari ;
Shahar Mozes ;
Karel Culik II ;
Marjorie Senechal ;
Ludwig Danzer ;
Panagiotis Papasoglu ;
Ville Lukkarilla ;
Bruno Durand, Leonid Levin et Alexander Shen ;
Nicolas Ollinger ;
Andrei Romashchenko ;
Emmanuel Jeandel et Michaël Rao…

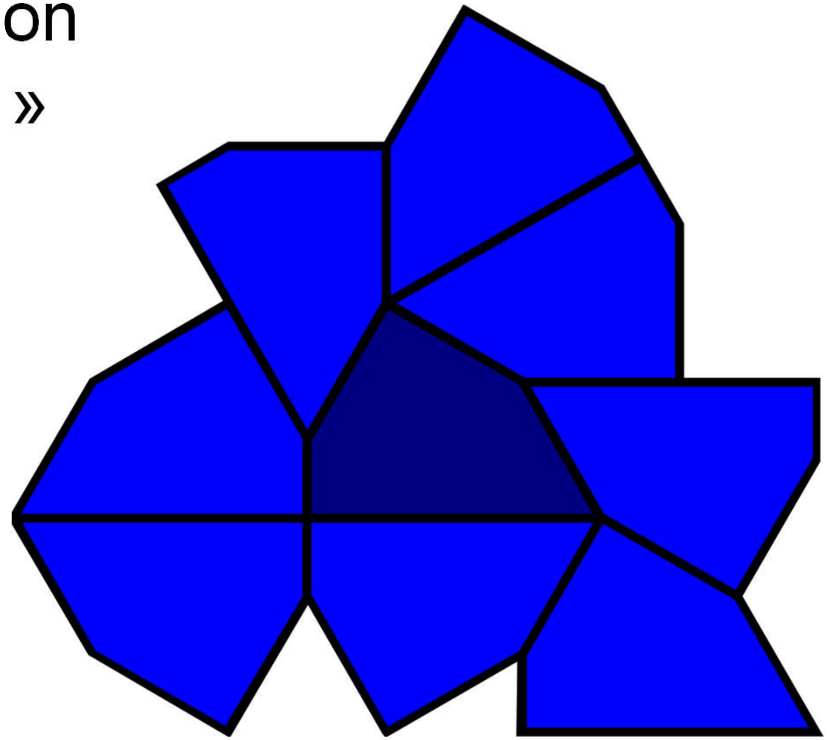
Des tuiles
« plus ou moins “pavantes” » :
le nombre de Heesch

Quantifier le côté « non pavant »

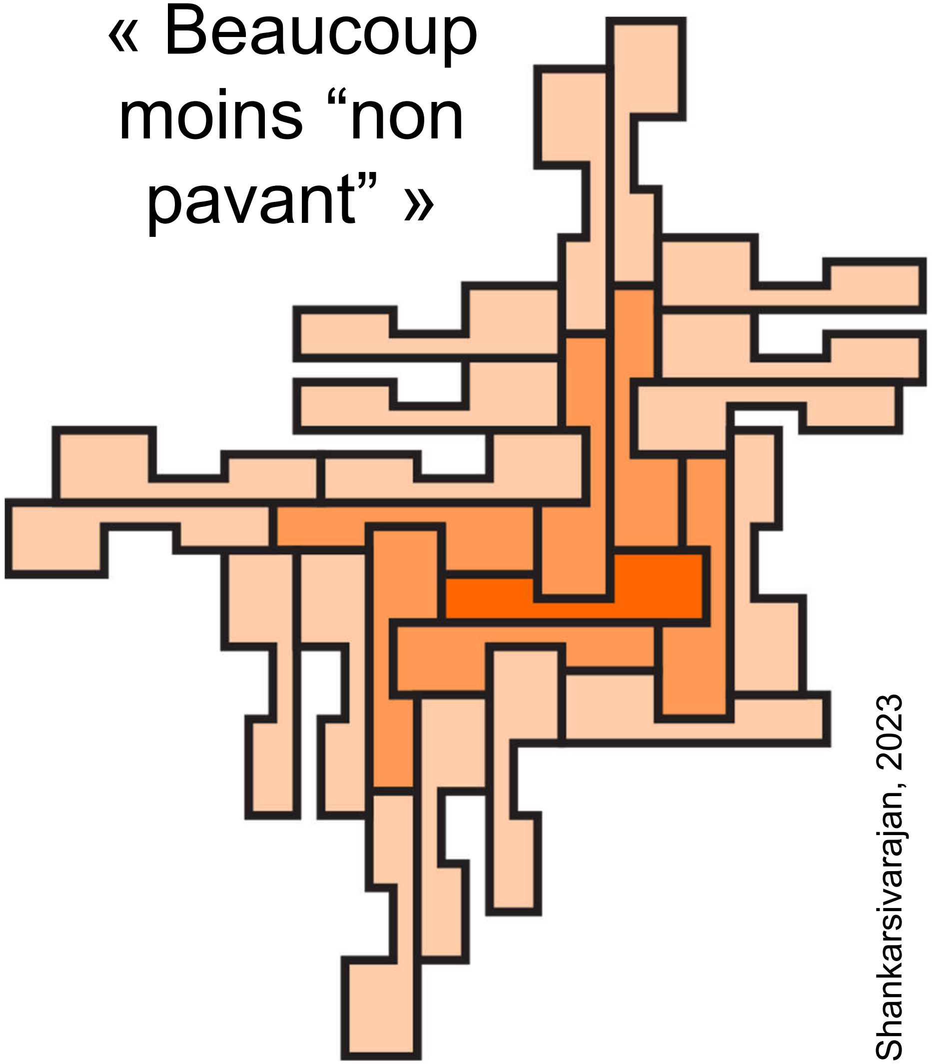


« Très “non pavant” »

« Un peu moins “non pavant” »

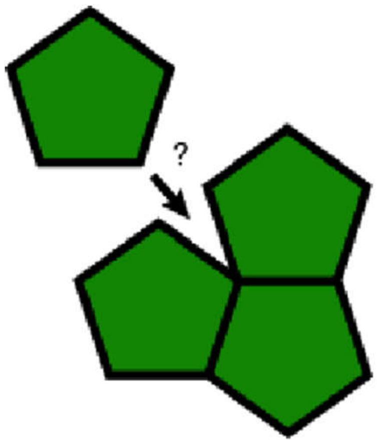


« Beaucoup moins “non pavant” »

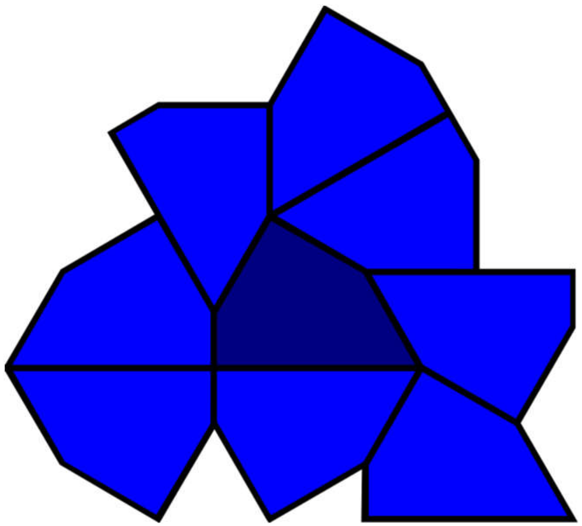


Le nombre de Heesch d'une tuile

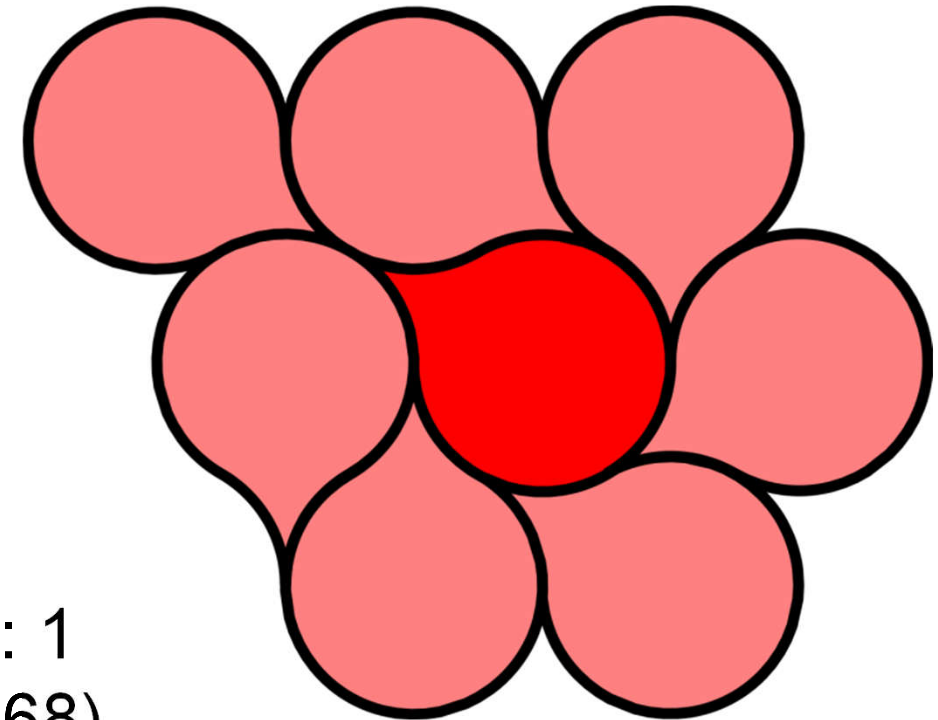
Nombre maximal de couches successives que l'on peut constituer à partir de copies d'une même tuile, sans laisser de vide, sans superposer deux tuiles.



Nombre de Heesch : 0

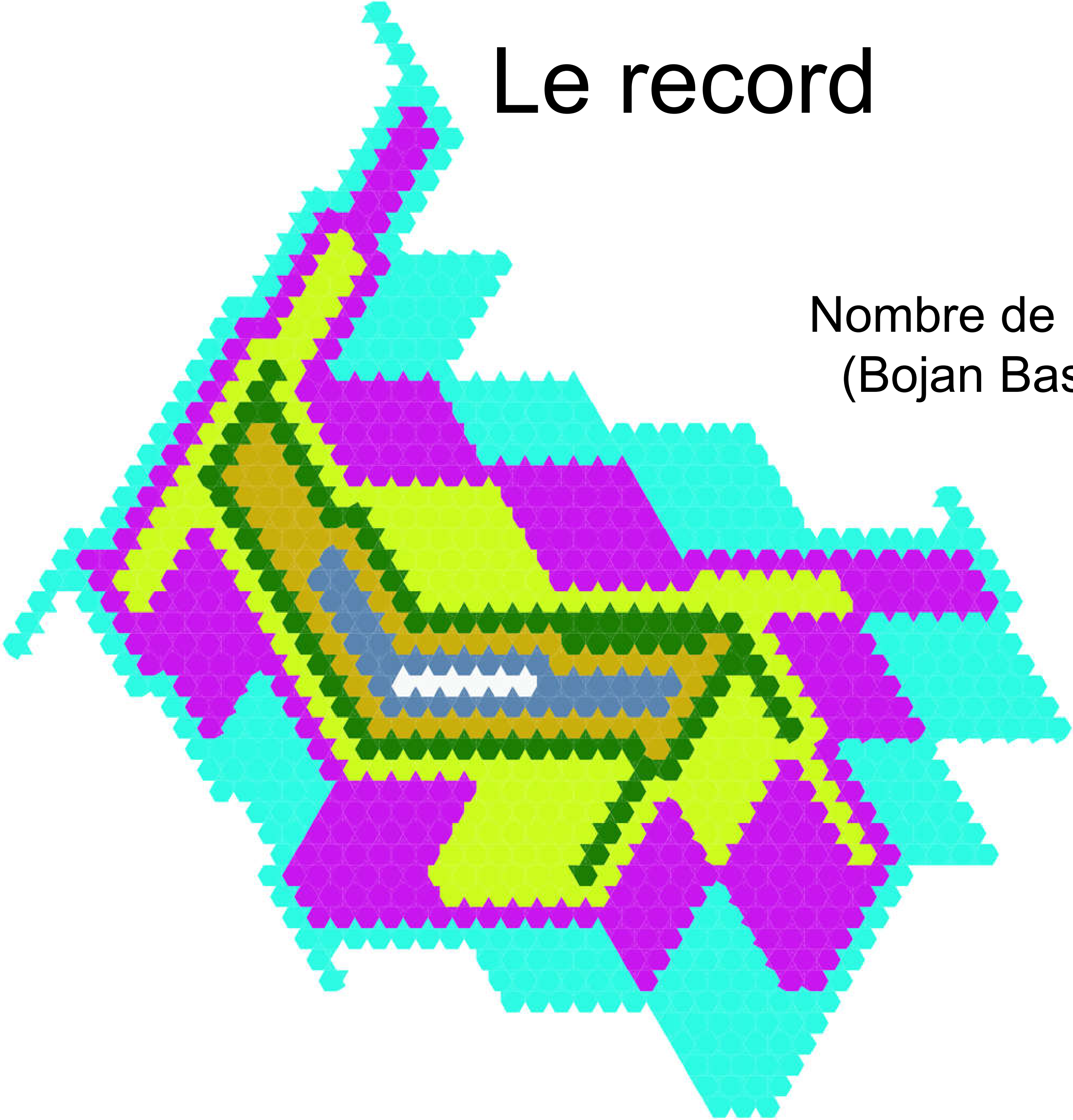


Nombre de Heesch : 1
(Heinrich Heesch, 1968)



Nombre de Heesch : 1
(Walther Lietzmann, 1928)

Le record



Nombre de Heesch : 6
(Bojan Basic, 2020)

La conjecture de Heesch

Nombre de Heesch « faible » : tuile « loin d'être "pavante" ».
Nombre de Heesch « nul » : on ne peut même pas commencer !

Nombre de Heesch « grand » : tuile « pas loin d'être "pavante" ».
Nombre de Heesch « infini » : tuile "pavante".

Conjecture : pour tout entier n, il existe une tuile dont le nombre de Heesch est exactement égal à n.
(Vrai pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.)

Construire
des pavages apériodiques :

méthode par coupe et projection,

méthode par inflation et substitution,

structure hiérarchique unique

Paver une droite

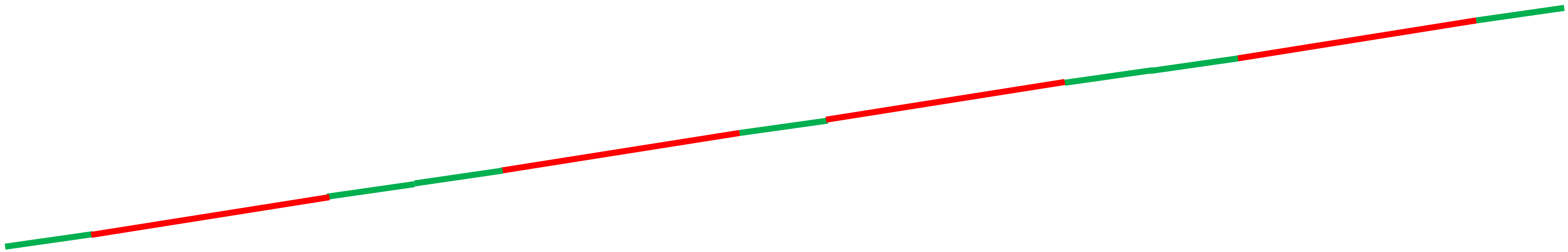
On souhaite paver une droite
avec des segments, de manière apériodique.

Avec un seul segment, c'est impossible.

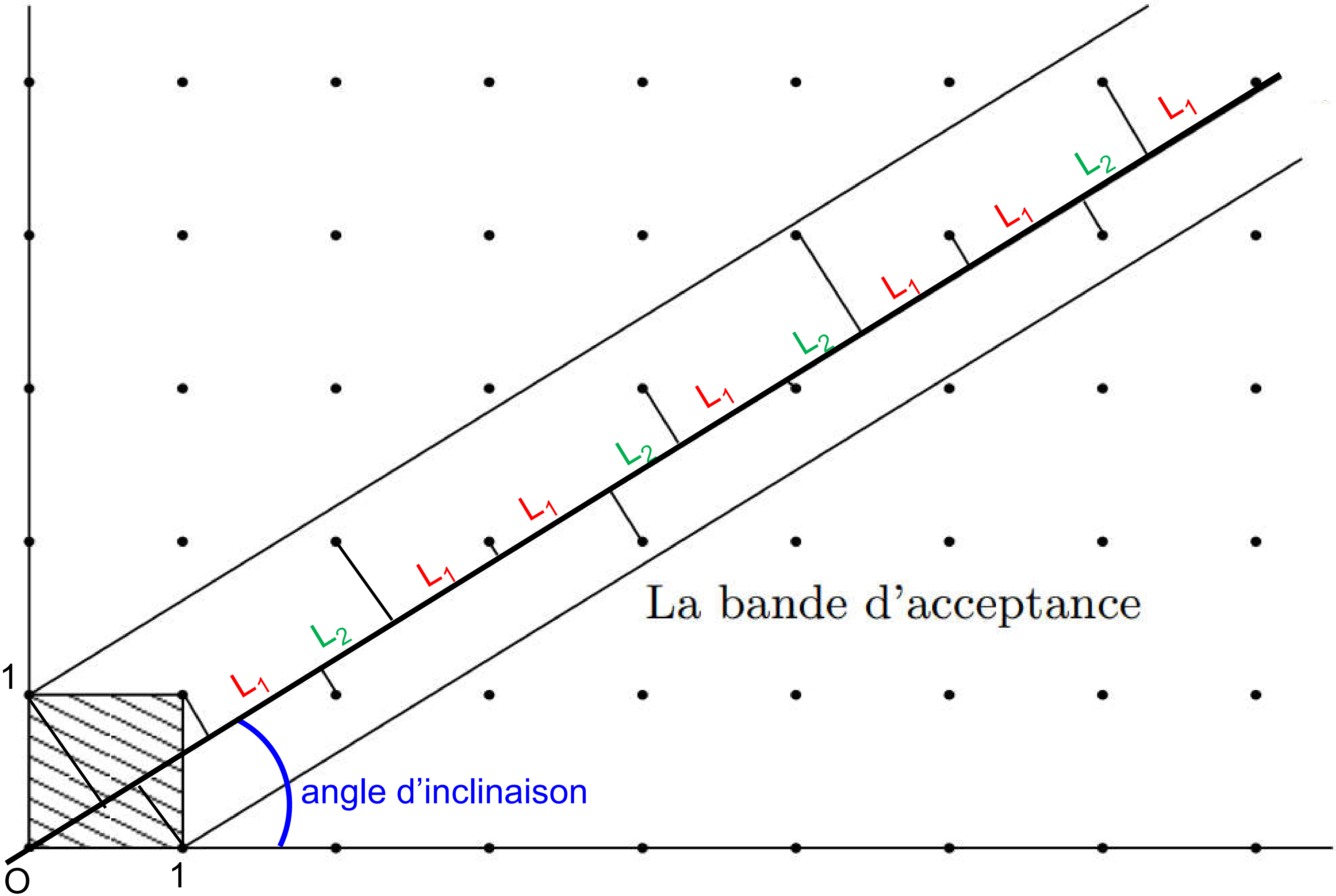
Une solution : prendre (des copies de) **deux** segments,
de longueurs différents L_1 et L_2
et concaténer ces segments de manière apériodique !

On obtient alors une suite apériodique de nombres :

$$\ldots L_2, L_1, L_2, L_2, L_1, L_2, L_1, L_2, L_2, L_1, L_2 \ldots$$



Construction géométrique



Une jolie équivalence

Le pavage de la droite est apériodique si, et seulement si, la tangente de l'angle d'inclinaison est irrationnelle.

Même si, sur la droite, la suite des longueurs des segments est apériodique, le plan dans lequel vit la droite est structuré de manière extrêmement régulière !

C'est l'essence de **la méthode coupe et projection** :

- se placer dans un espace muni d'un réseau « régulier » ;
- y placer la surface à paver (le plan) ;
- prendre une « tranche » de cet espace (couper « selon un angle irrationnel » et projeter sur un sous-espace vectoriel de dimension strictement inférieure).

Méthode introduite par Nicolaas Govert de Bruijn (1918–2012).

Un nouveau point de vue

Les pavages d’Ammann et de Penrose peuvent s’obtenir par coupe et projection. Ils sont *de facto* apériodiques et héritent de propriétés de symétrie locale du réseau dont ils sont issus.

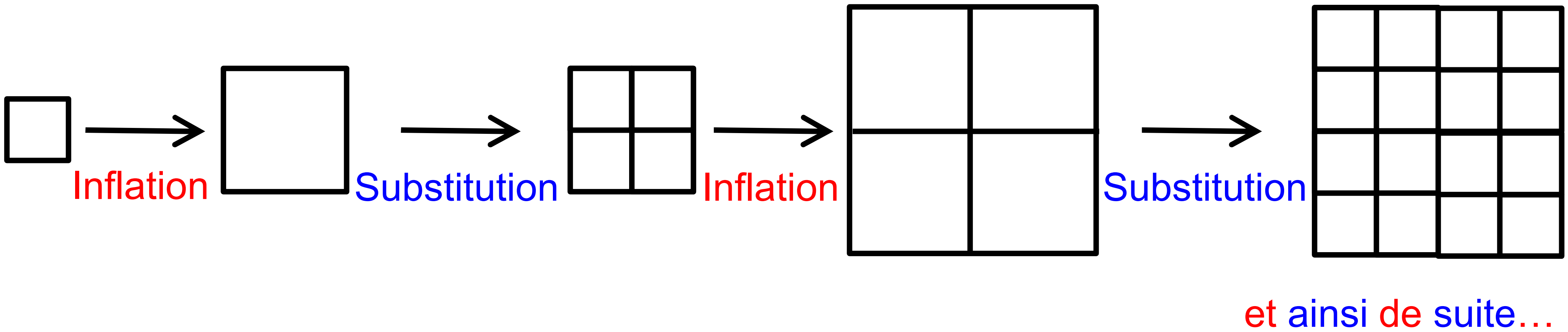
Les pavages de Penrose sont obtenus par la méthode coupe et projection sur un plan à partir de l’espace euclidien à cinq dimensions.

Au début des années 1980, les pavages apériodiques sortent du cadre des mathématiques récréatives (et autres curiosités) :

- méthode coupe et projection (1981) ;
- travaux sur les quasi-cristaux (1982). Daniel Shechtman (né en 1941) reçoit le prix Nobel de chimie en 2011 ;
- méthode par inflation et substitution (Martine Queffelec, 1987).

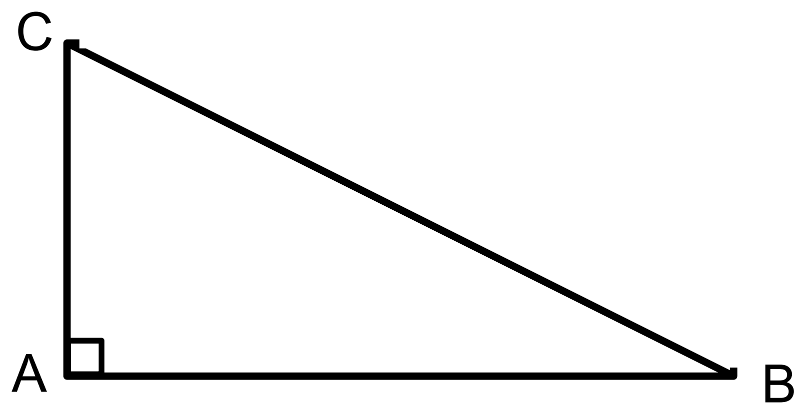
Inflation et substitution

Une même forme se trouve reproduite plusieurs fois en elle-même, à plus petite échelle (*substitution*), comme dans une découpe géométrique (ou dissection). Une homothétie (*inflation*) permet de répéter la substitution sur chacune des formes.



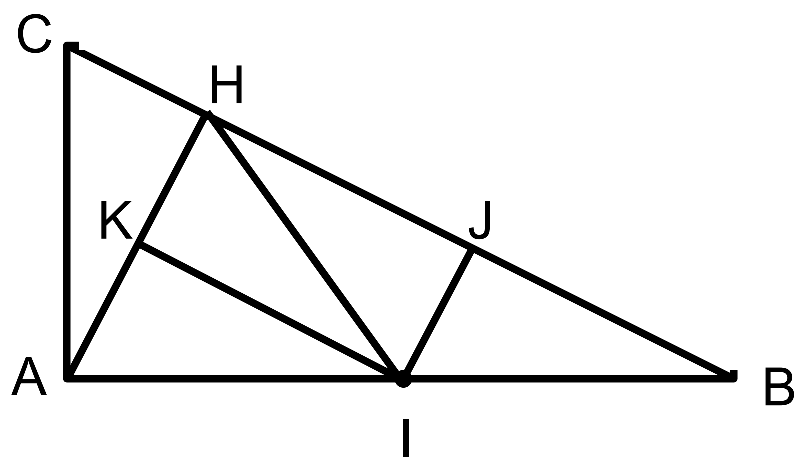
Peut conduire à des pavages présentant des régularités, mais non périodiques.

À partir d’un triangle



Le triangle ABC est rectangle en A,
et AC = AB / 2 (donc tan $\widehat{B}$ = 1/2).

On trace :
H pied de la hauteur issue de A,
I milieu de [AB],
(IK) parallèle à (BC),
(IJ) perpendiculaire à (BC).



Les cinq triangles HAC, KIA, KIH,
JHI et JBI sont <u>isométriques</u>
et tous <u>semblables à ABC</u>.

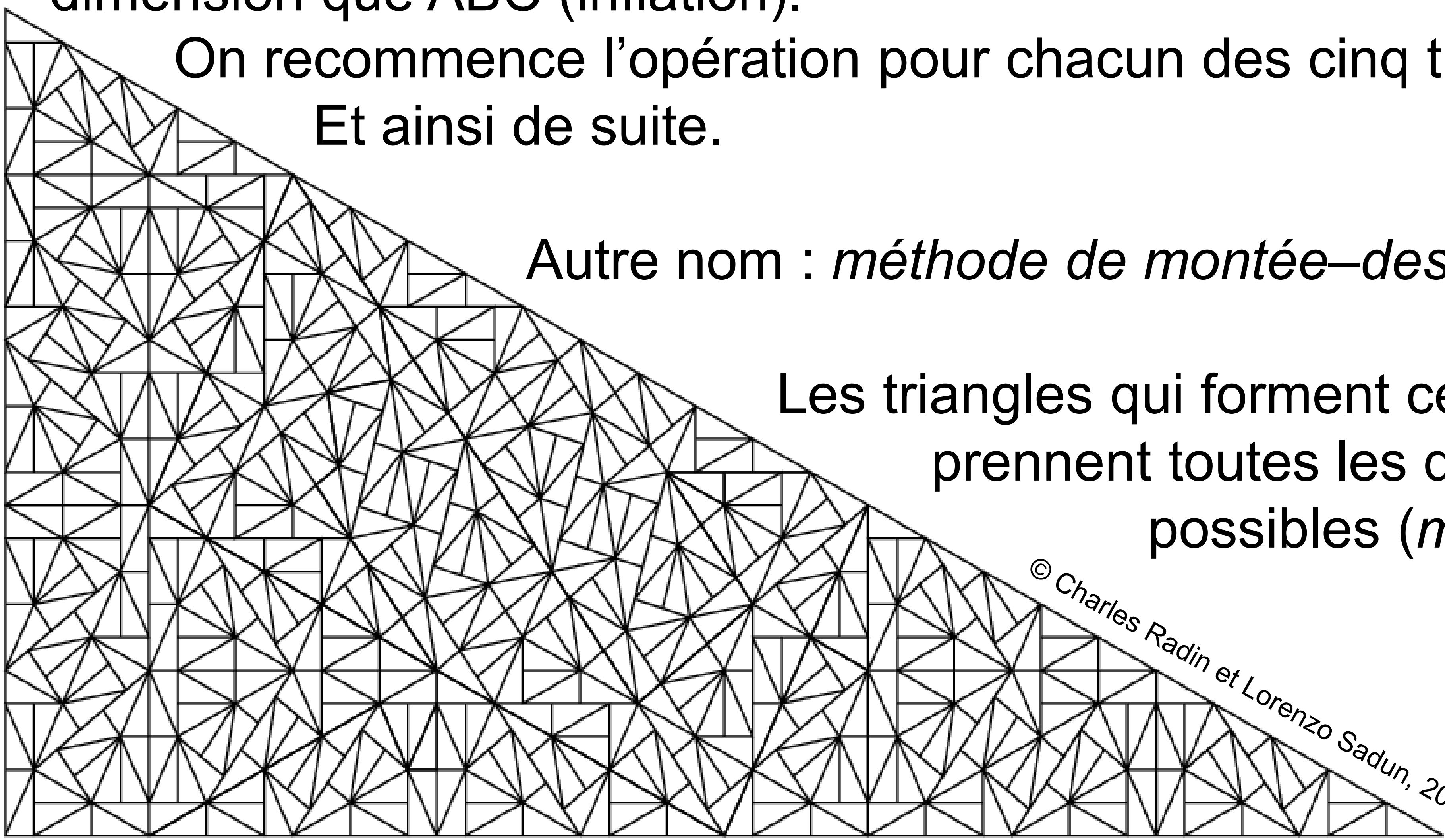
(Même orientation pour ABC, KIH et JHI ;
l’orientation des autres triangles est opposée.)

Le pavage moulinet

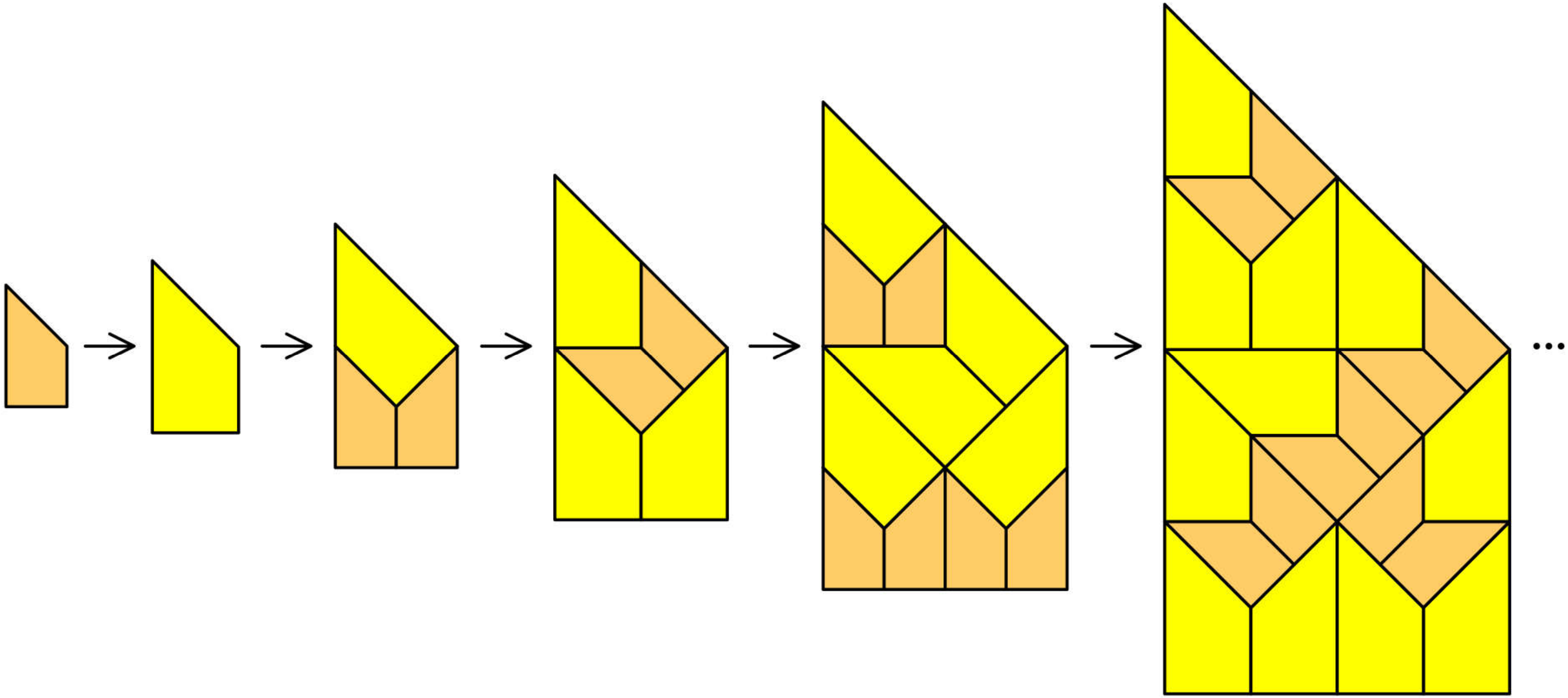
ABC est remplacé par cinq triangles « identiques » (substitution).
On grossit la figure de sorte que ces cinq triangles aient la même dimension que ABC (inflation).
On recommence l'opération pour chacun des cinq triangles.
Et ainsi de suite.

Autre nom : *méthode de montée–descente*.

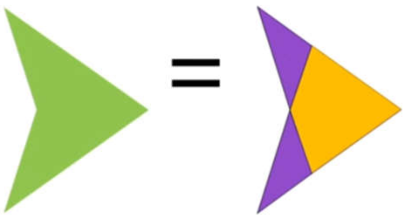
Les triangles qui forment ce pavage prennent toutes les directions possibles (*moulinet*).

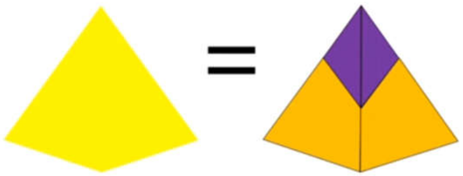


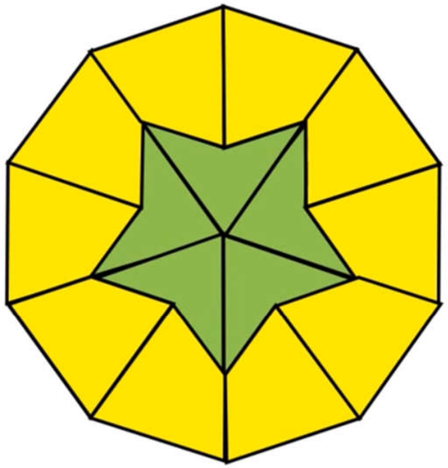
Des variations à l’infini

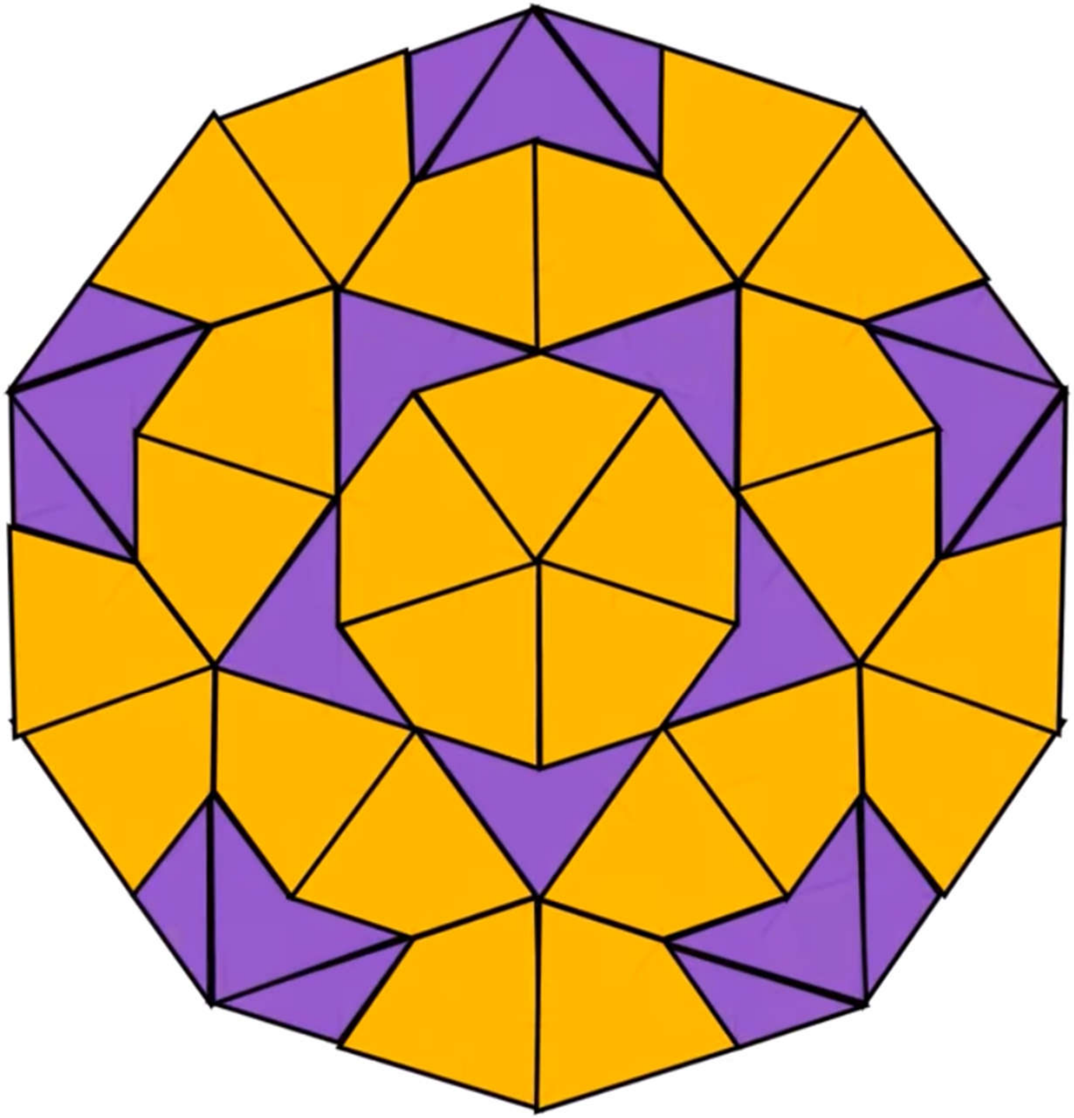


Avec le pavage de Penrose

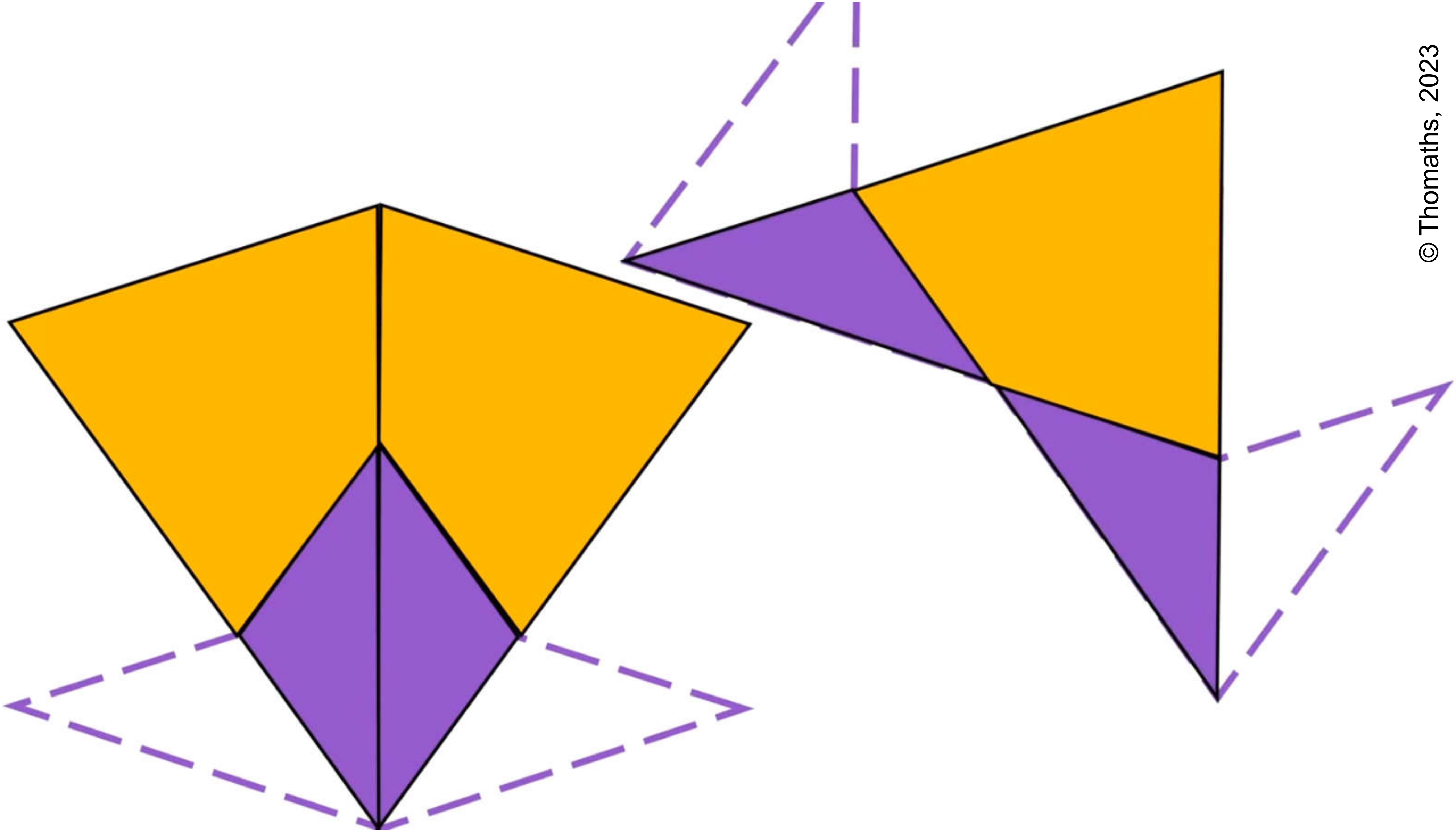






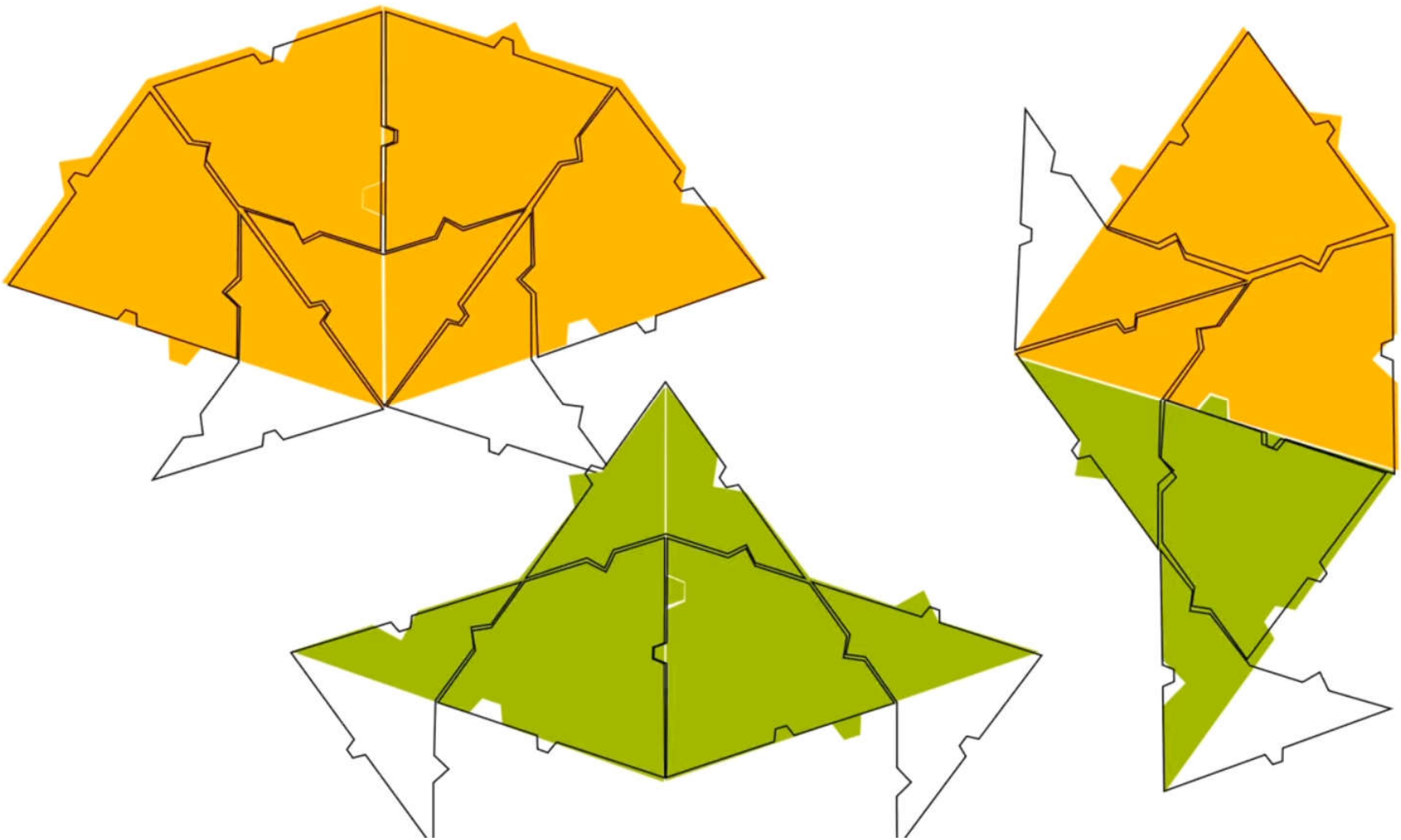


Pourquoi ça marche (1)



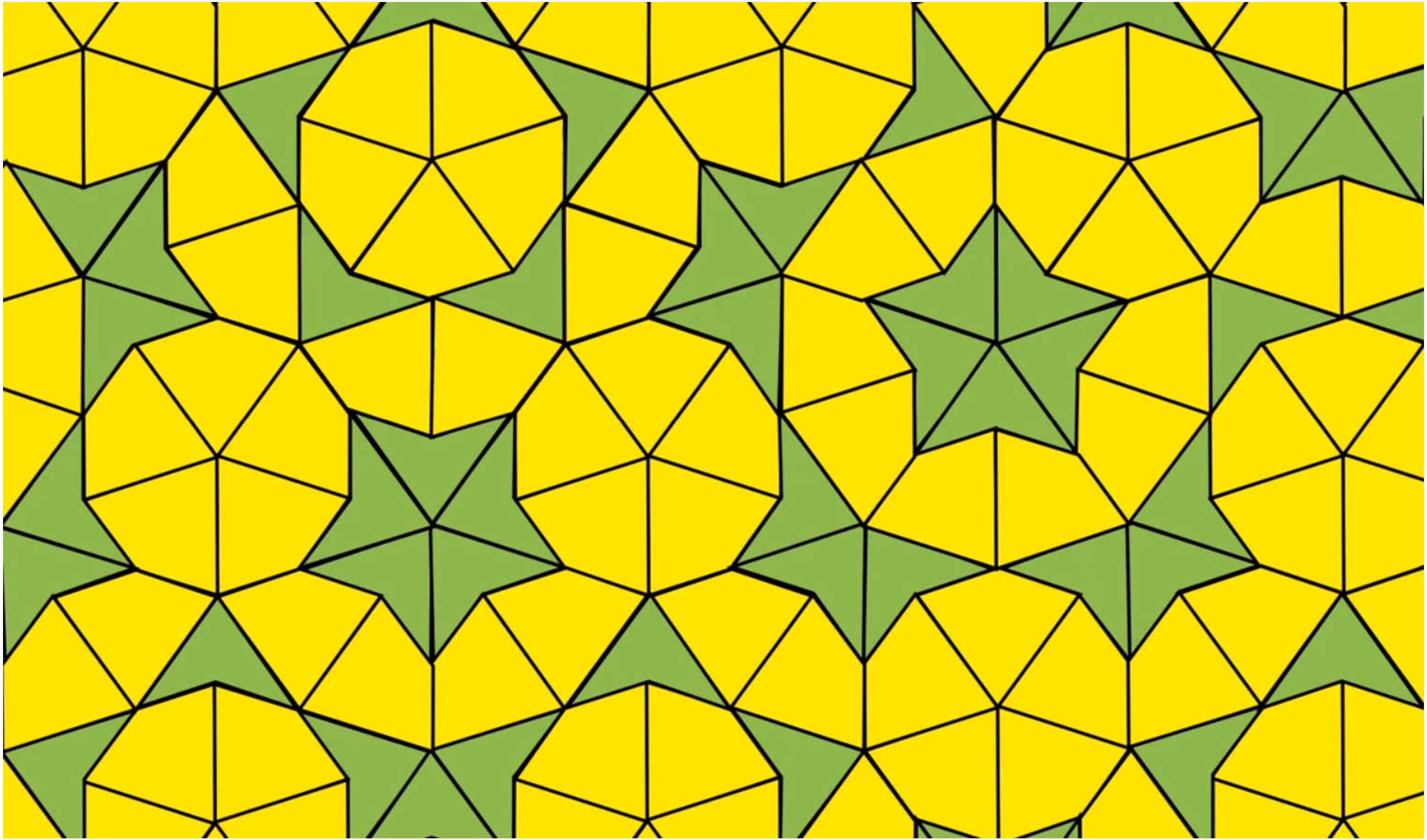
Chaque tuile se décompose en deux « petits » cerfs-volants (en jaune) et deux « petites » demi-flèches (en violet).

Pourquoi ça marche (2)

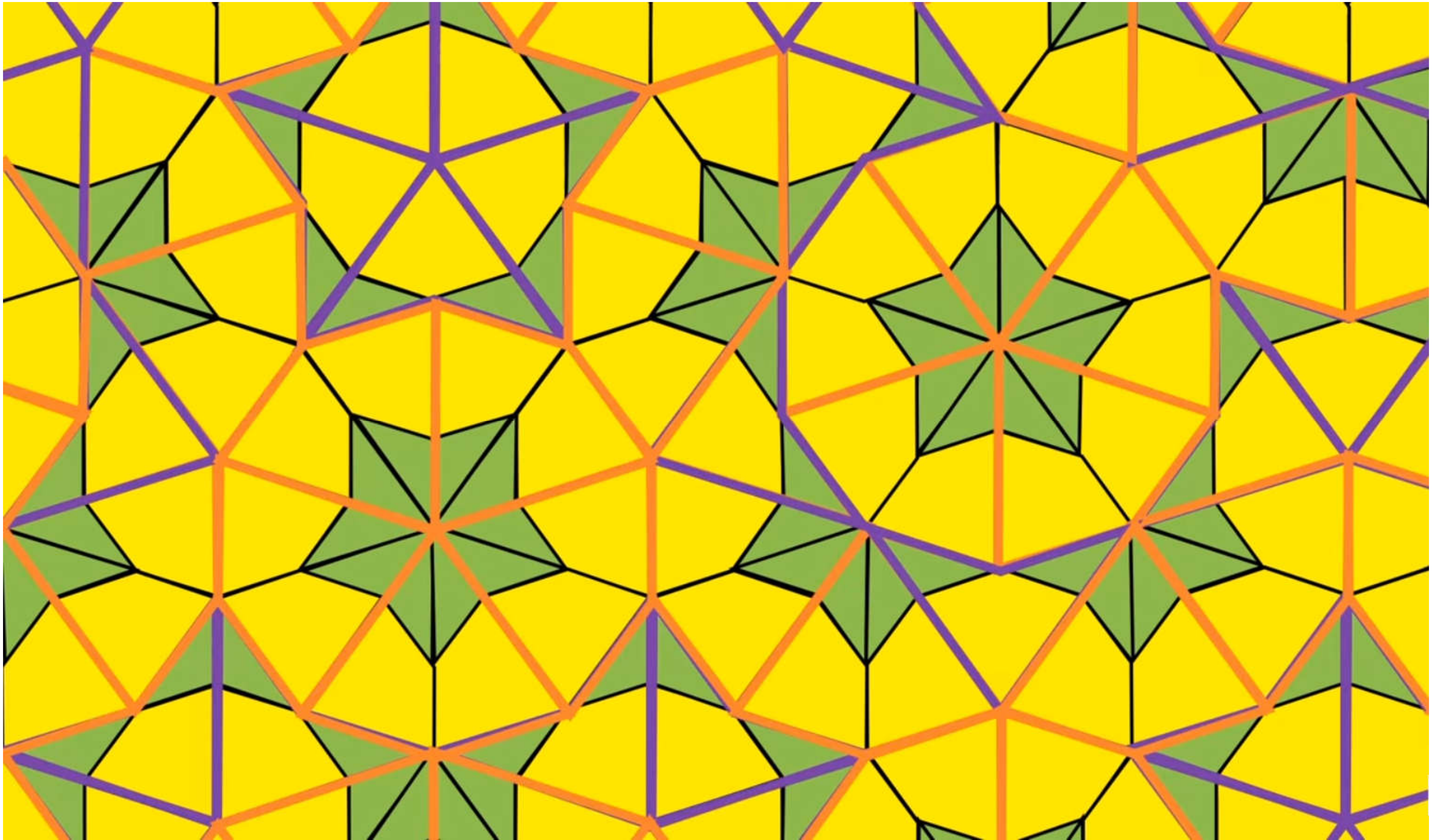


Rassembler les demi-flèches va imposer un pavage apériodique.

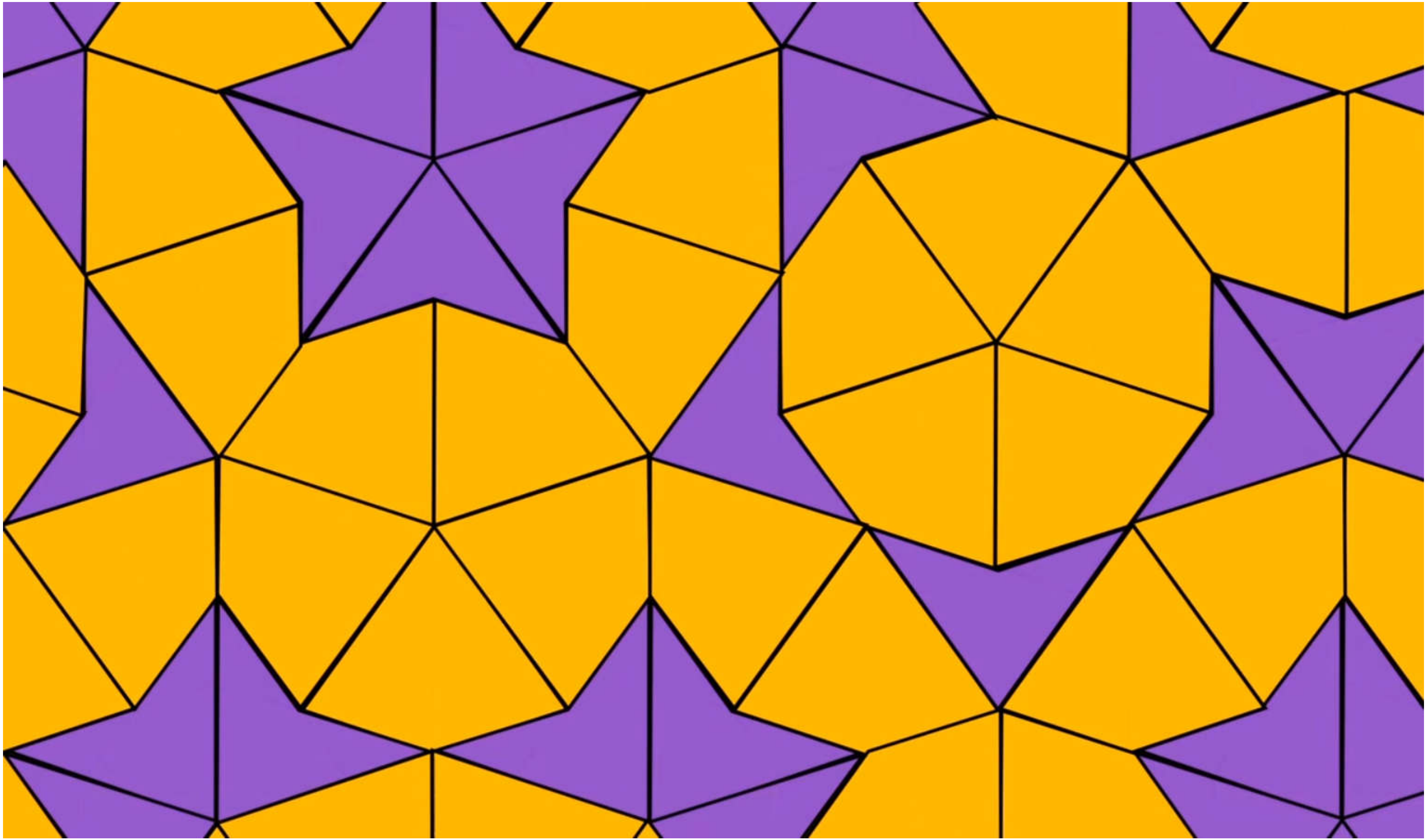
Une structure émerge (1)



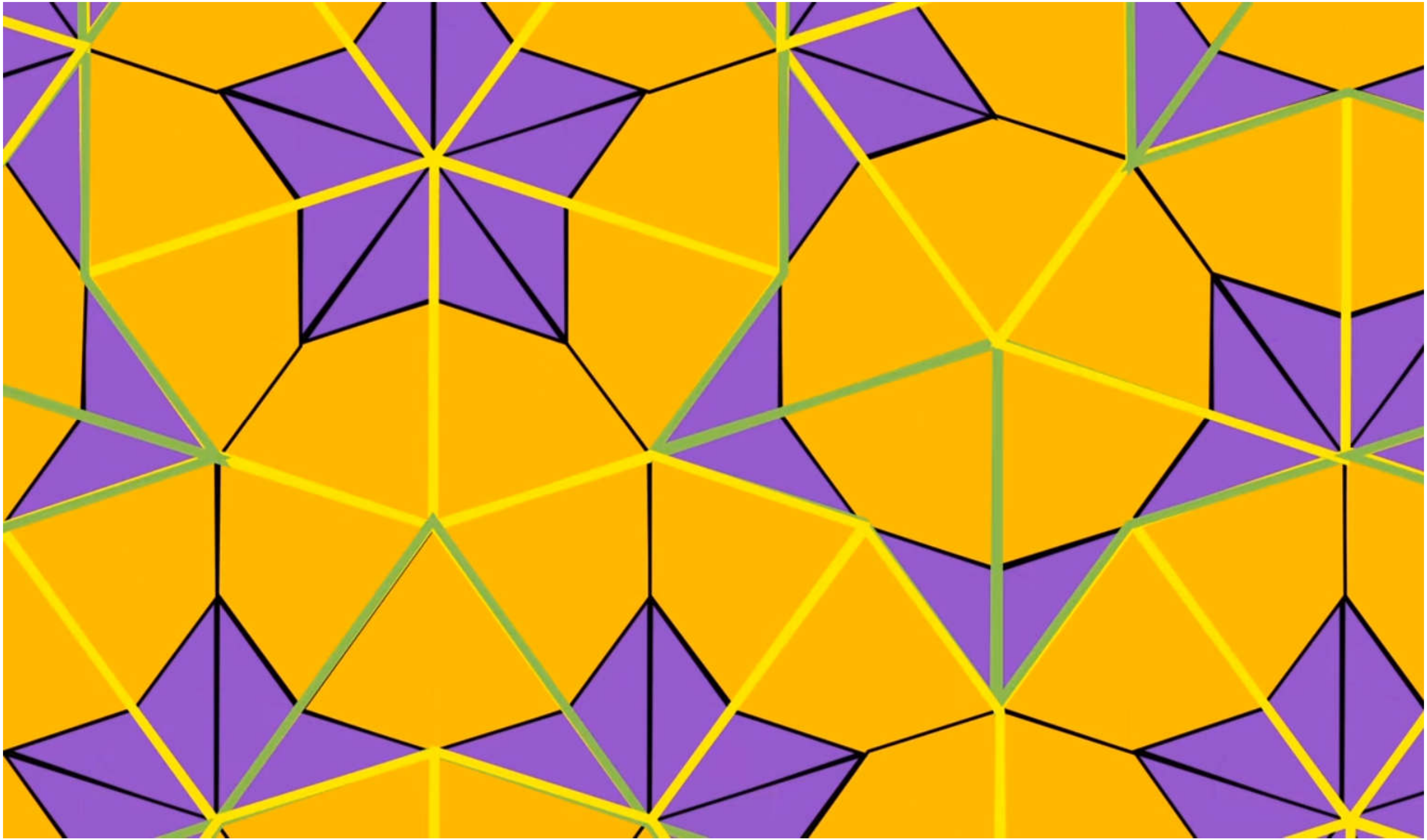
Une structure émerge (2)



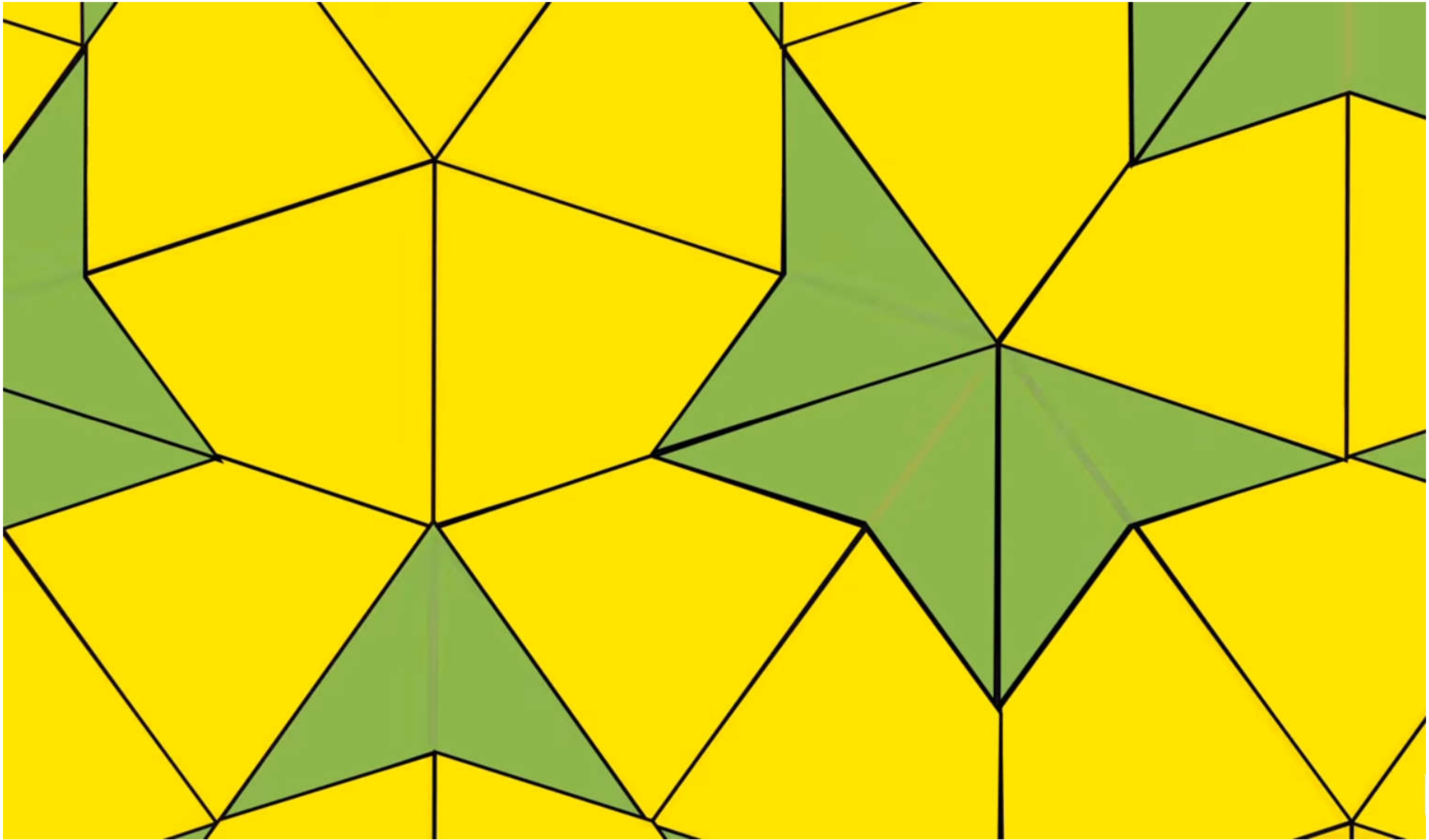
Une structure émerge (3)



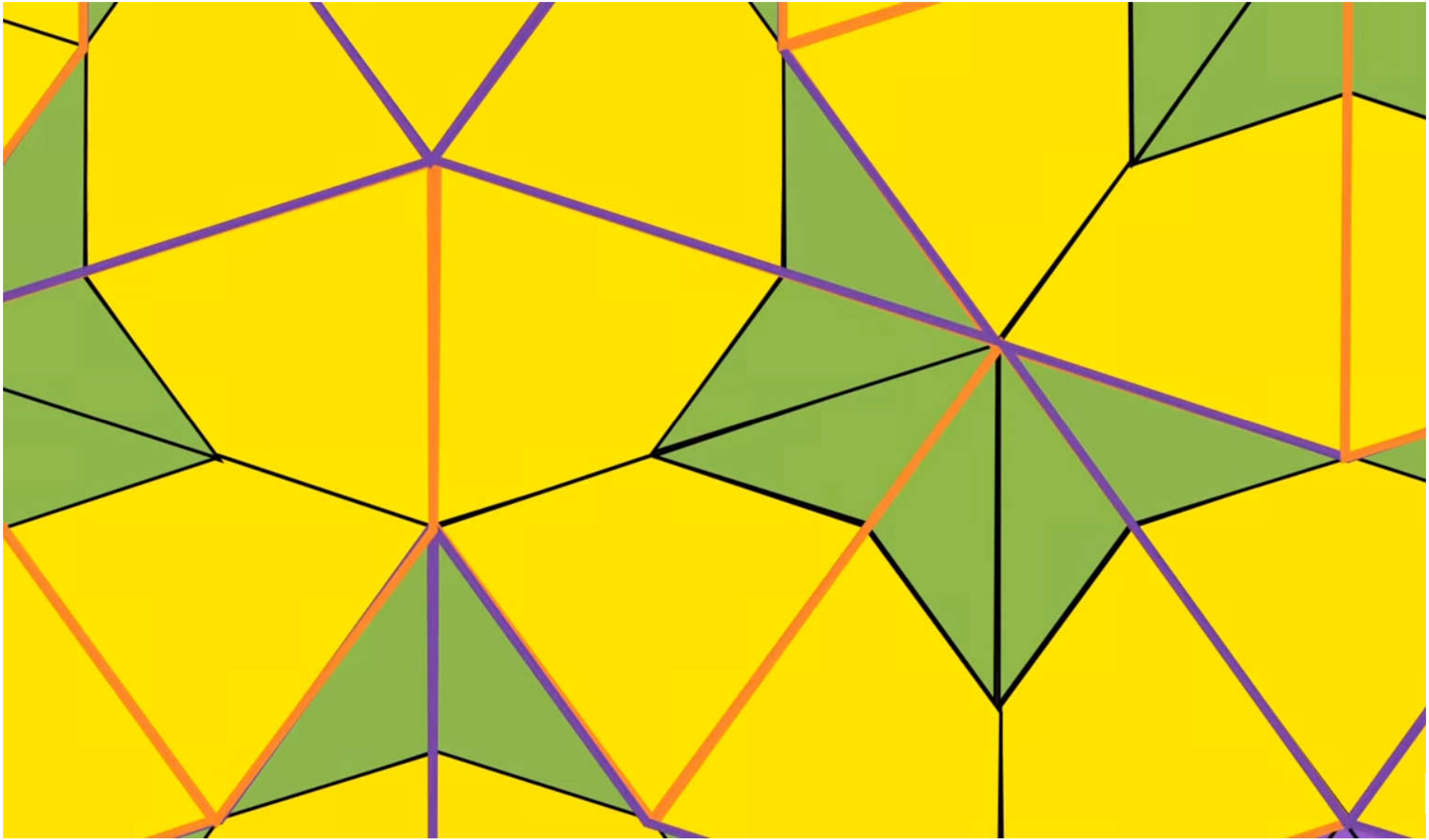
Une structure émerge (4)



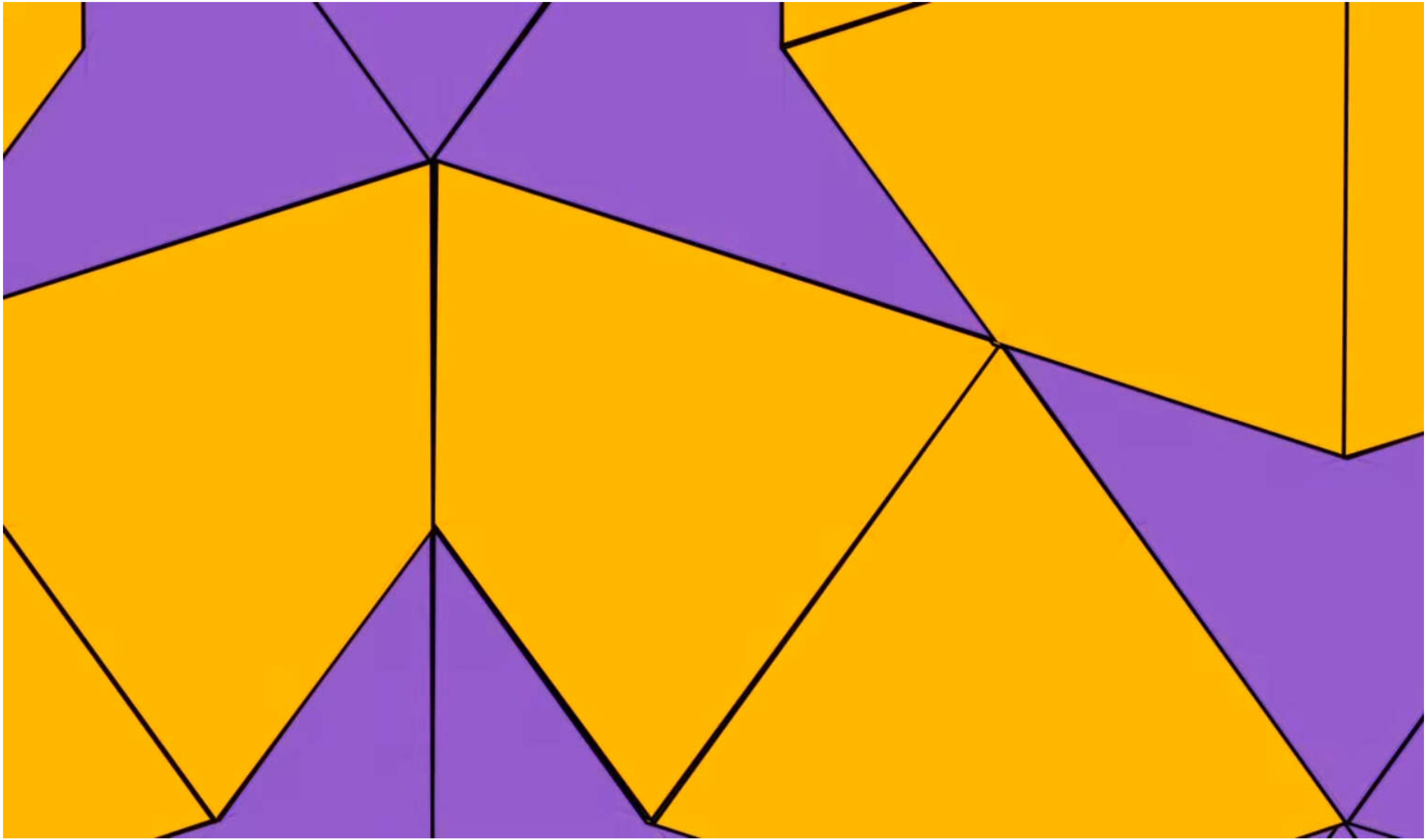
Une structure émerge (5)



Une structure émerge (6)

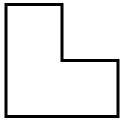


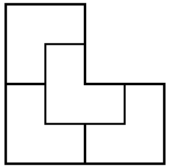
Une structure émerge (6)

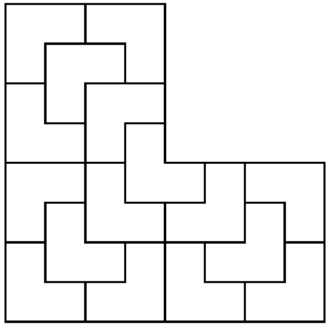


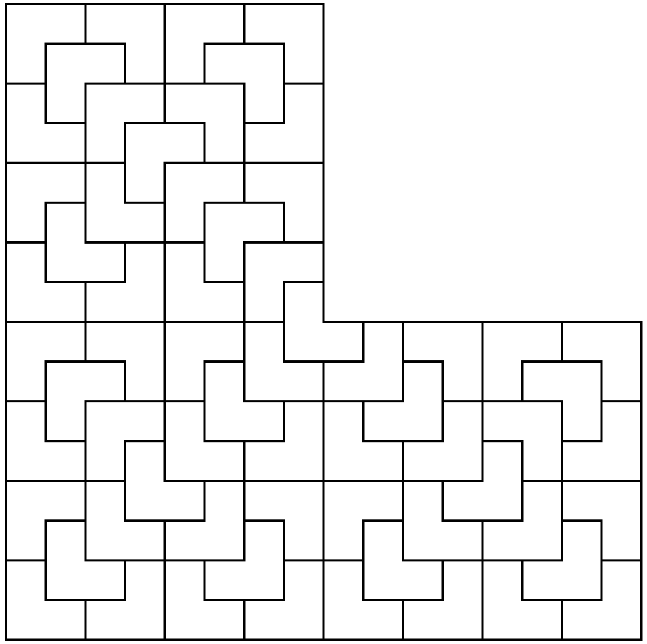
Avec des équerres

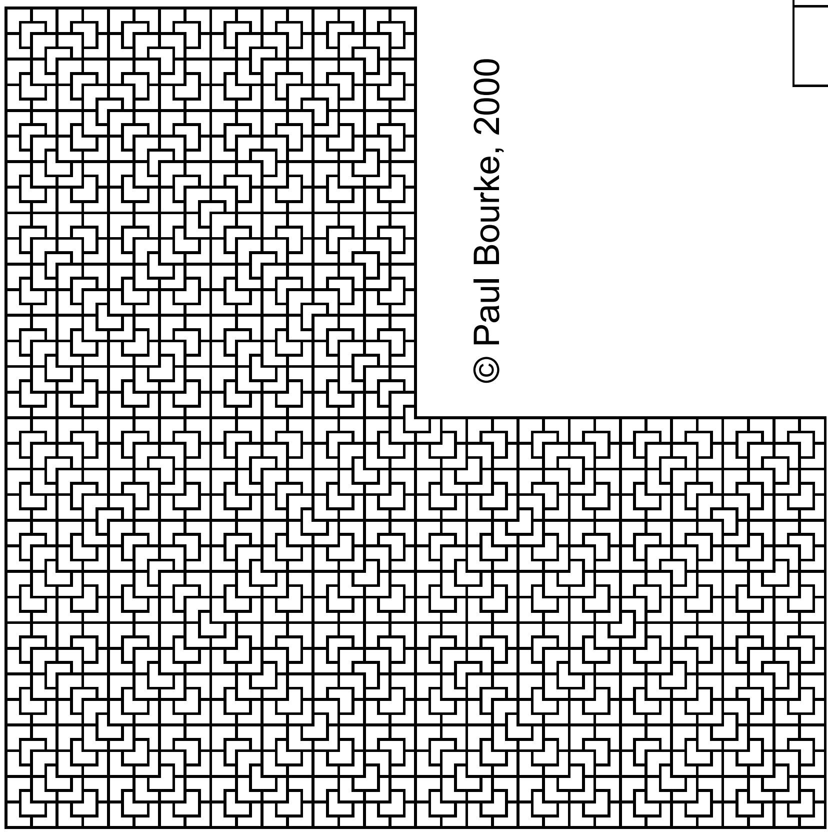
On part du triomino en forme de « L », que l’on découpe en 4.

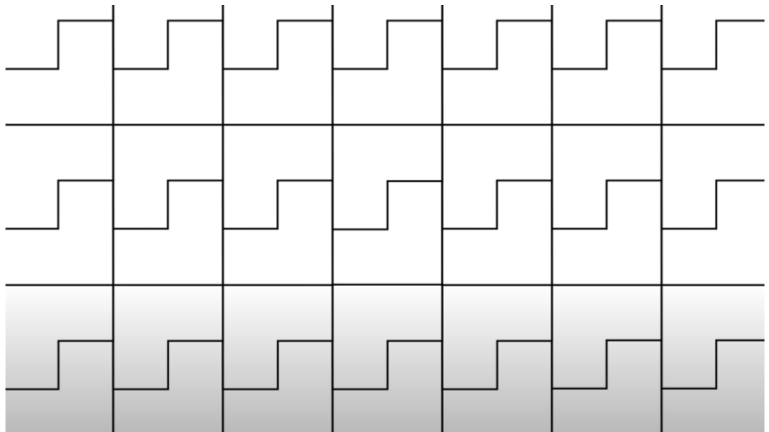




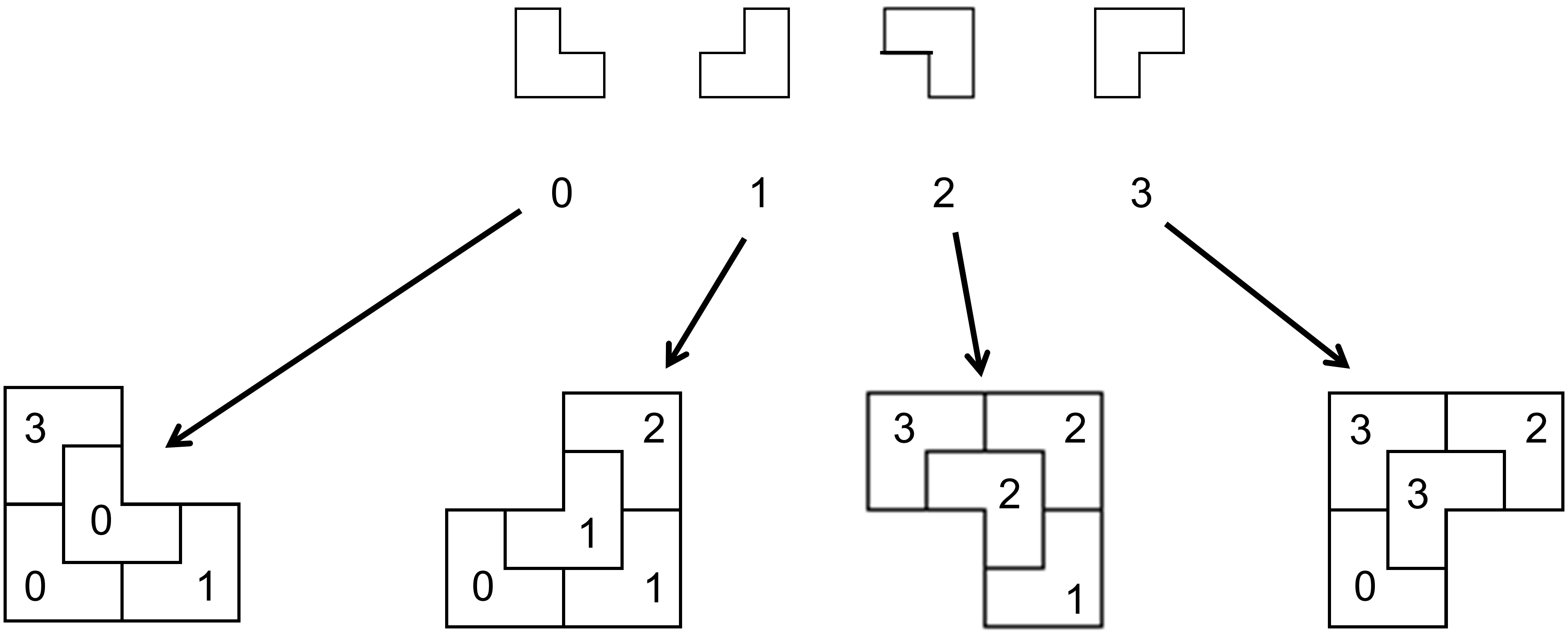








Les règles de substitution



Pour imposer un pavage apériodique du plan !
Conduit à *deux* tuiles (trilobite et crabe).

Les pavages hiérarchiques

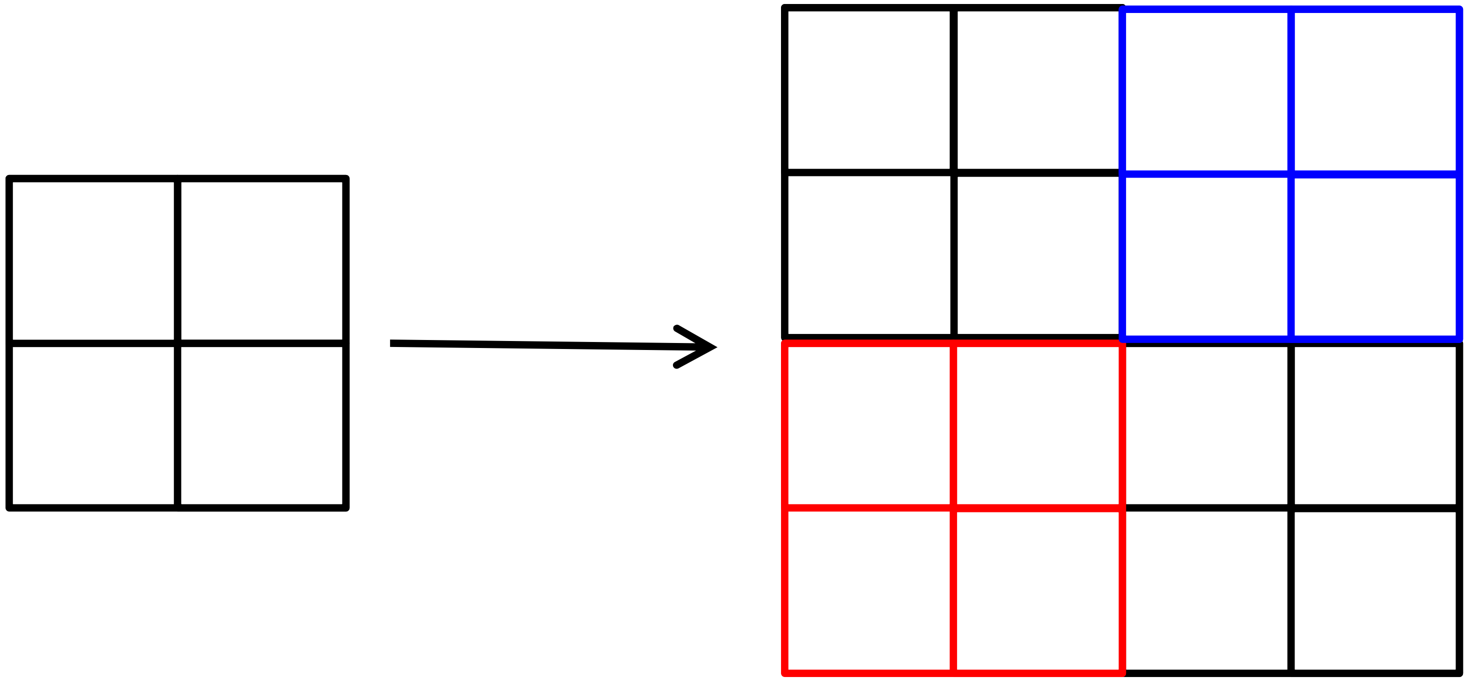
Un pavage est *hiérarchique* lorsque, par adjonction de tuiles adjacentes, on obtient des tuiles homothétiques qui, à leur tour, forment un pavage du plan.

Exemples :

- les pavages obtenus par inflation et substitution ;
- les pavages obtenus par montée–descente.

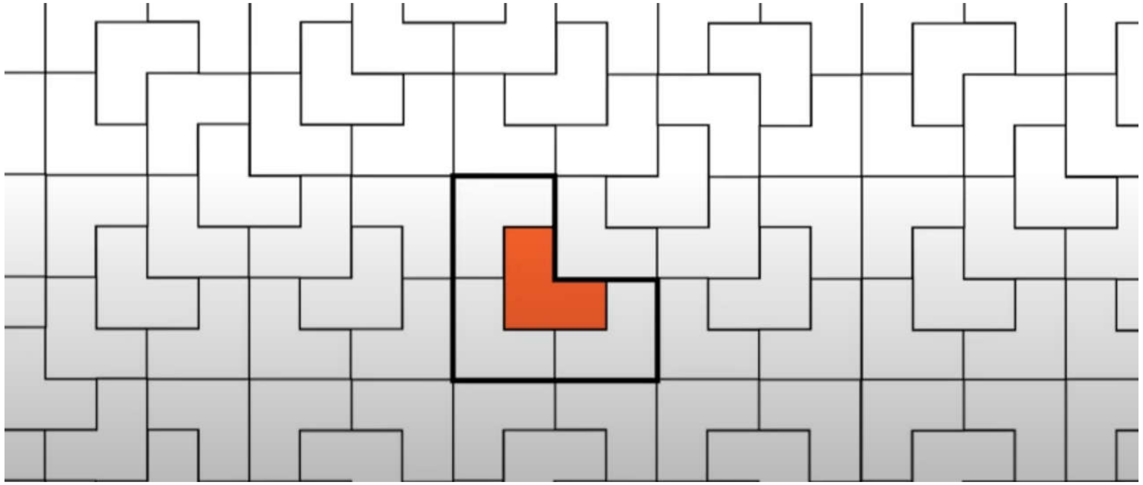
Un pavage hiérarchique est *à structure unique* lorsqu'une tuile peut être englobée <u>de façon unique</u> dans une tuile homothétique de la hiérarchie suivante, laquelle à son tour peut être englobée <u>de façon unique</u> dans une tuile homothétique de la hiérarchie suivante, laquelle…

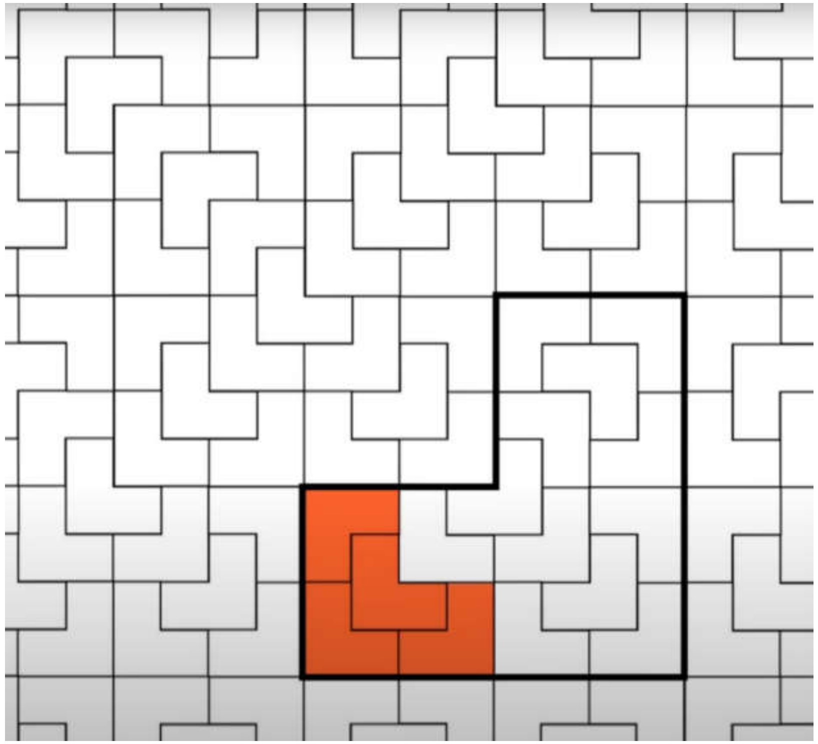
Structure hiérarchique pas unique !

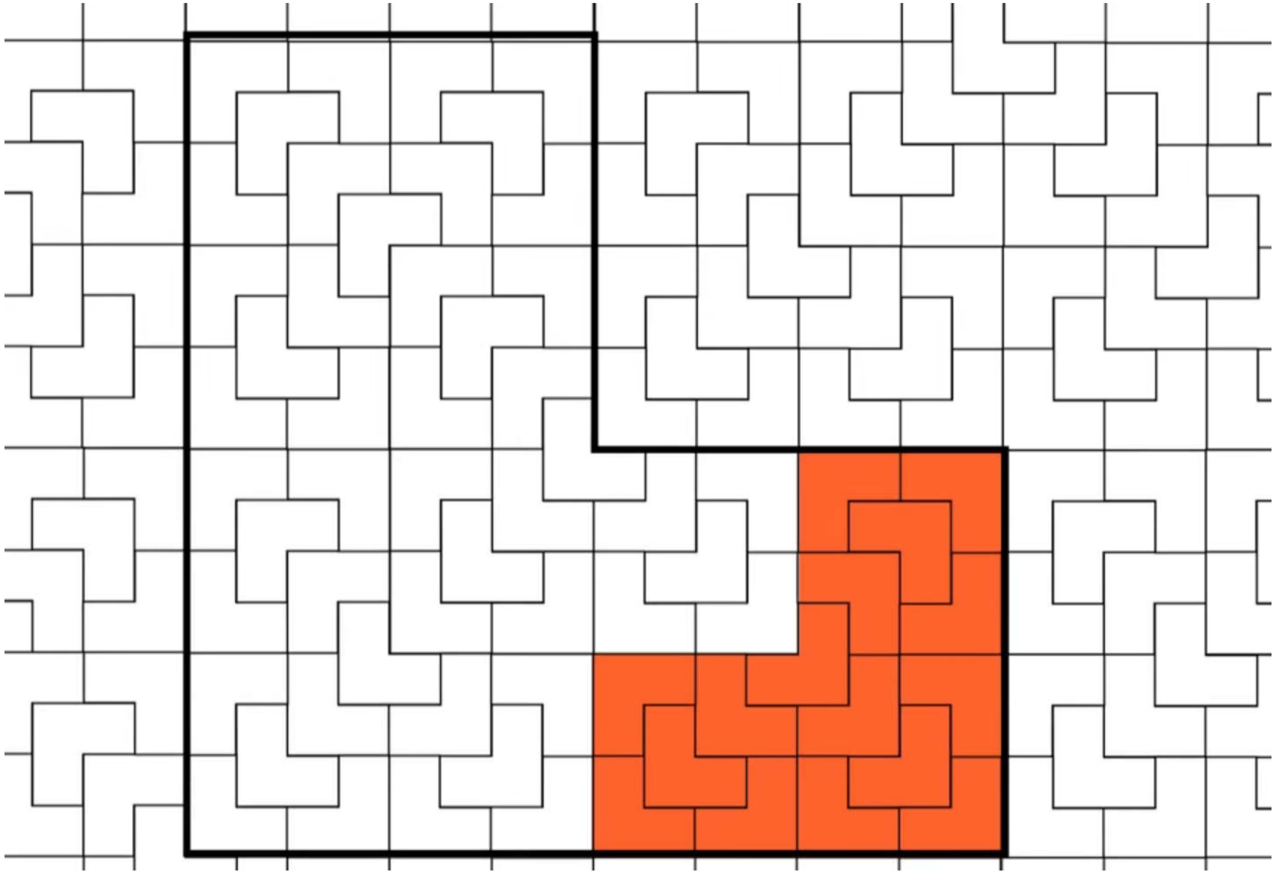


À un niveau hiérarchique donné,
une tuile (à gauche, en noir) peut se retrouver
de plusieurs manières différentes
(à droite, en rouge, en bleu, en noir…)
dans une métatuile du niveau hiérarchique supérieur.

Structure hiérarchique unique !







Chaque équerre appartient à une seule méta-équerre.

La propriété fondamentale

Un pavage à structure hiérarchique unique est apériodique.

Démonstration (avec les mains) : par l'absurde !

On suppose qu'il existe une translation de vecteur $\vec{V}$ non nul
qui laisse le pavage hiérarchique globalement invariant.

Alors $\vec{V}$ laisse globalement invariante la structure des hiérarchies.
Or, il existe un niveau de hiérarchie « suffisamment grand »
pour que $\vec{V}$ soit « inclus » dans un pavé P de cette hiérarchie.

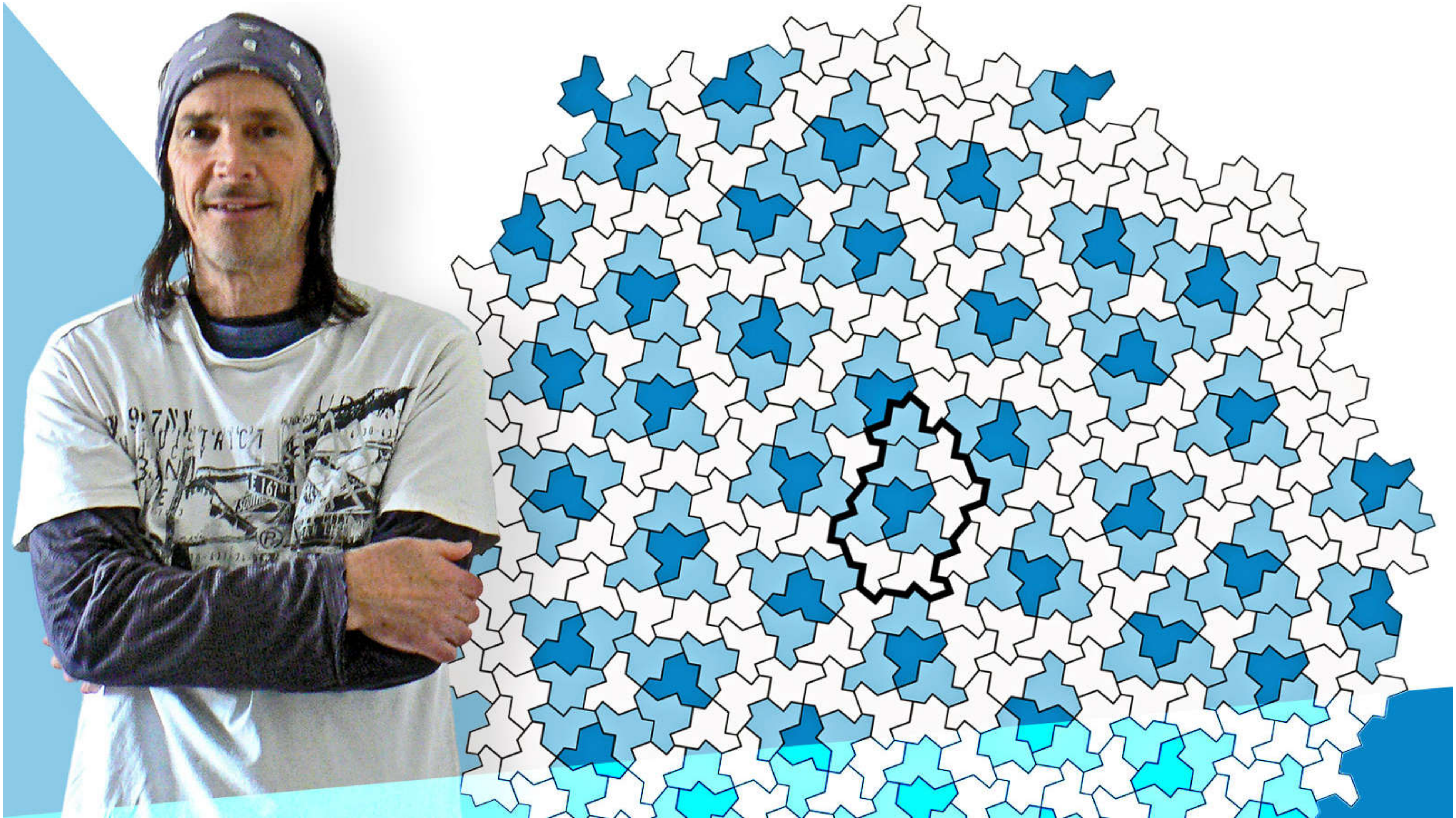
Mais alors on a un souci ! En effet, P + $\vec{V}$ se superposera avec P ;
il existera une tuile de P qui appartiendra aussi à P + $\vec{V}$.
Cela est impossible car le pavage est à structure unique.

2022 et 2023 :

les découvertes de David Smith

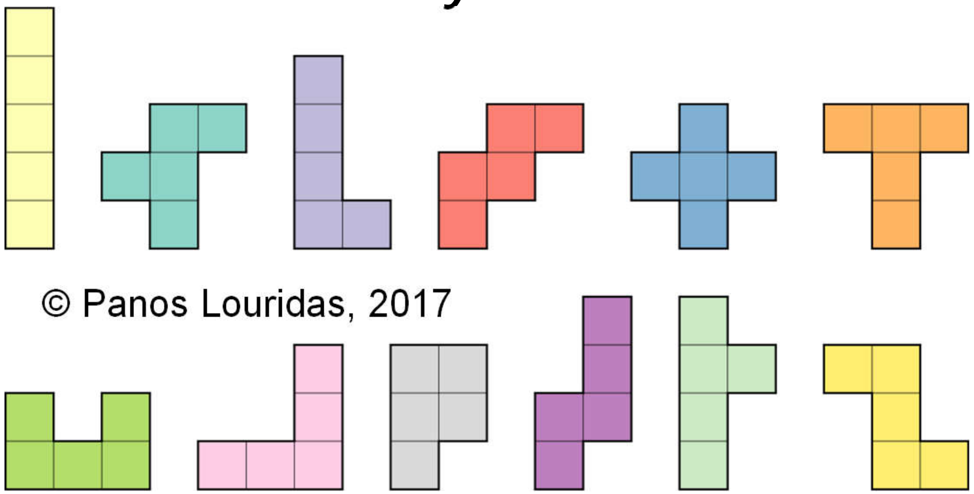
David Smith

Prote à la retraite, *« shape hobbyist »* (« amateur de formes »).
S'intéresse aux polyformes depuis plus de vingt-cinq ans.



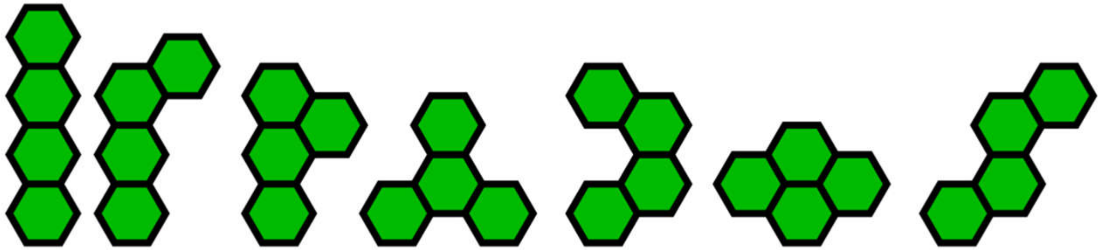
Quelques polyformes

Polyminos



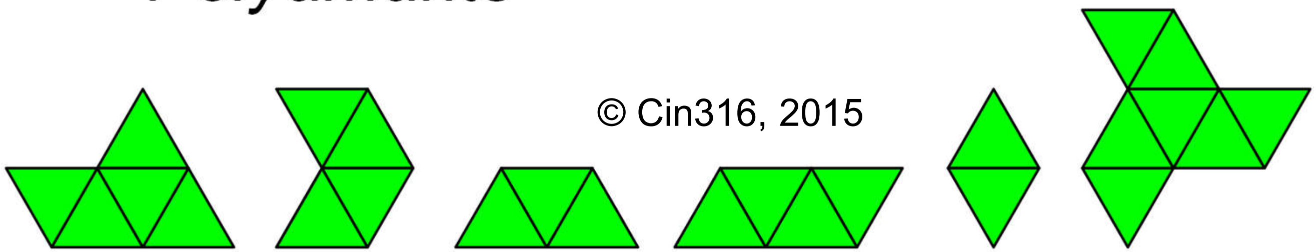
© Panos Louridas, 2017

Polyhex



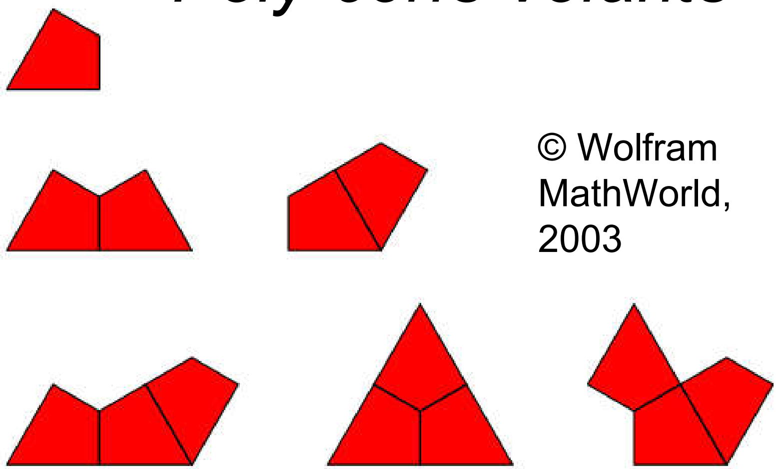
© Lurlock, 2011

Polyamants



© Cin316, 2015

Poly-cerfs-volants

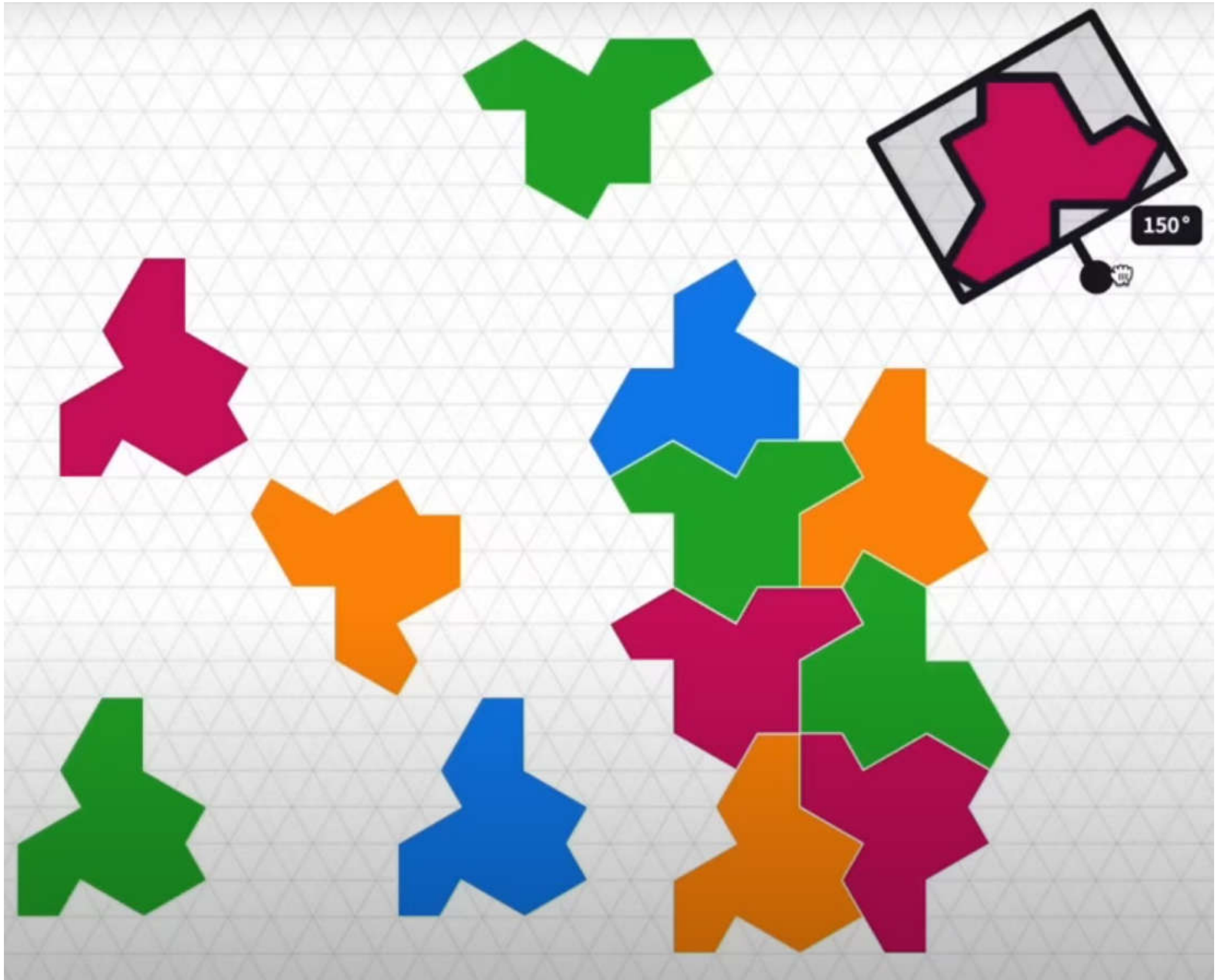


© Wolfram MathWorld, 2003

(Joseph Samuel Myers, Brendan Owen,
Glenn Rhoads, Roger Penrose, John Horton Conway…)

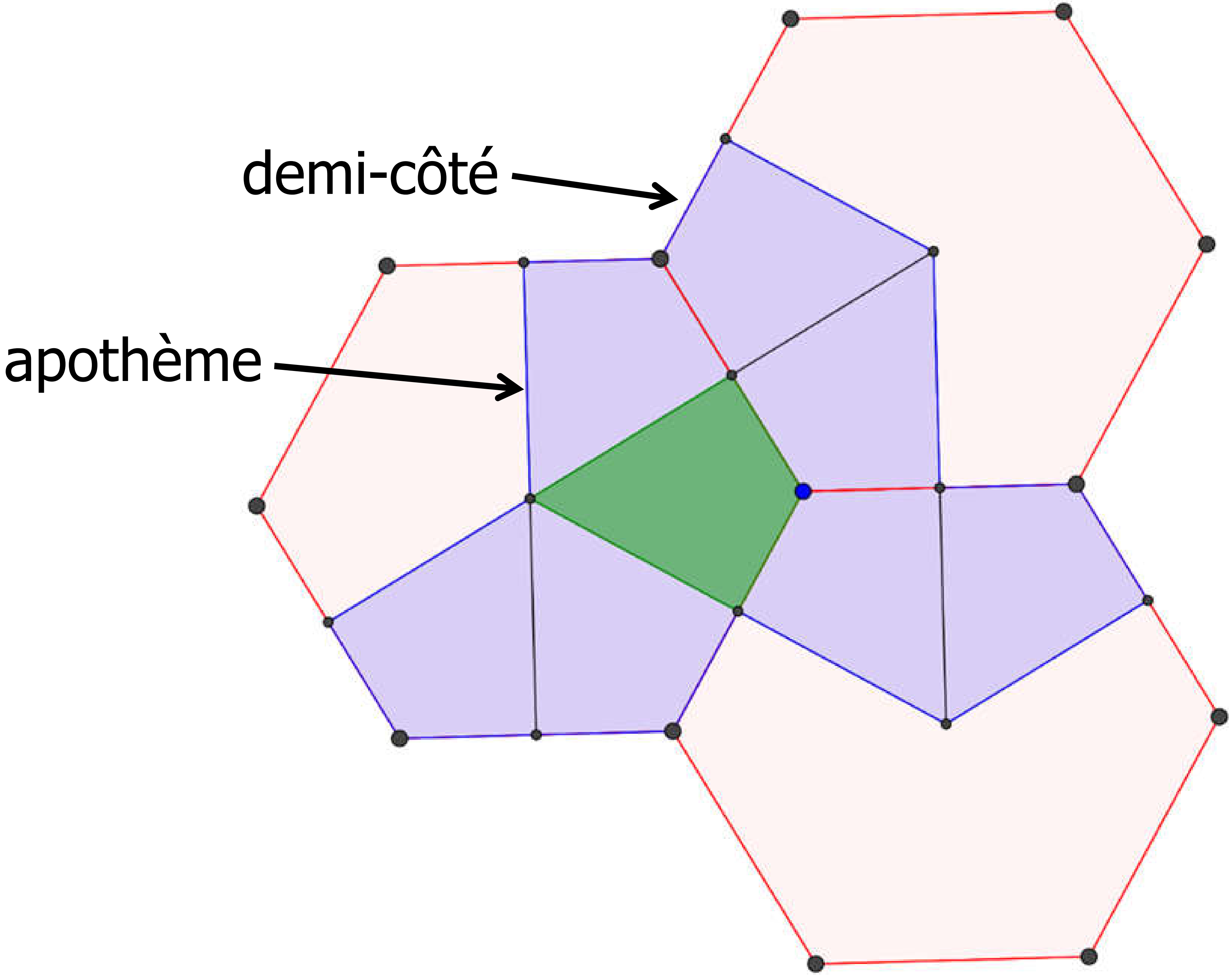
À partir de poly-cerfs-volants

15-17 novembre 2022 : David Smith découvre le « chapeau ».
Impossible de paver de manière périodique !

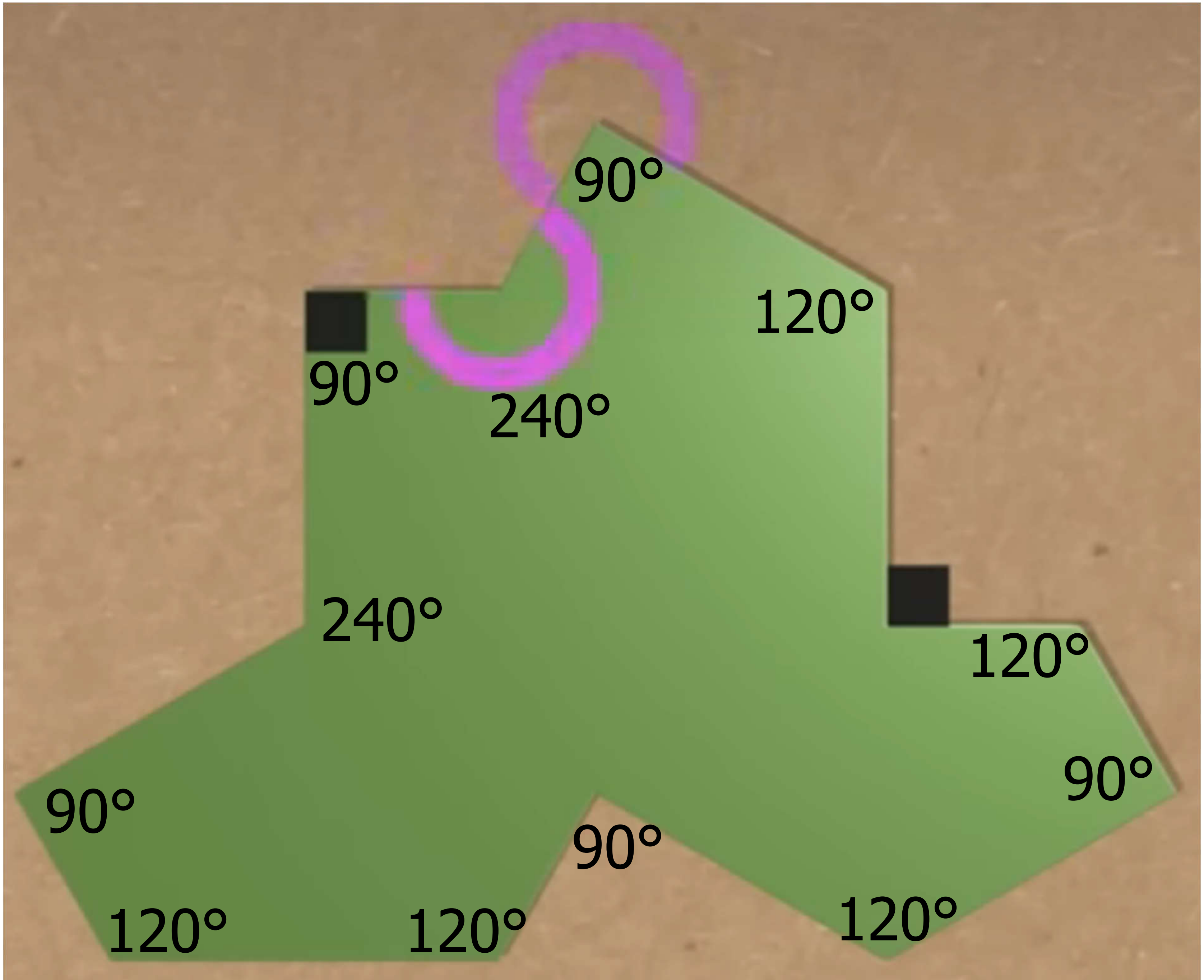


© Up and Atom, 2023 /
PolyForm Puzzle Solver, Jaap Scherphuis, 2003

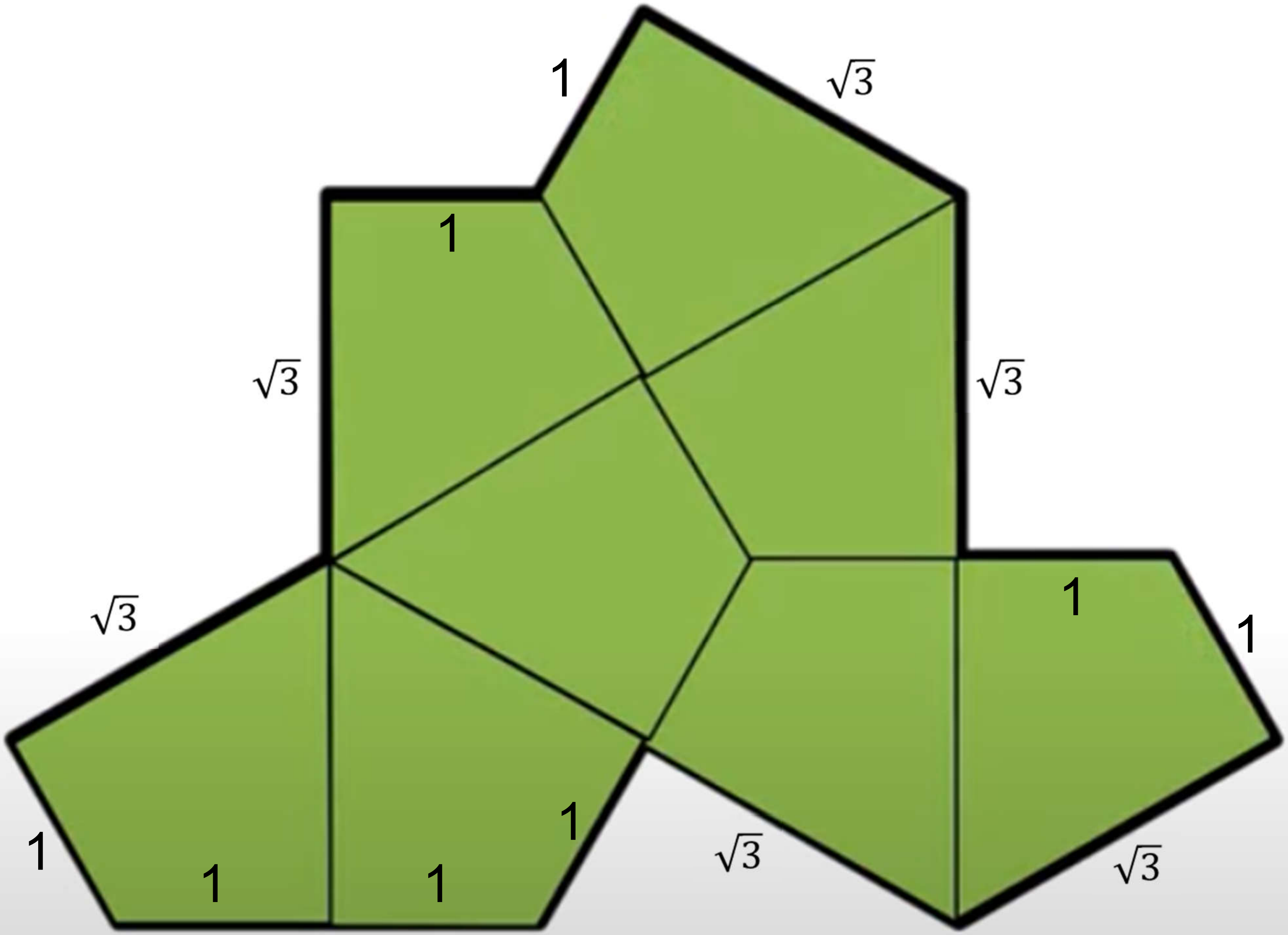
La construction du chapeau



Les angles



Les longueurs



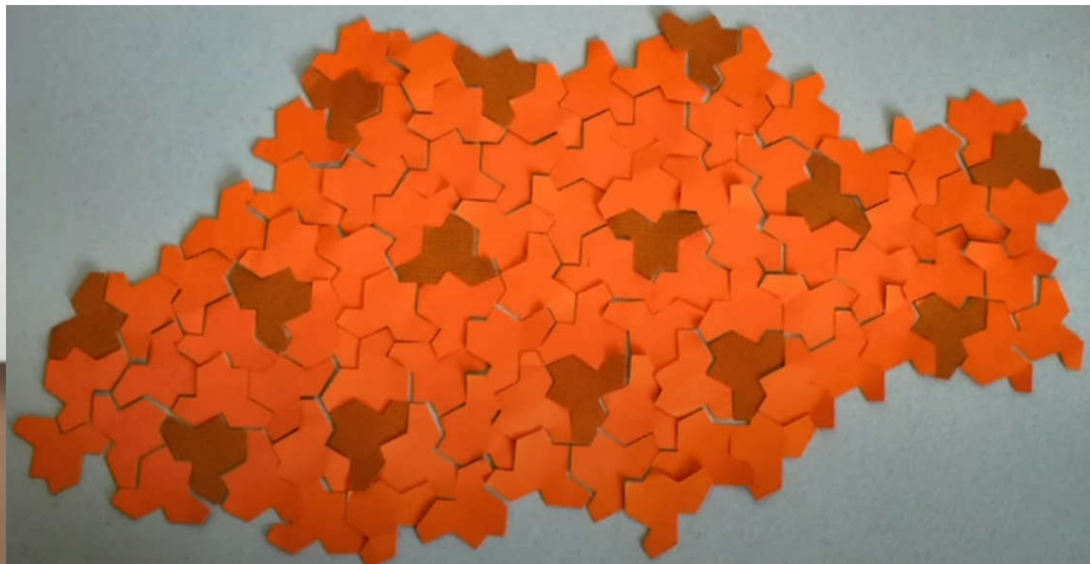
La première apparition du chapeau

From: David Smith

To: Craig Kaplan

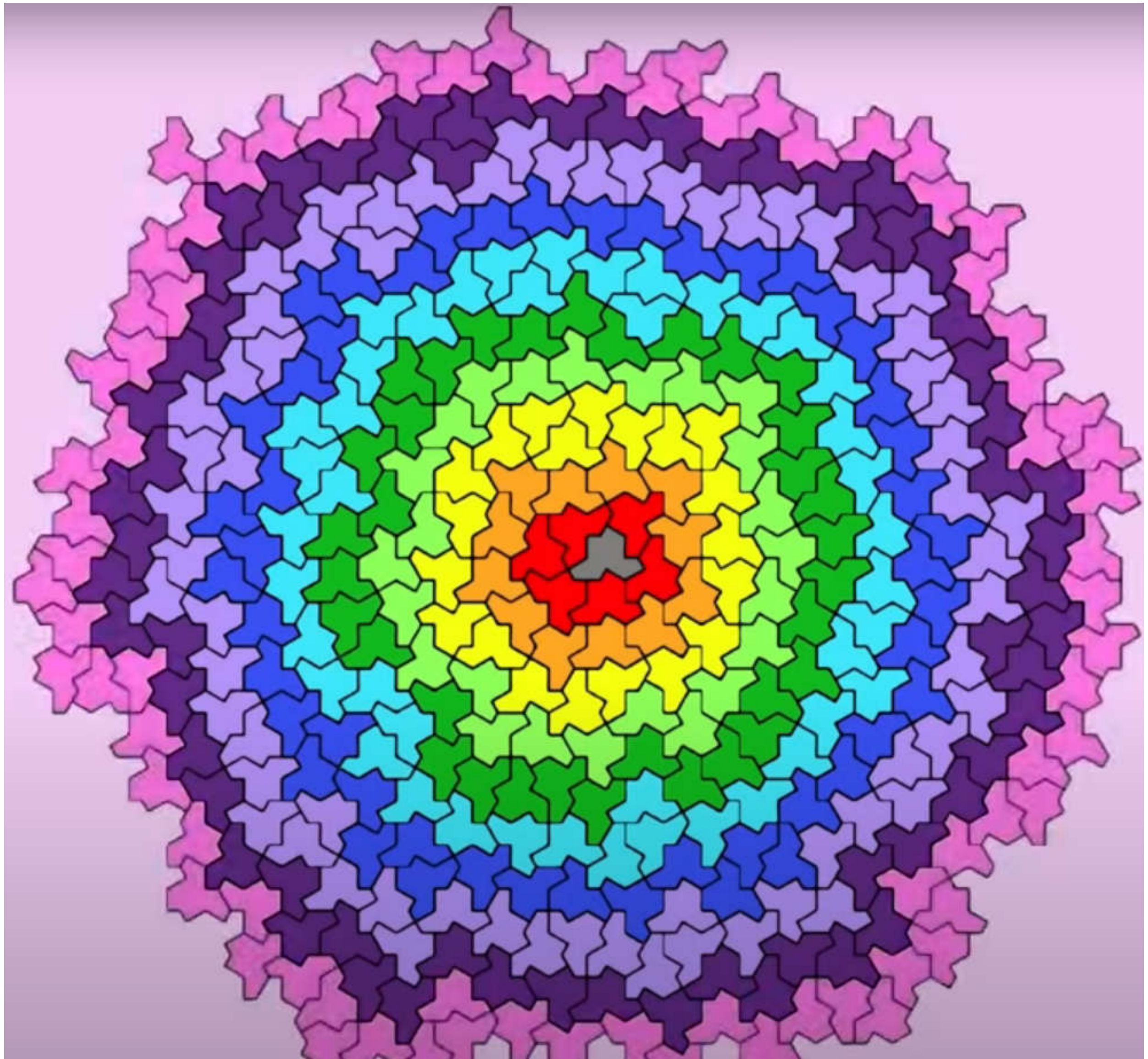
20 novembre 2022

Can the 'CryptoMiniSat' program deal with drafters or kites (from regular hexagons)? Below is one such shape composed of eight kites... It has a Heesch number of at least three, if it's a non-tiler (I couldn't get it to tile periodically).



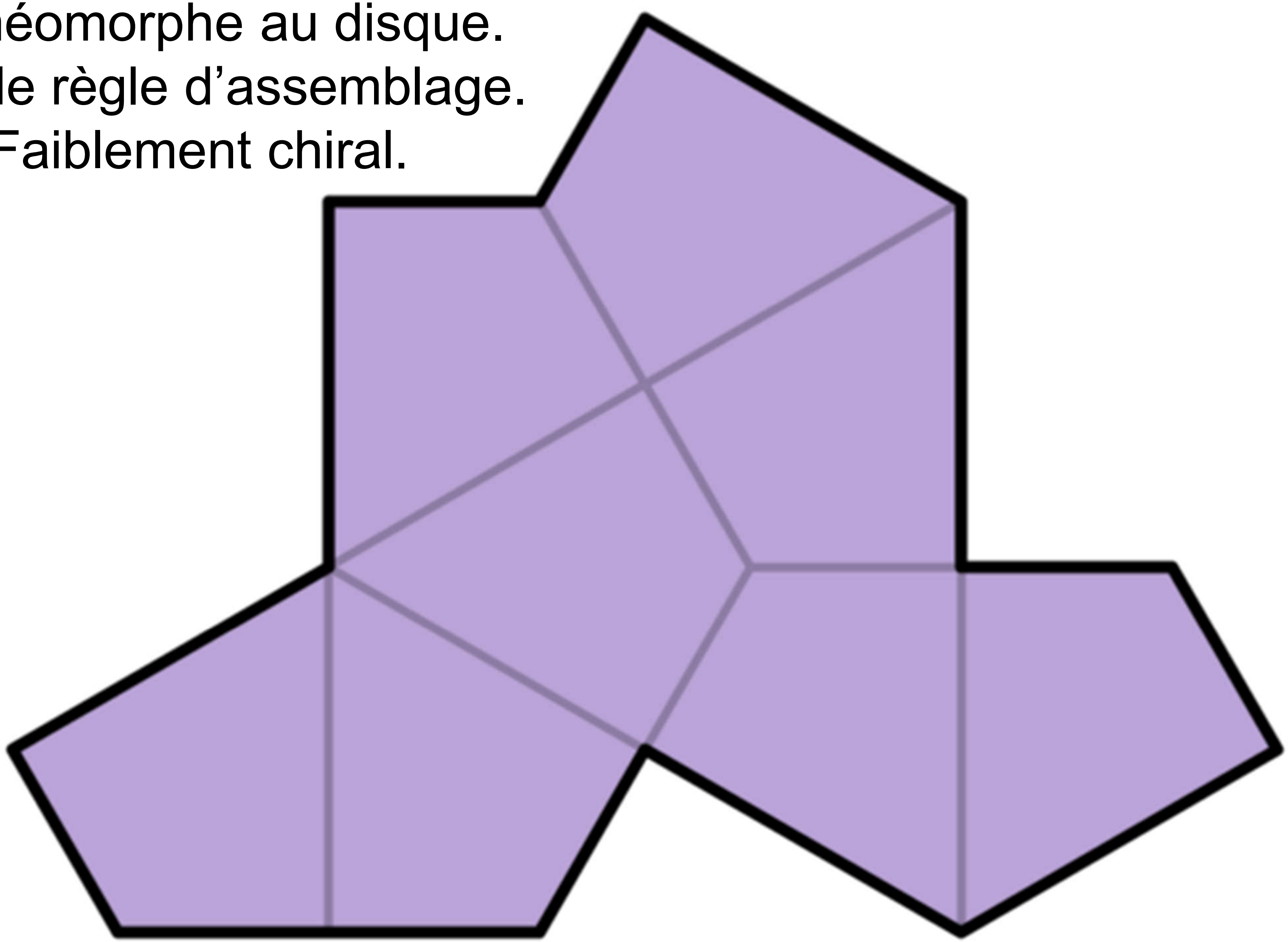
Un nombre de Heesch « énorme »

Soit il existe un pavage périodique, soit le record du plus grand nombre de Heesch est battu, soit on tient une tuile apériodique !

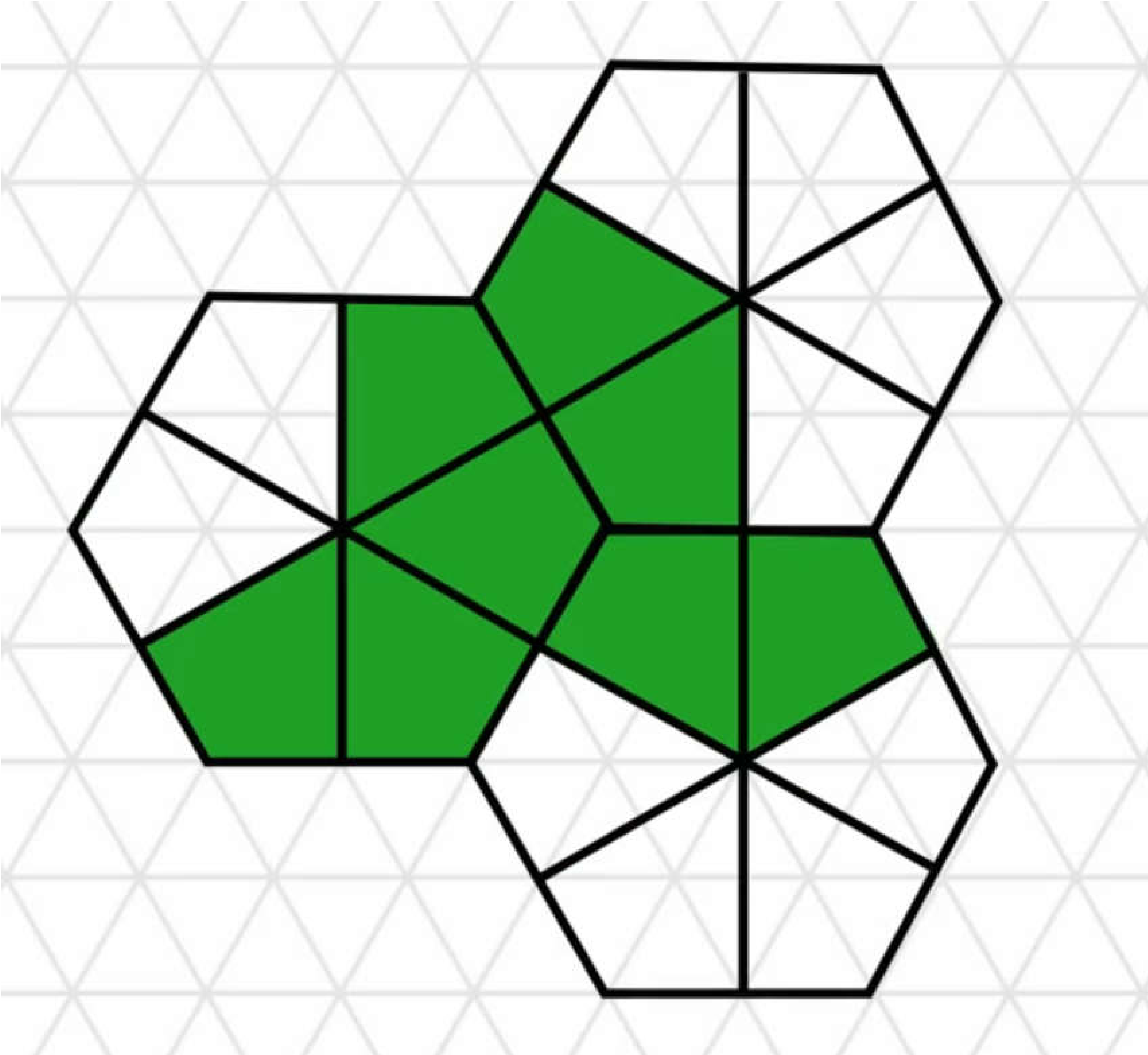


Solution au problème « ein Stein »

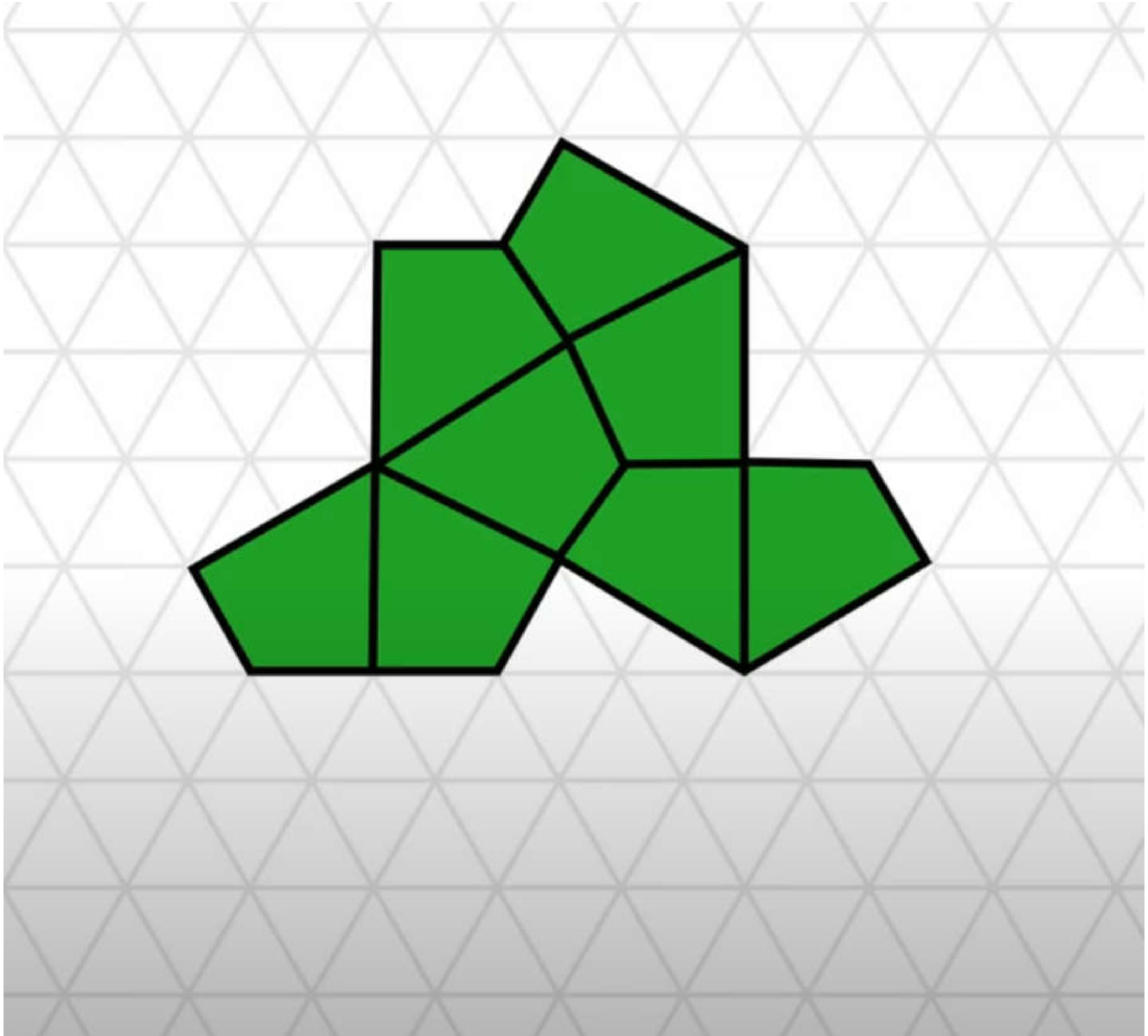
Simplement connexe.
Homéomorphe au disque.
Pas de règle d'assemblage.
Faiblement chiral.



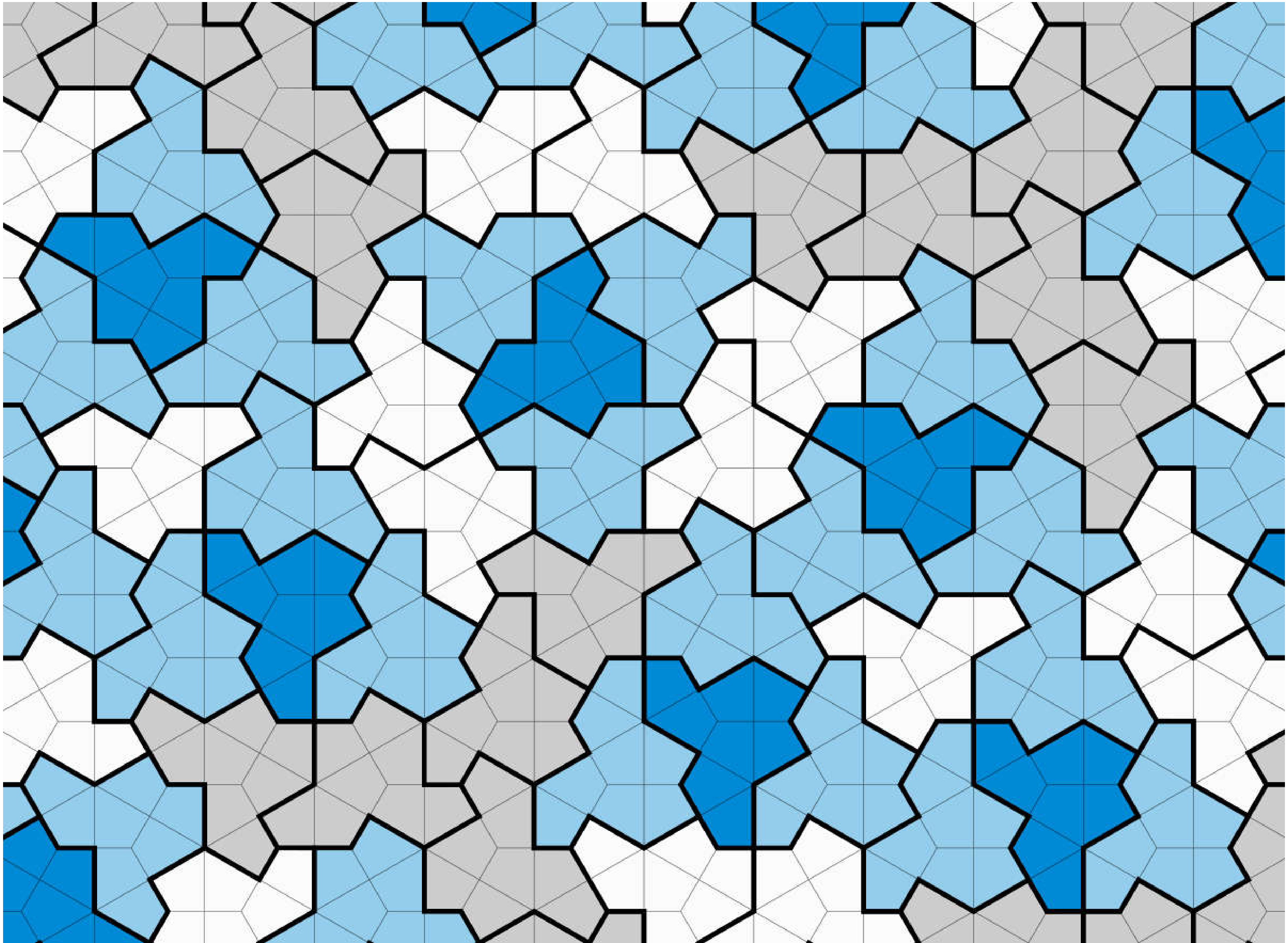
À partir des trois hexagones



Sur son réseau triangulaire

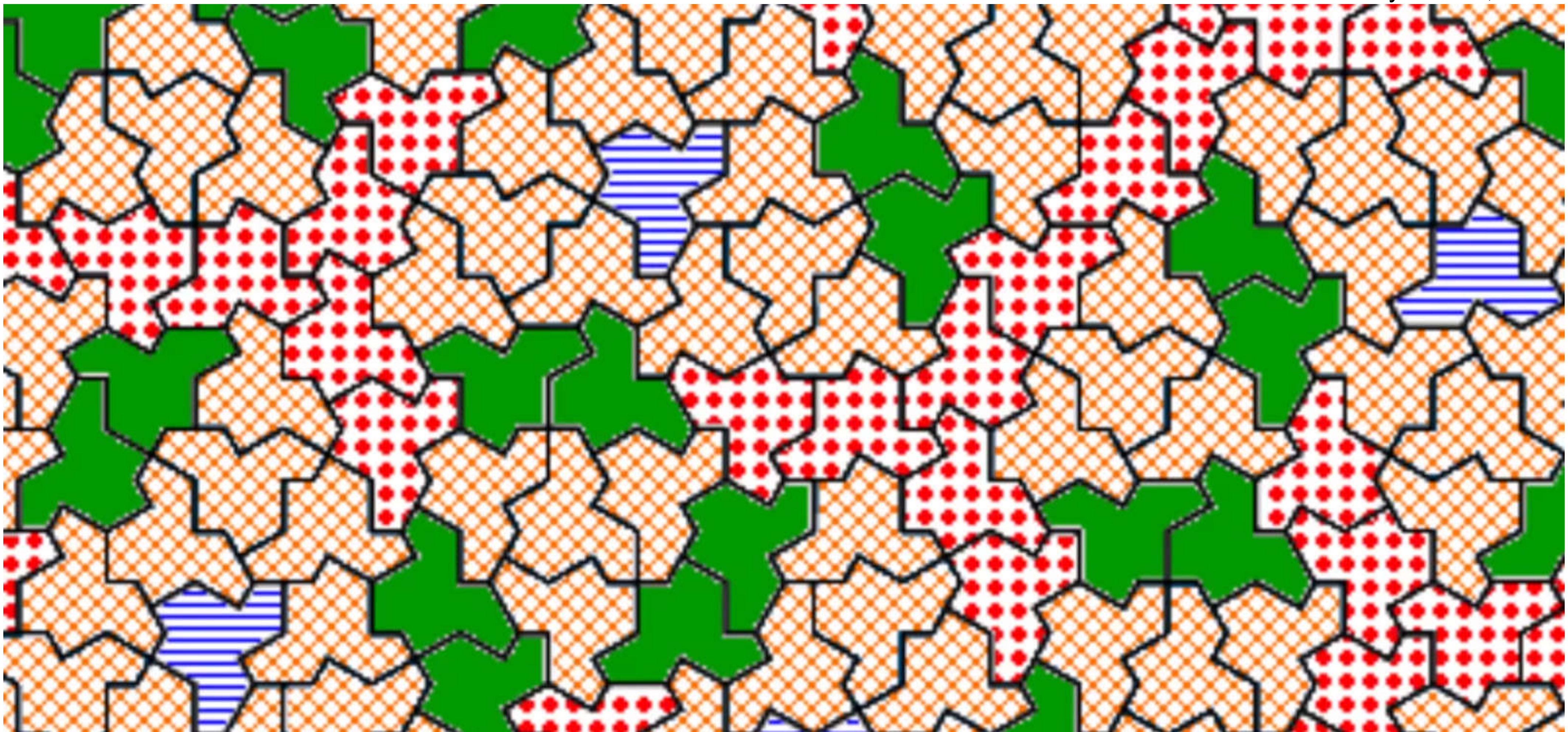


Un pavage apériodique

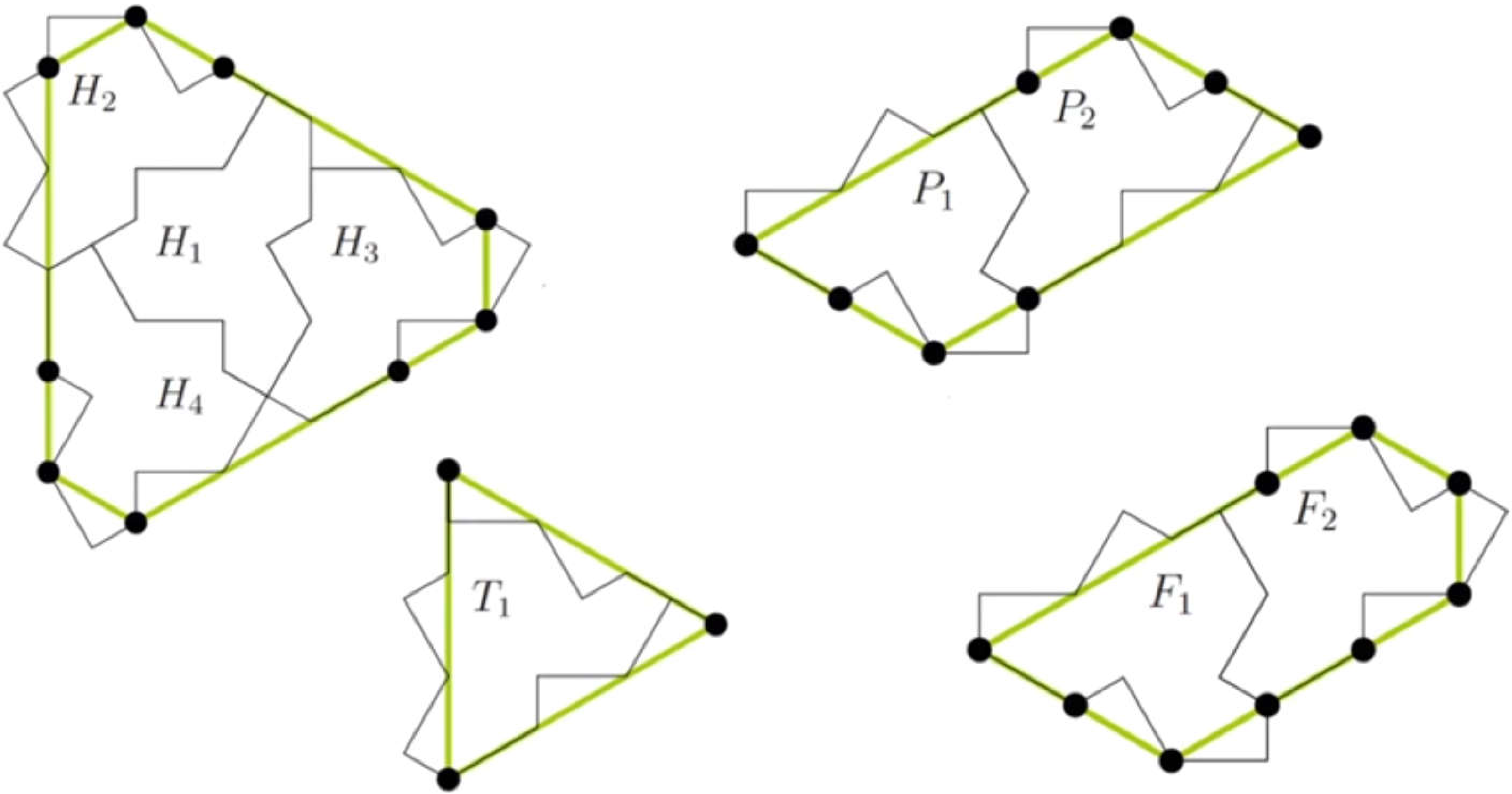


Une première démonstration

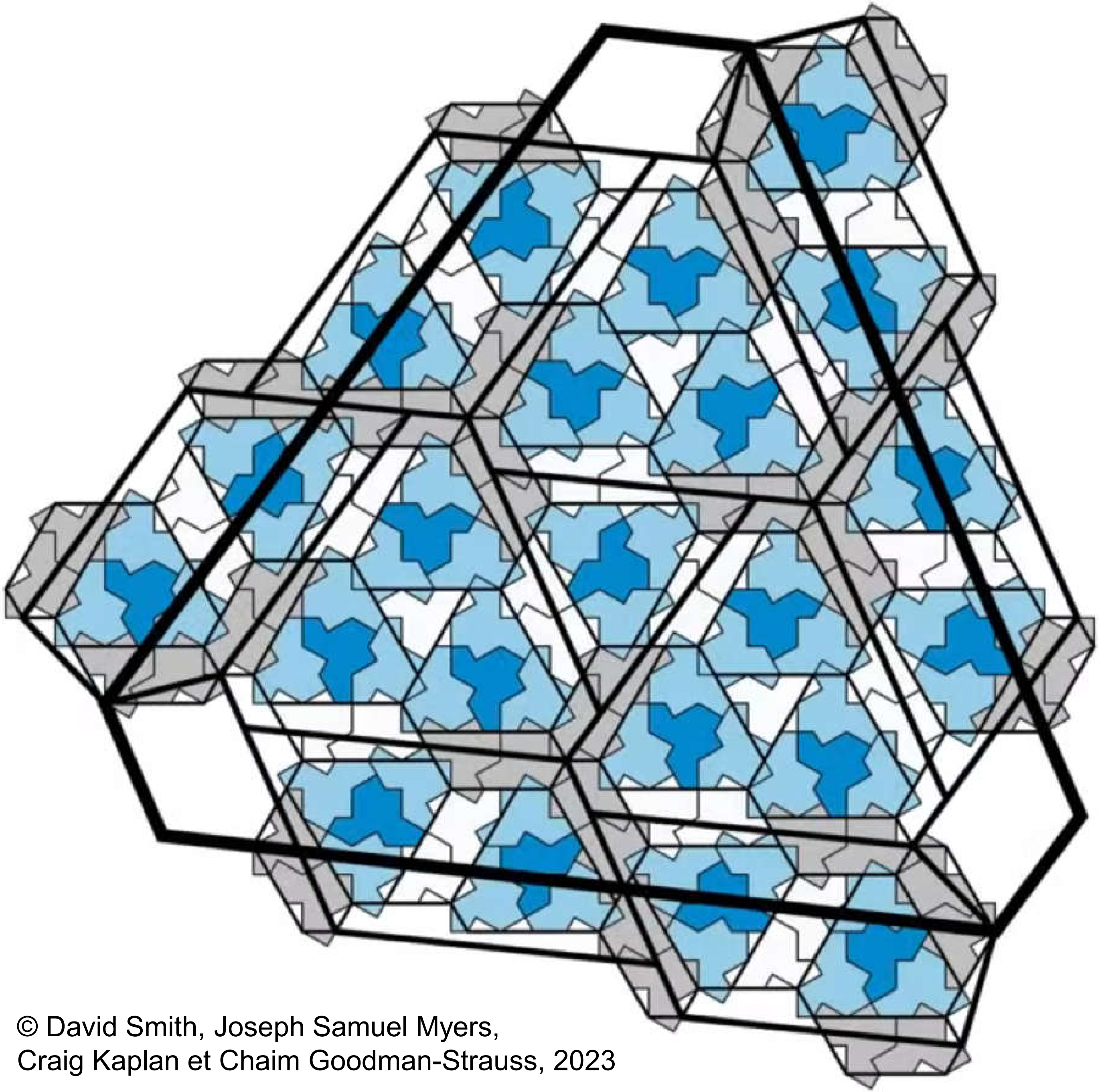
2 janvier 2023 : contactent Chaim Goodman-Strauss.
17 janvier 2023 : contactent Joseph Samuel Myers.
25 janvier 2023 (Myers) : une preuve est trouvée ; le pavage possède une structure hiérarchique unique !



Quatre métatuiles



Une complexité inattendue



© David Smith, Joseph Samuel Myers,
Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, 2023

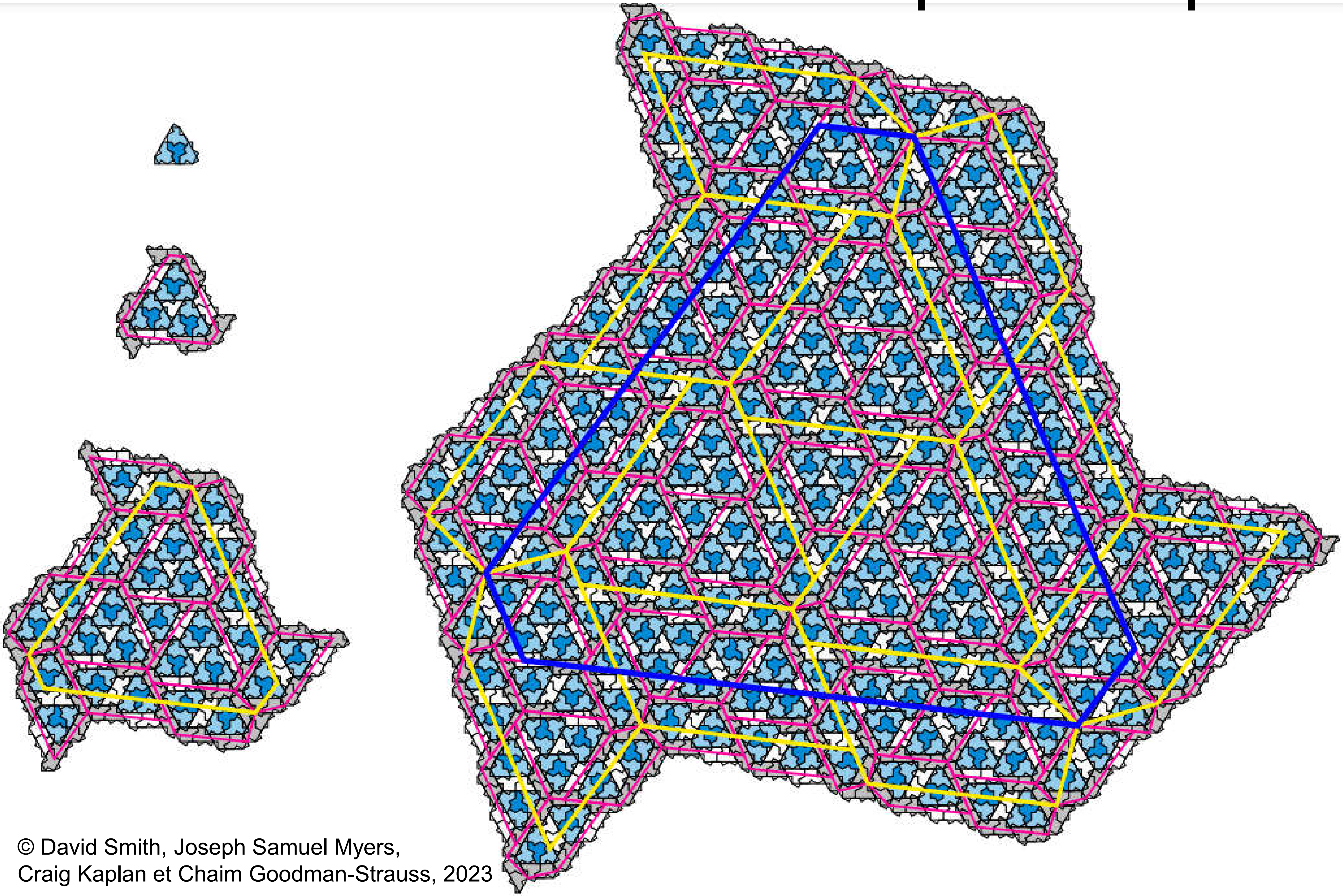
Des règles d'assemblage sur les métatuiles.

D'où des super-tuiles… pas exactement de mêmes dimensions que les métatuiles !

Grande combinatoire.

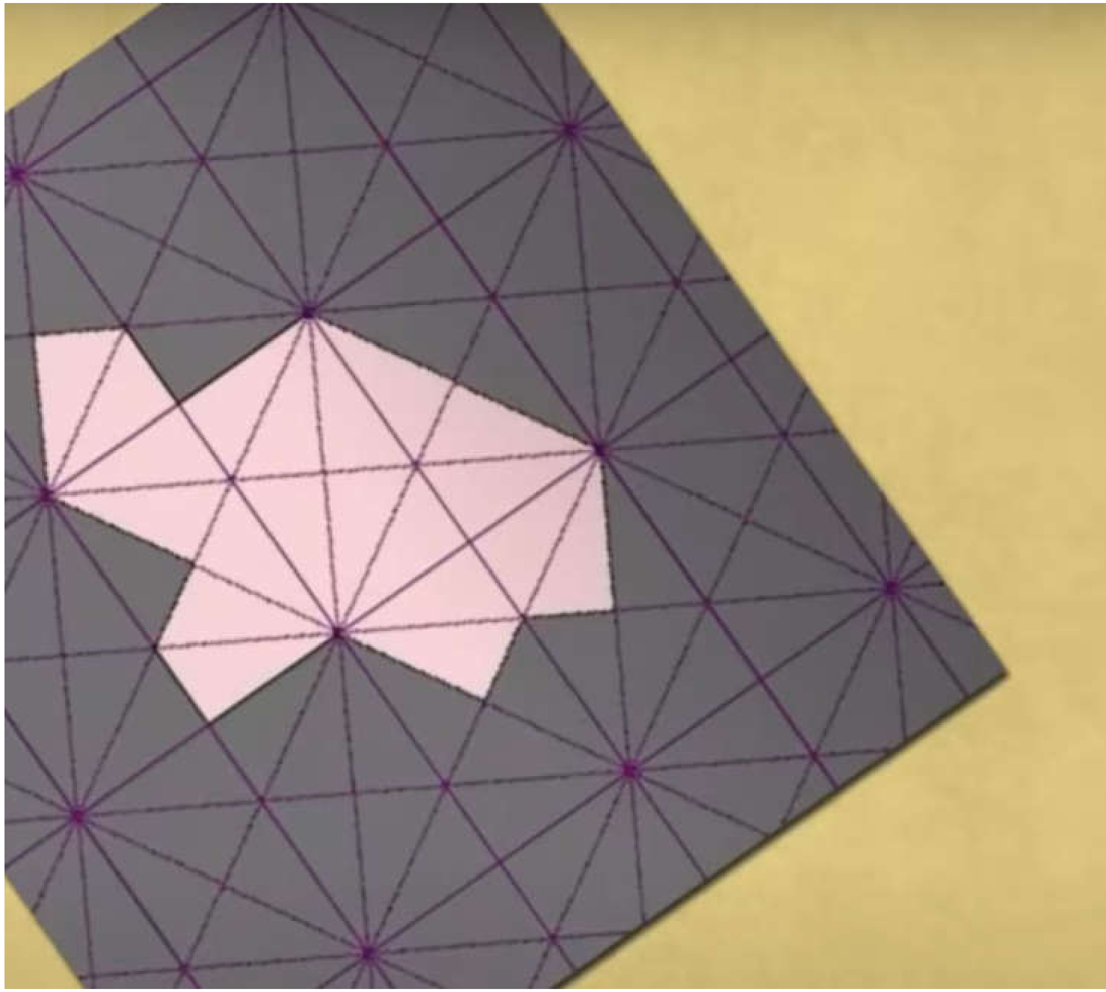
Mais la démonstration s'adapte « sans grande difficulté ».

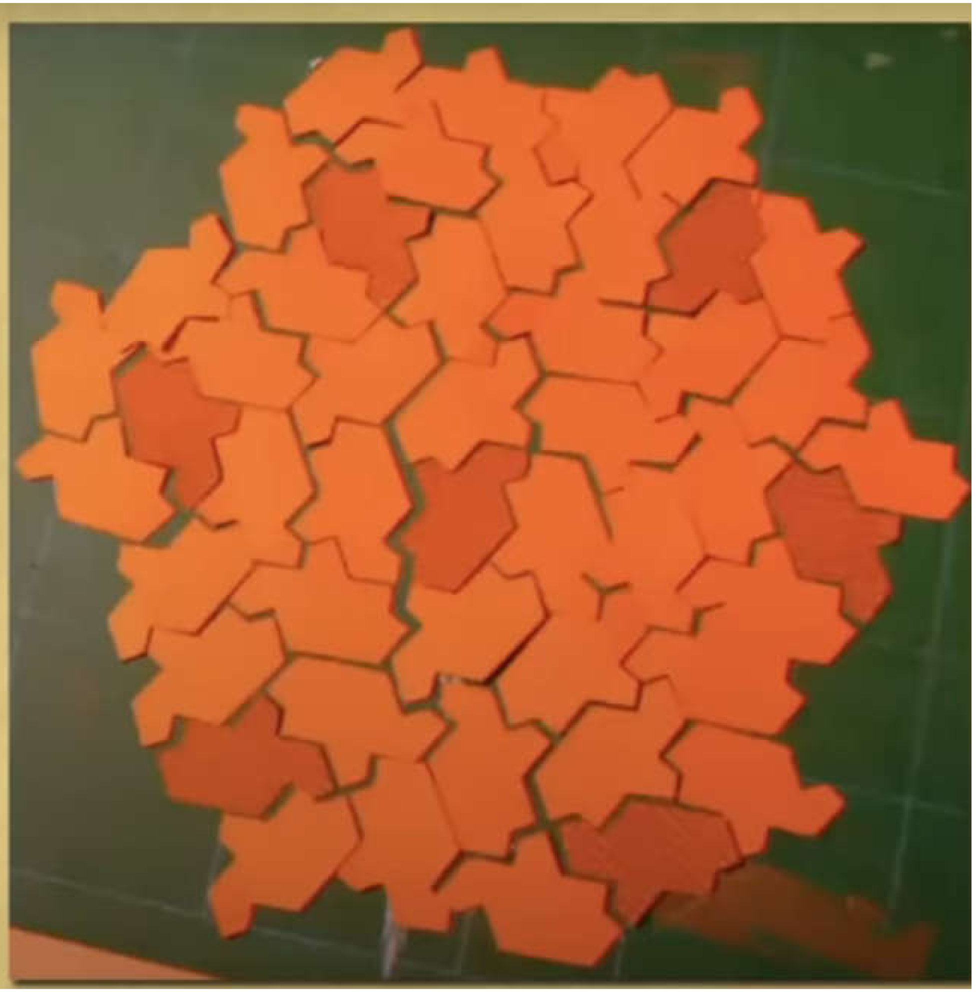
Une structure hiérarchique unique



La « tortue »

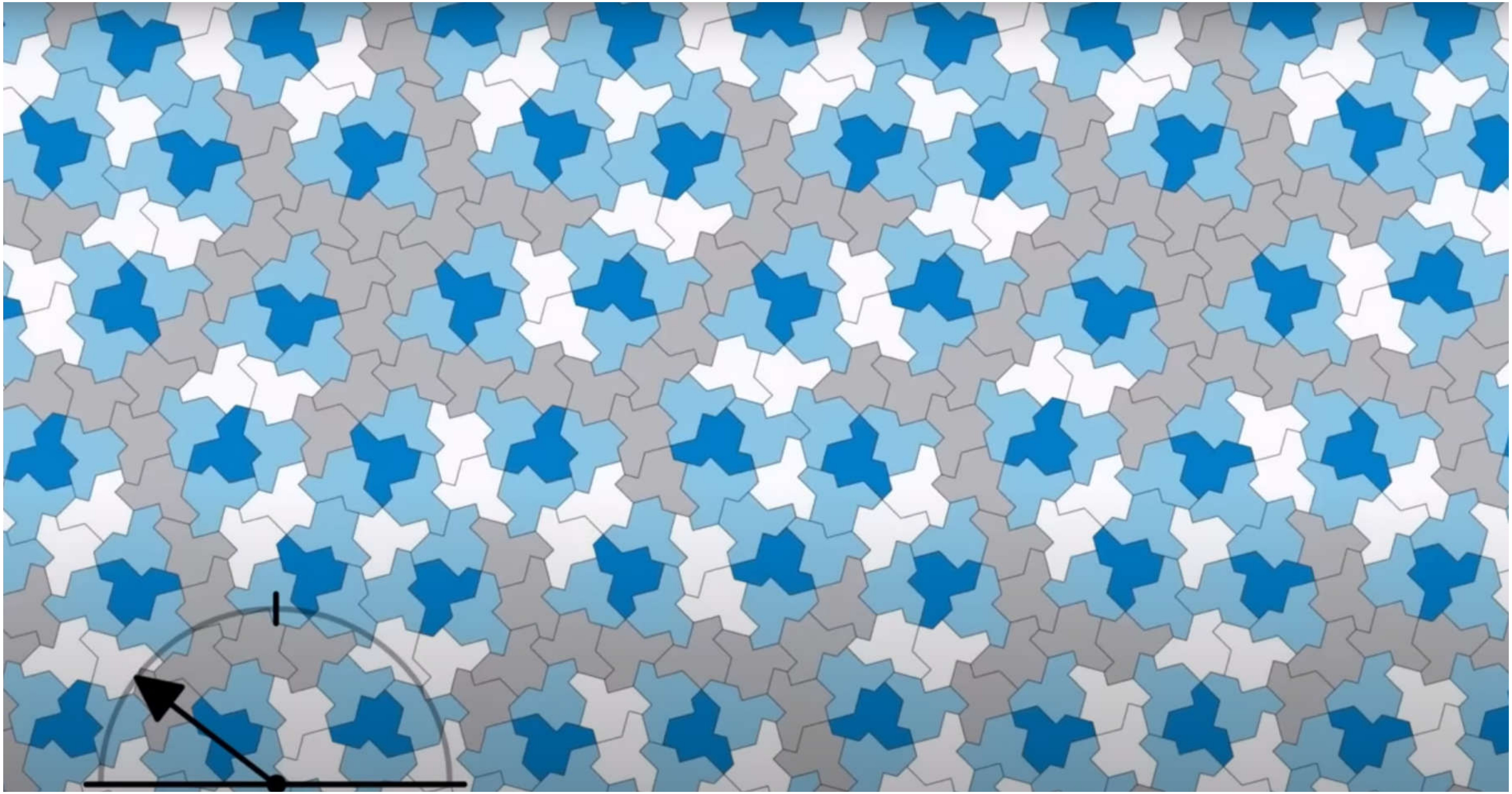
6 décembre 2022 : David Smith obtient la « tortue ».





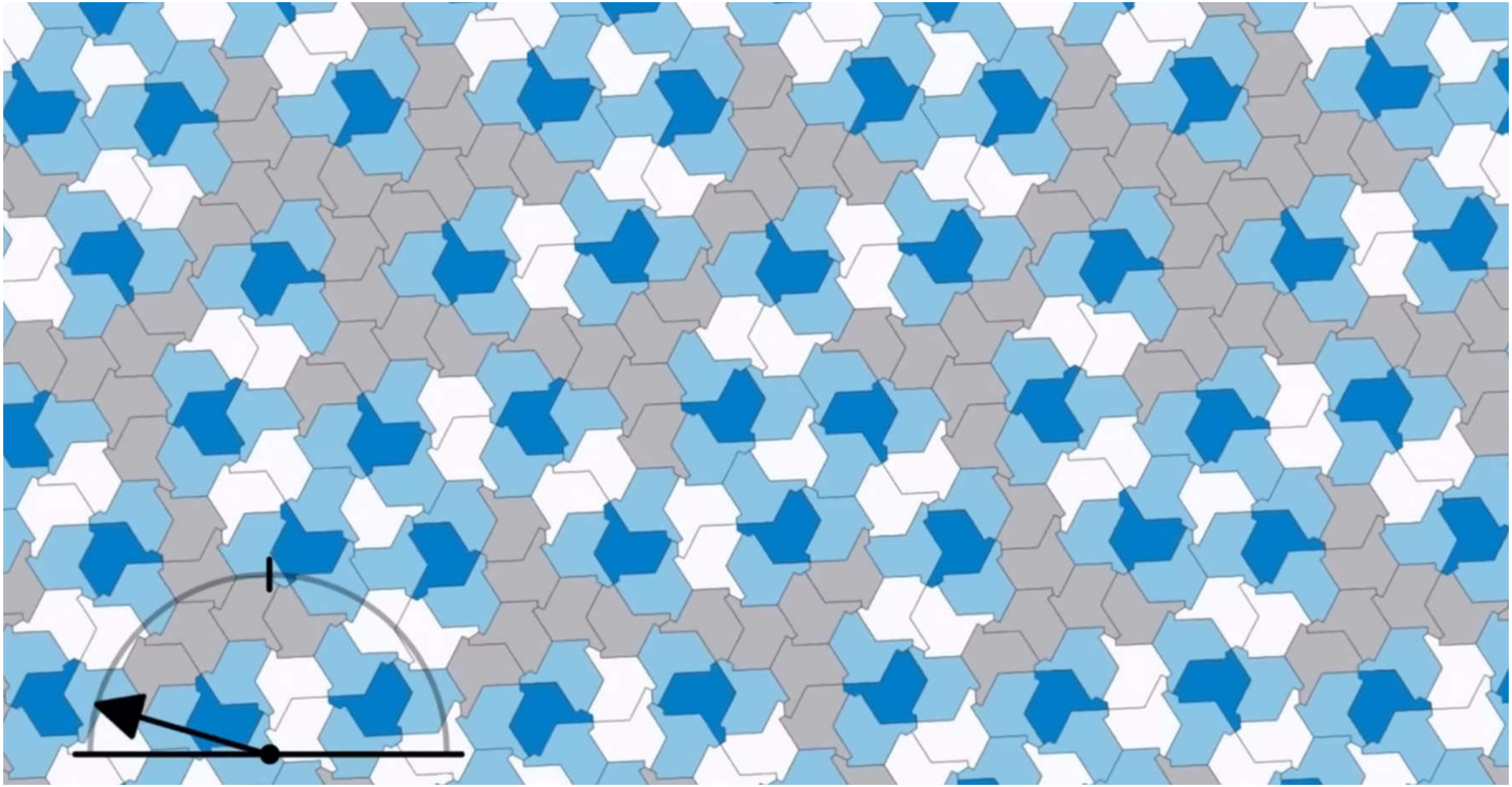
Pavage avec chapeaux

25 janvier 2023 : Myers relie ces formes dans un continuum.



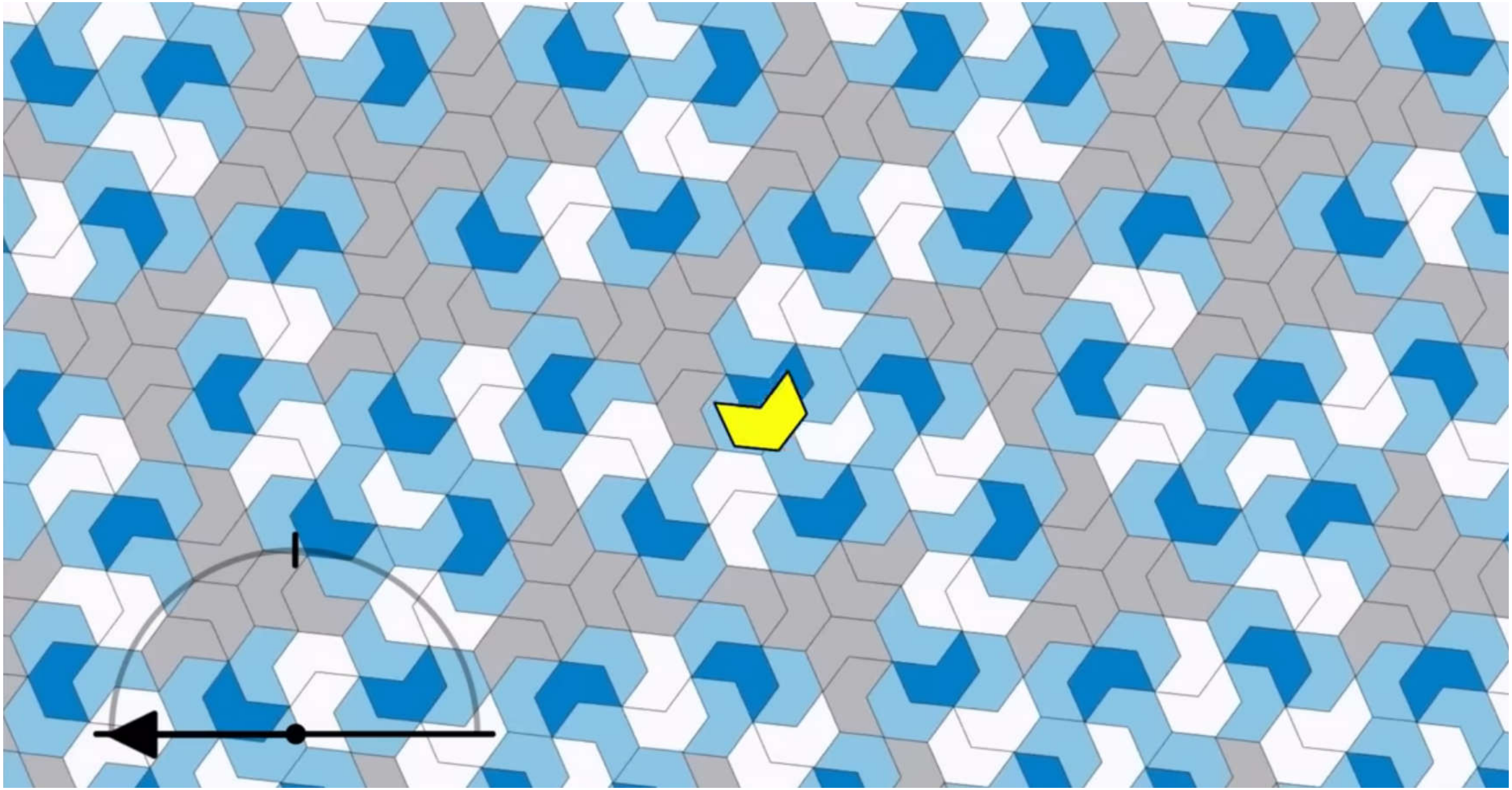
Une infinité de solutions !

Une monotuile apériodique qui répond au problème « ein Stein ».



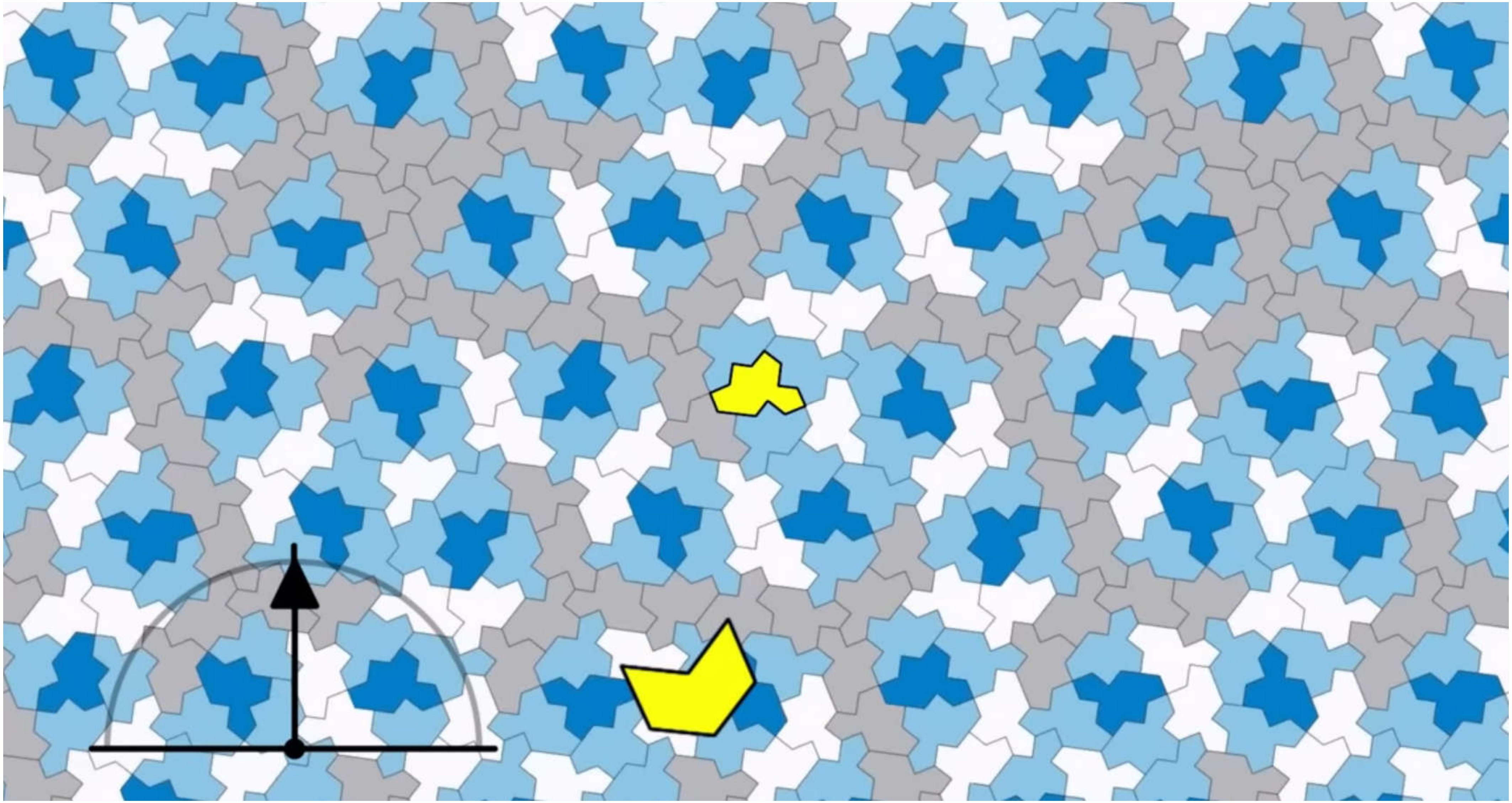
Le « chevron »

Cas extrême ; à exclure.



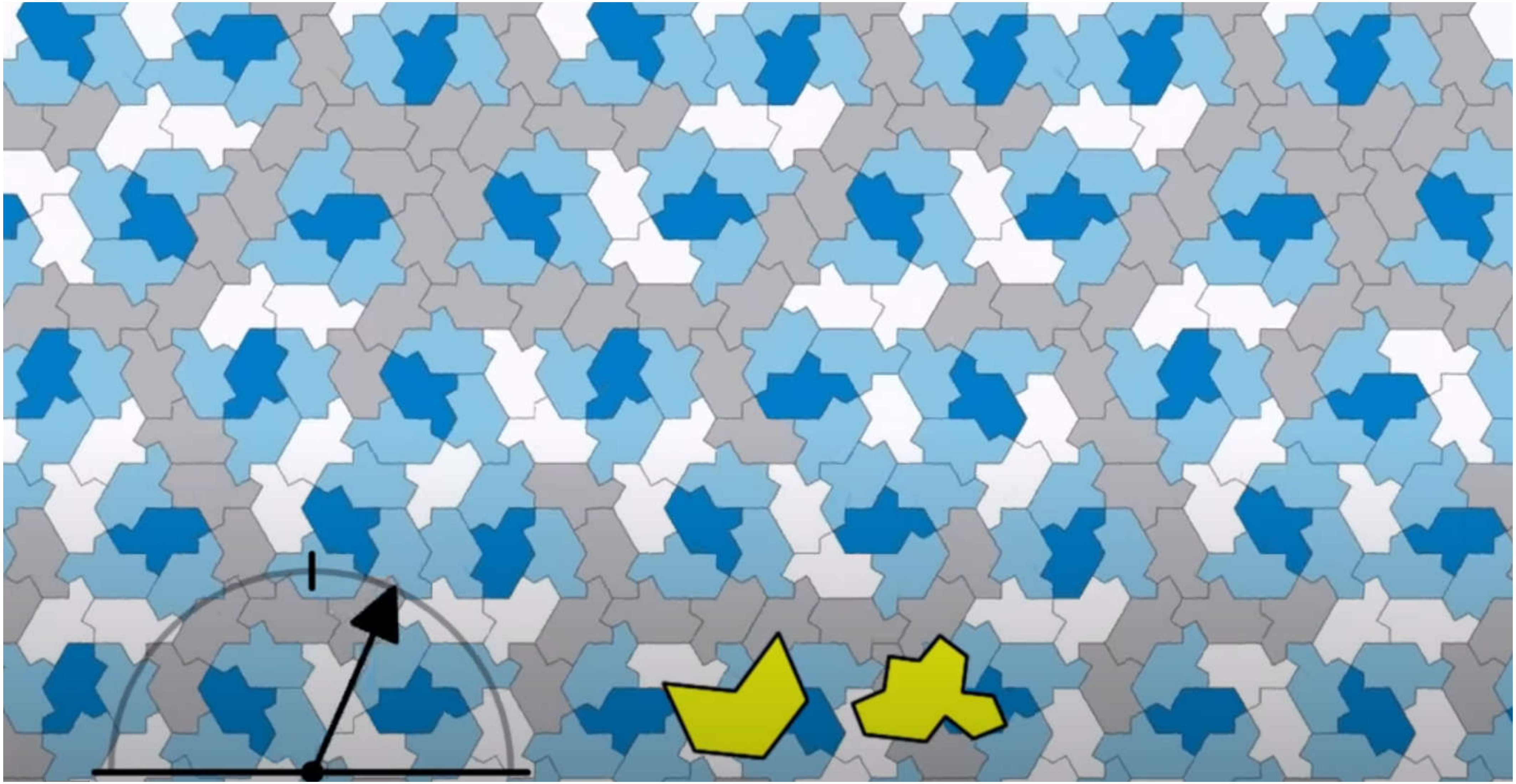
Le « spectre »

Cas médian ; à exclure (pavage périodique possible si réflexion).



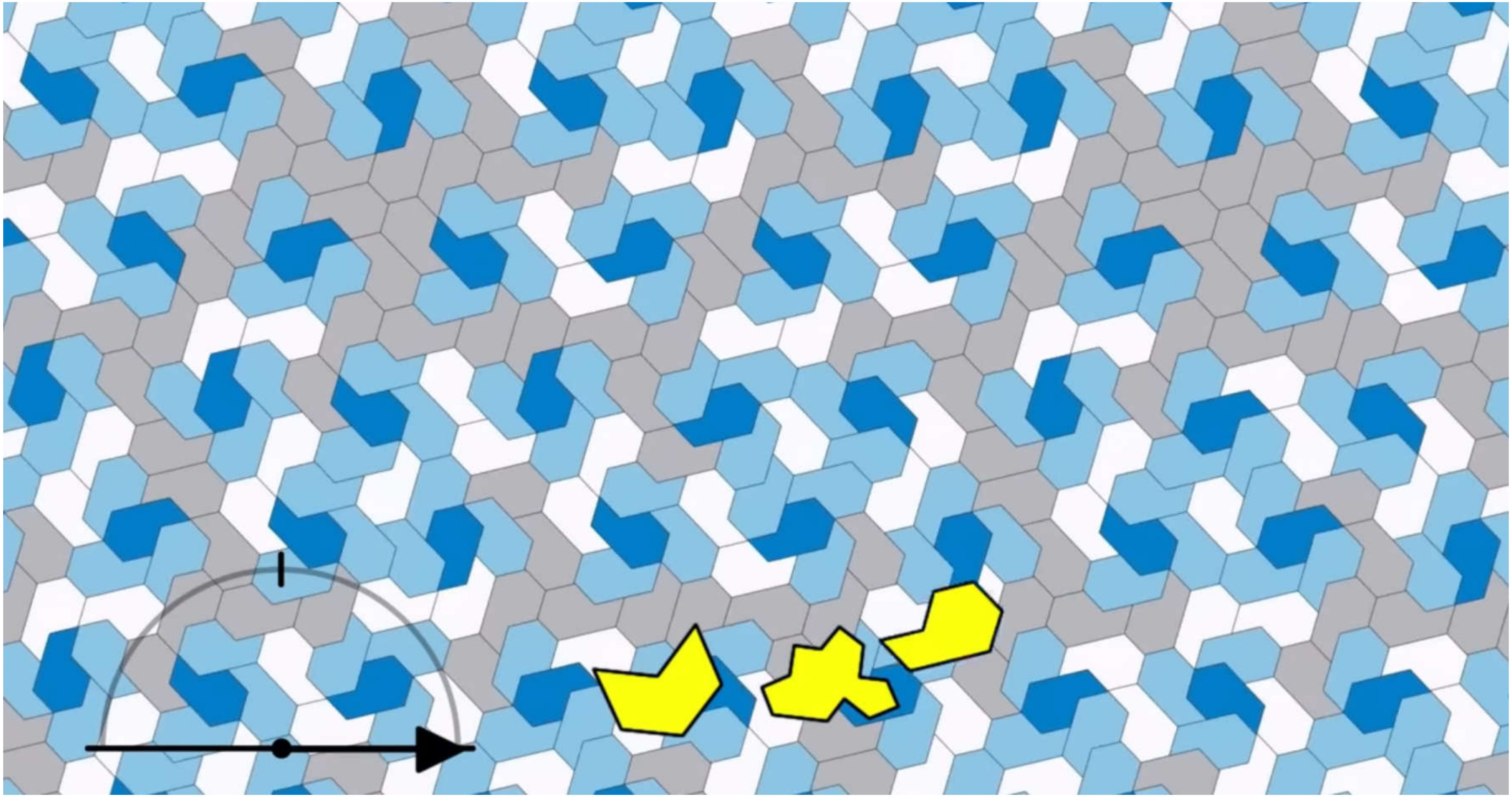
La tortue

Monotuile apériodique qui répond au problème « ein Stein ».



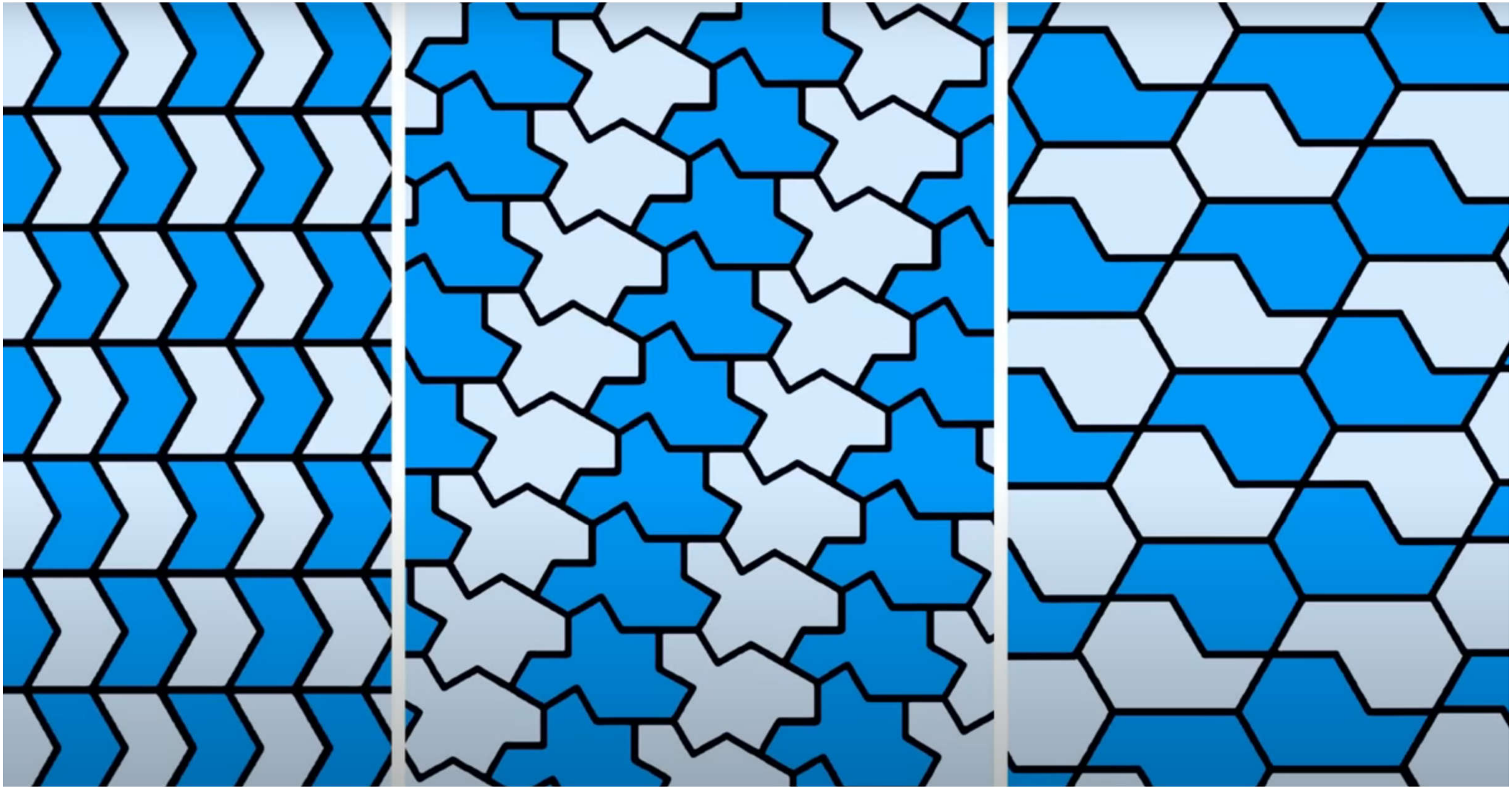
La « comète »

Cas extrême ; à exclure.



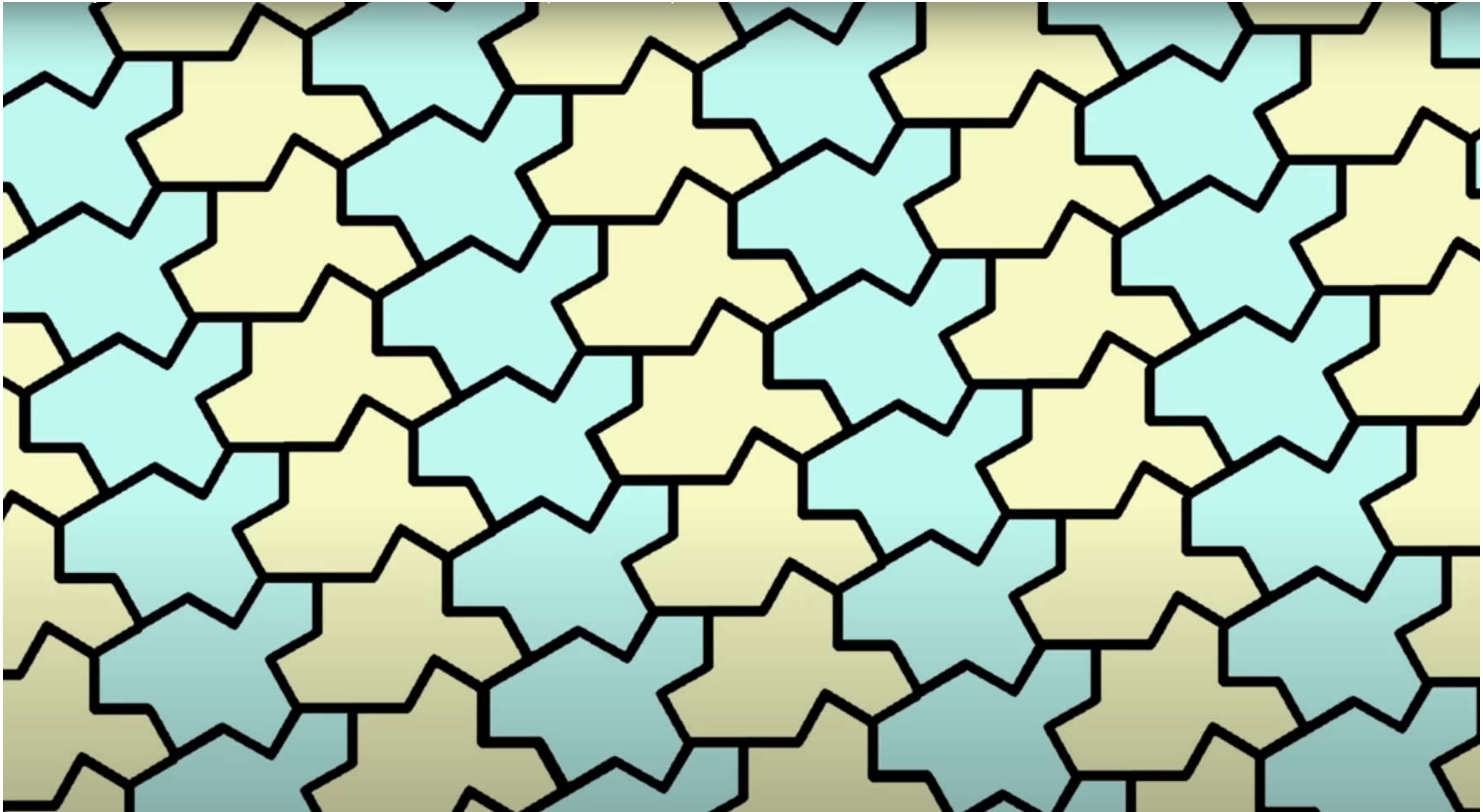
Les trois tuiles à exclure

Chevron, spectre et comète permettent un pavage périodique.

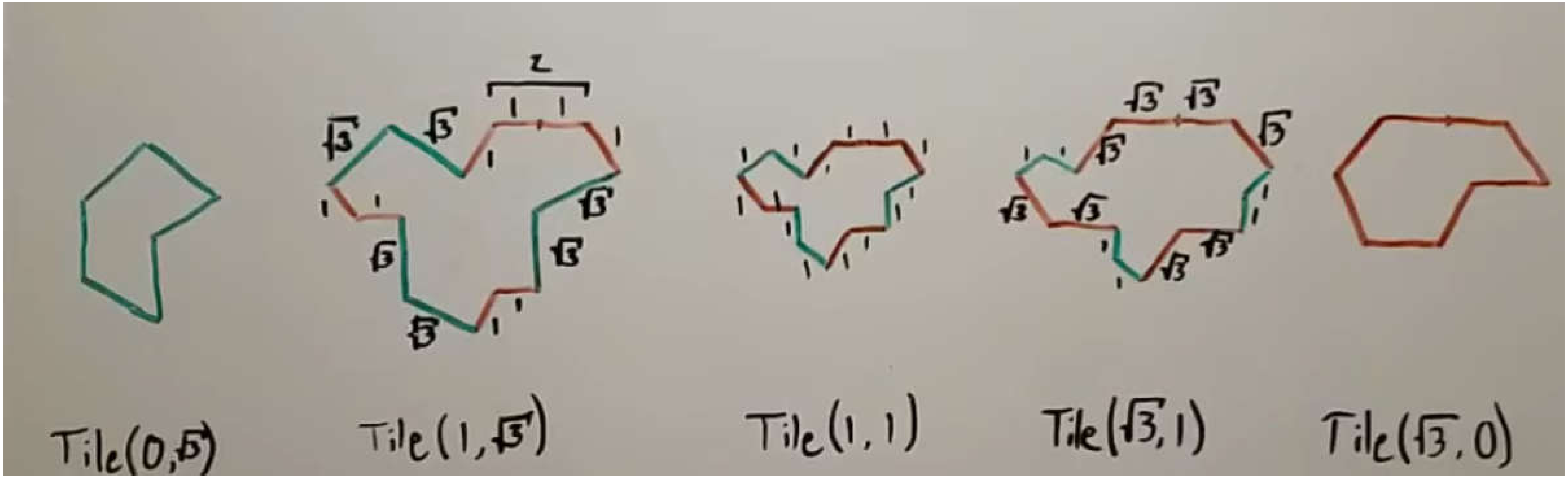


Vu de plus près

Un pavage périodique avec le spectre.



Les mesures



Tile(*a*, *b*) : tuile du continuum dont *a* et *b* (compris entre 0 et $\sqrt{3}$) sont les mesures des côtés.

Pour tout $k > 0$, Tile(*ka*, *kb*) similaire à Tile(*a*, *b*).

Une autre méthode de preuve !

La principale contribution scientifique de l'article :

introduire une nouvelle technique de preuve.

Par l'absurde : on considère un pavage périodique du plan avec des chapeaux. Alors on peut trouver deux pavages correspondants, l'un avec des chevrons, l'autre avec des comètes. Ces deux nouveaux pavages seront eux aussi périodiques, et les translations qui les laissent invariants doivent être « les mêmes ».
Mais, en comparant les grilles sous-jacentes, il est impossible d'obtenir des points dont les coordonnées correspondent à ces translations. Contradiction ! (Argument totalement élémentaire.)

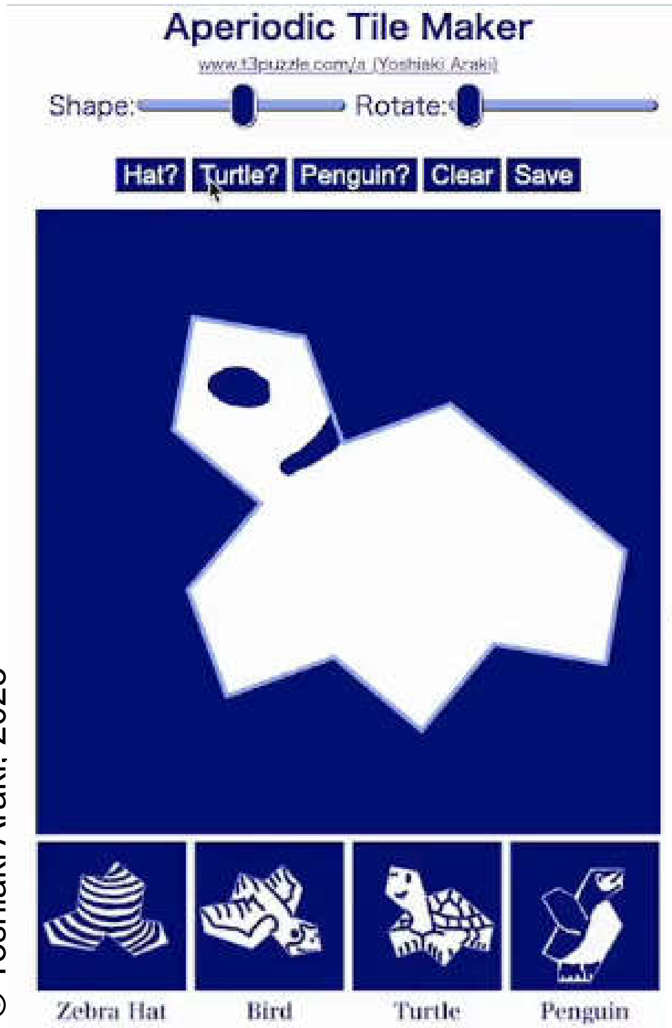
S'adapte aux autres tuiles de la famille (sauf le spectre, donc).

Une monotuile apériodique chirale

21 mars 2023 : article mis en ligne. Retentissement planétaire.

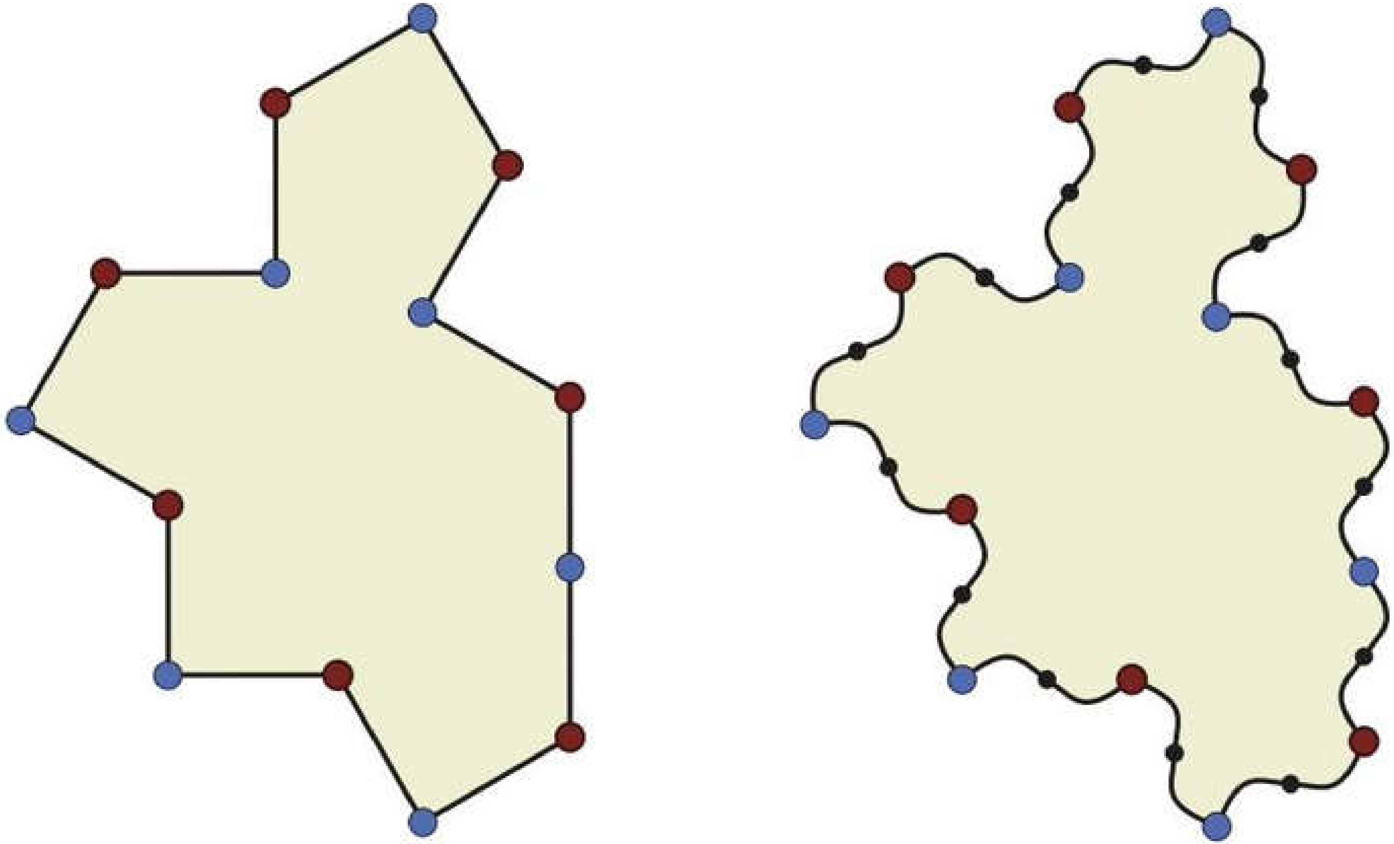
24 mars 2023 : Yoshiaki Araki poste ses créations.

26 mars 2023 : David Smith revisite le spectre !



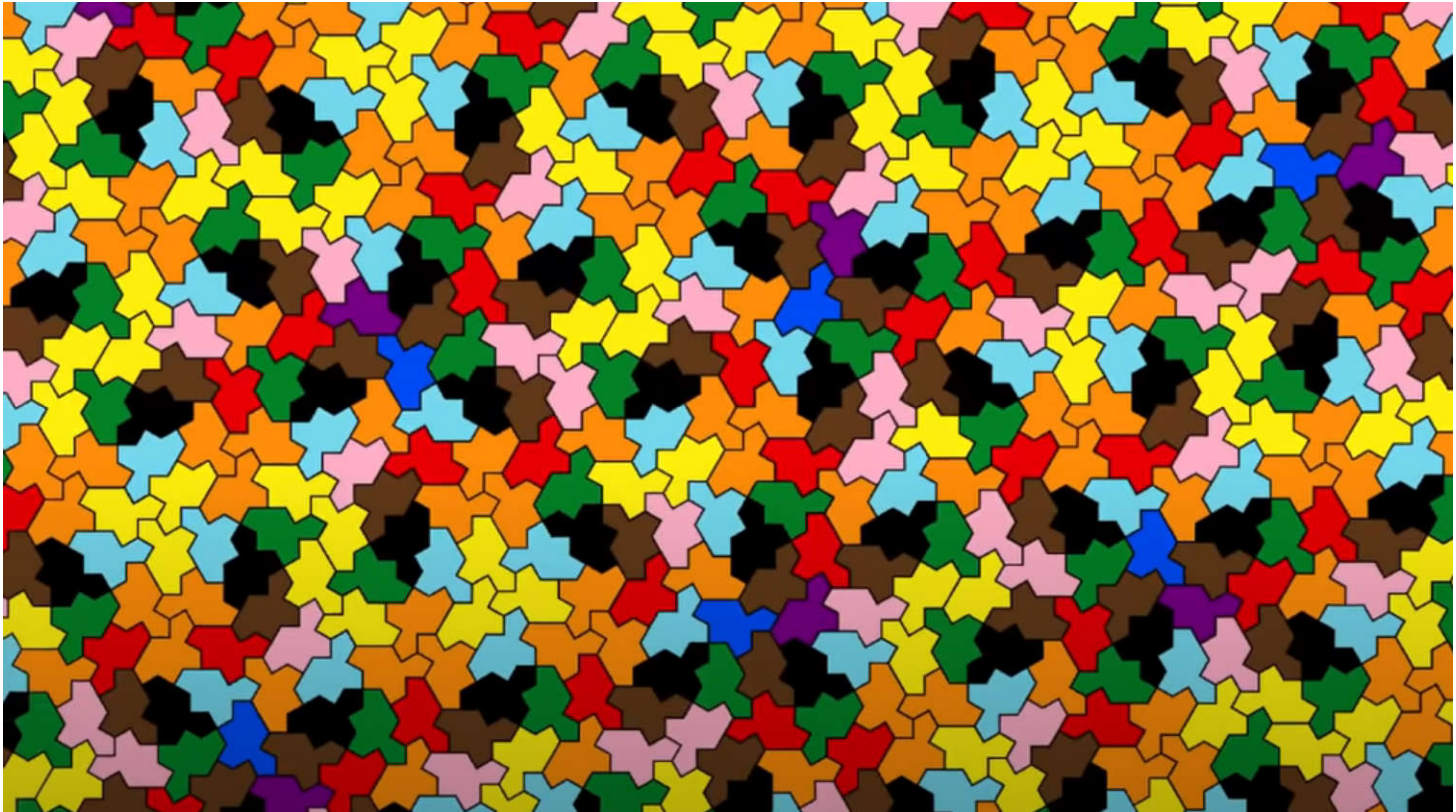
© Yoshiaki Araki, 2023

© David Smith, Joseph Samuel Myers,
Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, 2023



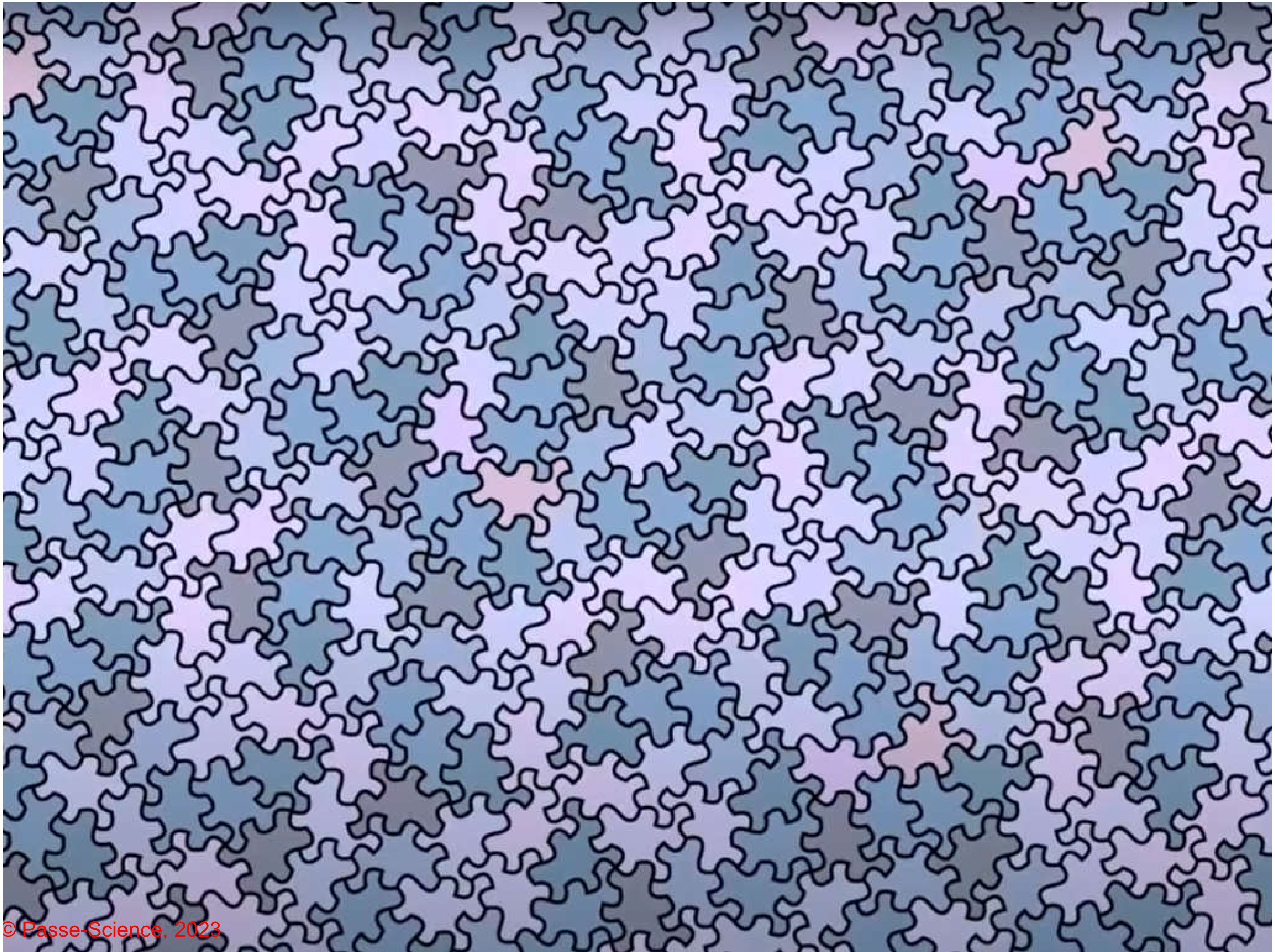
C’était le spectre !

Il fallait **interdire** tout retournement du spectre !



À partir du spectre

Une « vraie » monotuile apériodique chirale, simplement connexe, homéomorphe au disque, sans règle d'assemblage.



La recherche relancée !

Classification des polygones non convexes permettant de paver le plan et des polygones convexes autorisant à paver le plan de manière anisoédrique.

Caractériser les ensembles de tuiles qui pavent le plan.

Liens avec la complexité algorithmique et la décidabilité.

Nombre de pavages k-uniformes du plan (pour $k \geq 7$).

Conjecture de Heesch.

Conjectures sur les polyminos et les polyformes.

Recherches sur les motifs des pavages « marqués »…

D’autres défis en grande dimension

Autre révolution en 2023 : Rachel Greenfeld et Terence Tao invalident la *conjecture du pavage périodique* (vers 1975). En dimension « suffisamment grande », il existe un ensemble fini de tuiles qui permettent de réaliser des pavages apériodiques de l’espace euclidien **uniquement à l’aide de translations** !

Problèmes 3 et 18 de Hilbert en « grande » dimension.

Découpes géométriques et leurs généralisations.

Références

Les deux articles de 2023

An aperiodic monotile. David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, Arxiv 2303.10798, 2023 (soumis pour publication).

A chiral aperiodic monotile. David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, Arxiv 2305.17743, 2023 (soumis pour publication).

Outils en lien avec les deux prépublications :
https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat,
https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre.

Les *blogs* des auteurs

« Hedraweb – Polyhedra, shapes, tessellations and patterns ». David Smith, 2016–2023.

« Hedraweb – Polygons, life patterns, fractals and other stuff ». David Smith, 2023–…

« Isohedral ». Craig Kaplan, 2021–…

Articles de vulgarisation

La quête du pavé apériodique unique. Jean-Paul Delahaye, *Pour La Science* 433, 2013.

An aperiodic monotile exists! Christian Lawson-Perfect, Katie Steckles et Peter Rowlett, *The Aperiodical*, 2023.

Hobbyist Finds Math's Elusive 'Einstein' Tile. Erica Klarreich, *Quanta Magazine*, 2023.

Math Patterns That Go On Forever but Never Repeat. Patrick Honner, *Quanta Magazine*, 2023.

Les pliages en origami

La tortue qui prenait son chapeau pour Einstein. Florentin Waligorski et Enka Blanchard, *Maths en cartes Express*, Comité international des jeux mathématiques, 2023.

The hat aperiodic monotile origami.
Turtle aperiodic monotile origami.
Florentin Waligorski, Flow Motion, 3’47 et 3’06, 2023.

Pavages de Penrose et nombres de Heesch

Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. Martin Gardner, *Scientific American* 236 (1), janvier 1977.

5 and Penrose Tiling. Numberphile, 7’00, 2012.

Heesch Numbers and Tiling. Numberphile, 9’19, 2019.

Heesch Numbers (extra footage). Numberphile, 2’17, 2019.

Vidéos en ligne (1)

Un motif apériodique !
Pourquoi le Chapeau est-il apériodique ?
Thomaths, 9’21 et 12’24, 2023.

La première tuile apériodique de l’histoire ! The Hat.
Une nouvelle tuile apériodique : le spectre !
Passe-science, 23’41 et 14’57, 2023.

The Infinite Pattern That Never Repeats. Veritasium, 21’11, 2020.

Vidéos en ligne (2)

A Hobbyist Just Solved a 50-Year-Old Math Problem (Einstein Tile). Up and Atom, 17’58, 2023.

The Shiny New Shape That Aperiodically Tessellates!
Finally, a true Aperiodic Monotile!
Ayliean MacDonald, 5’35 et 3’16, 2023.

Aperiodic Monotile – Mad as a Hat.
Chiral Aperiodic Monotile – Spectre in the Machine.
Mostly Mental, 14’34 et 12’43, 2023.

Vidéos en ligne (3)

A New Tile in Newtyle.
Discovery of the Aperiodic Monotile.
Numberphile, 26’50 et 31’03, 2023.

Ein Stein Revisited – The Spectre Tile. G4G Celebration, 53’07, 2023.

The hat: an aperiodic monotile. Oxford Mathematics Public Lectures, 57’38, 2023.

Exploring the hat polykite aperiodic monotile (part I, part II). Pembesita, 18’22 et 17’42, 2023.

Chapeau, l’artiste !