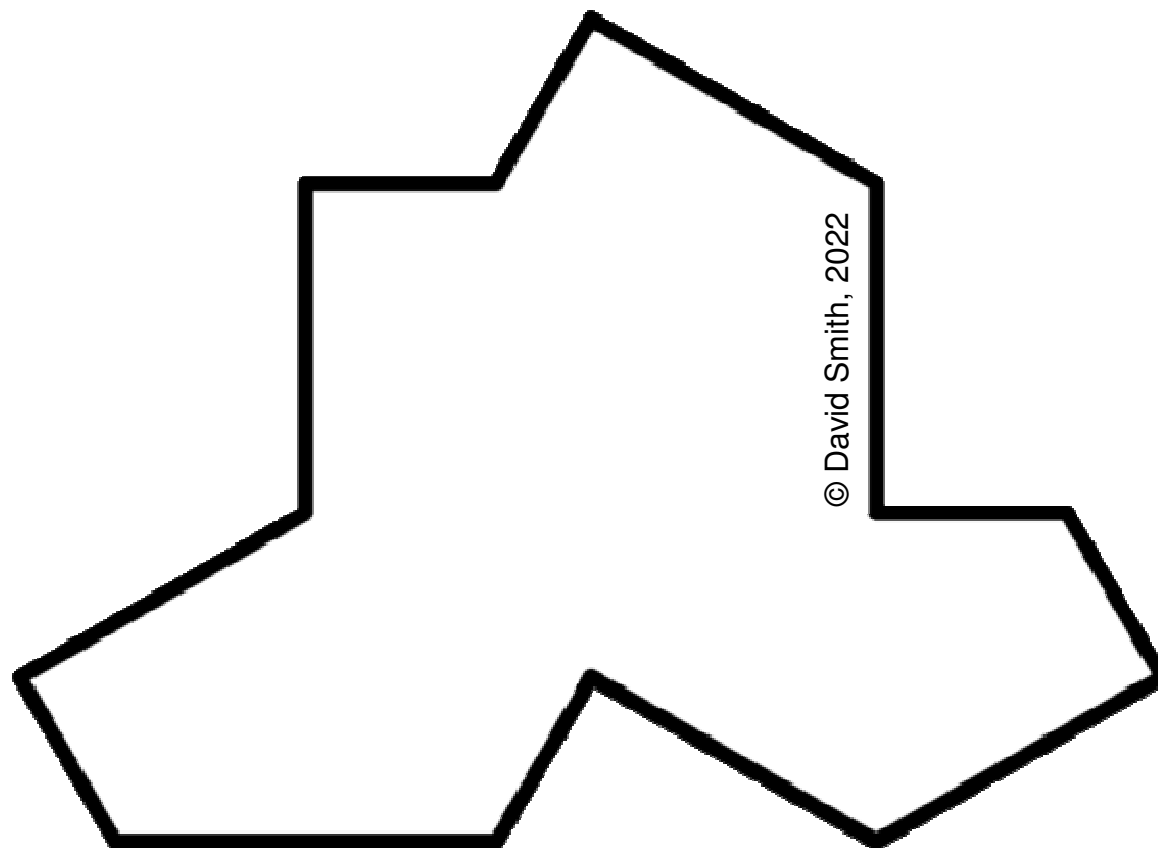


Chapeau, les pavages apériodiques du plan !

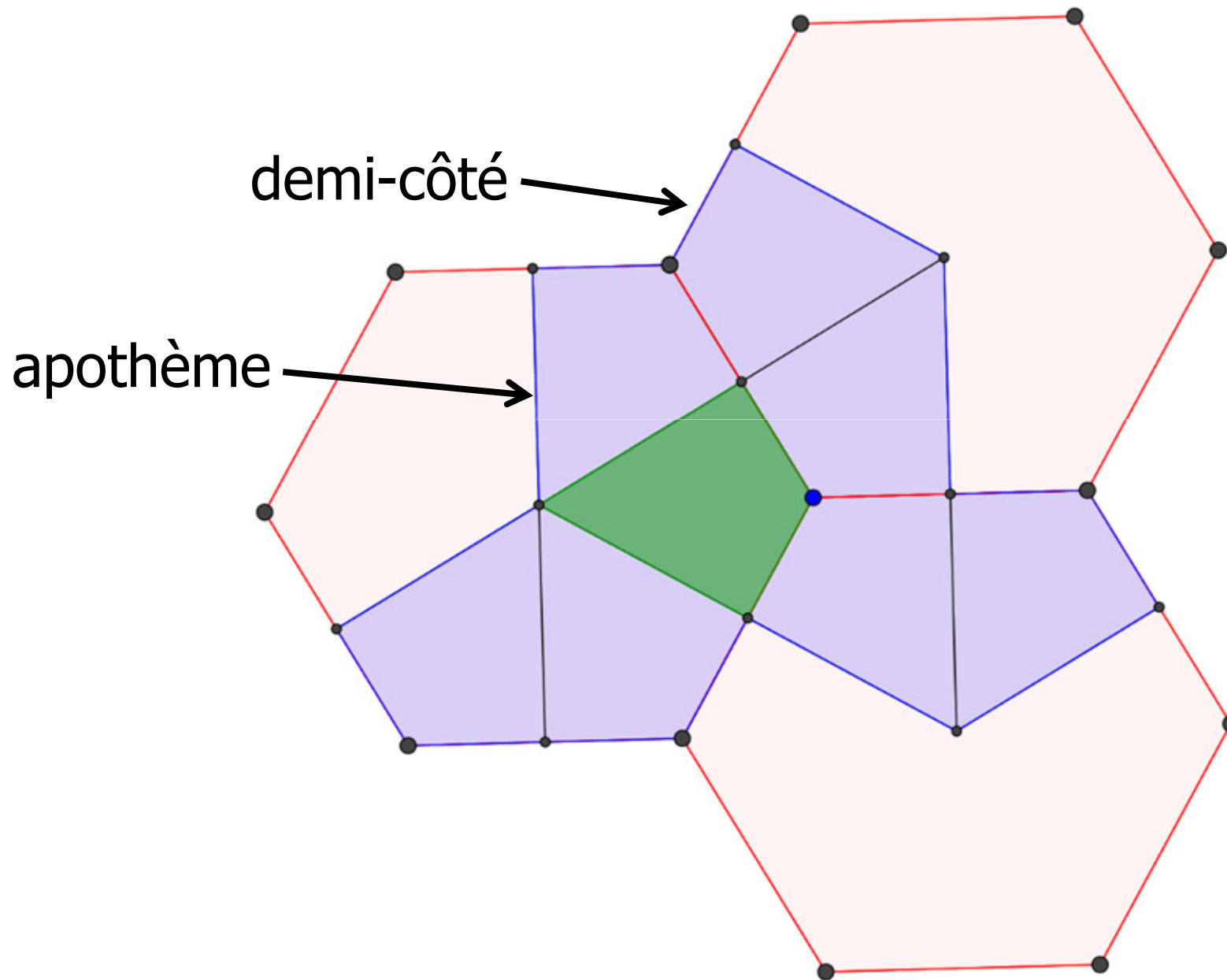


Édouard Thomas, Kafemath
Gathering For Gardner

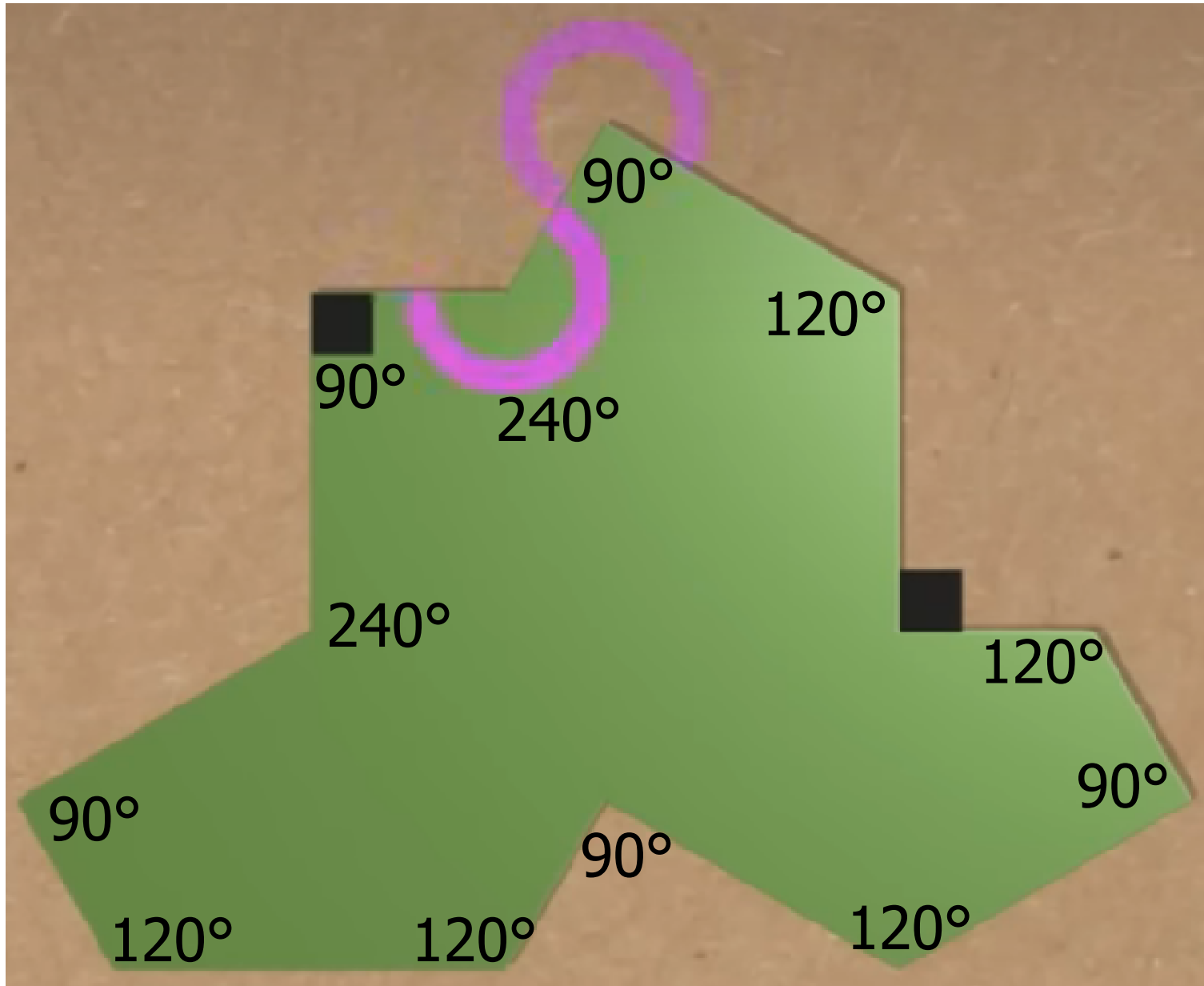
La Commune Libre D'Aligre
Samedi 21 octobre 2023



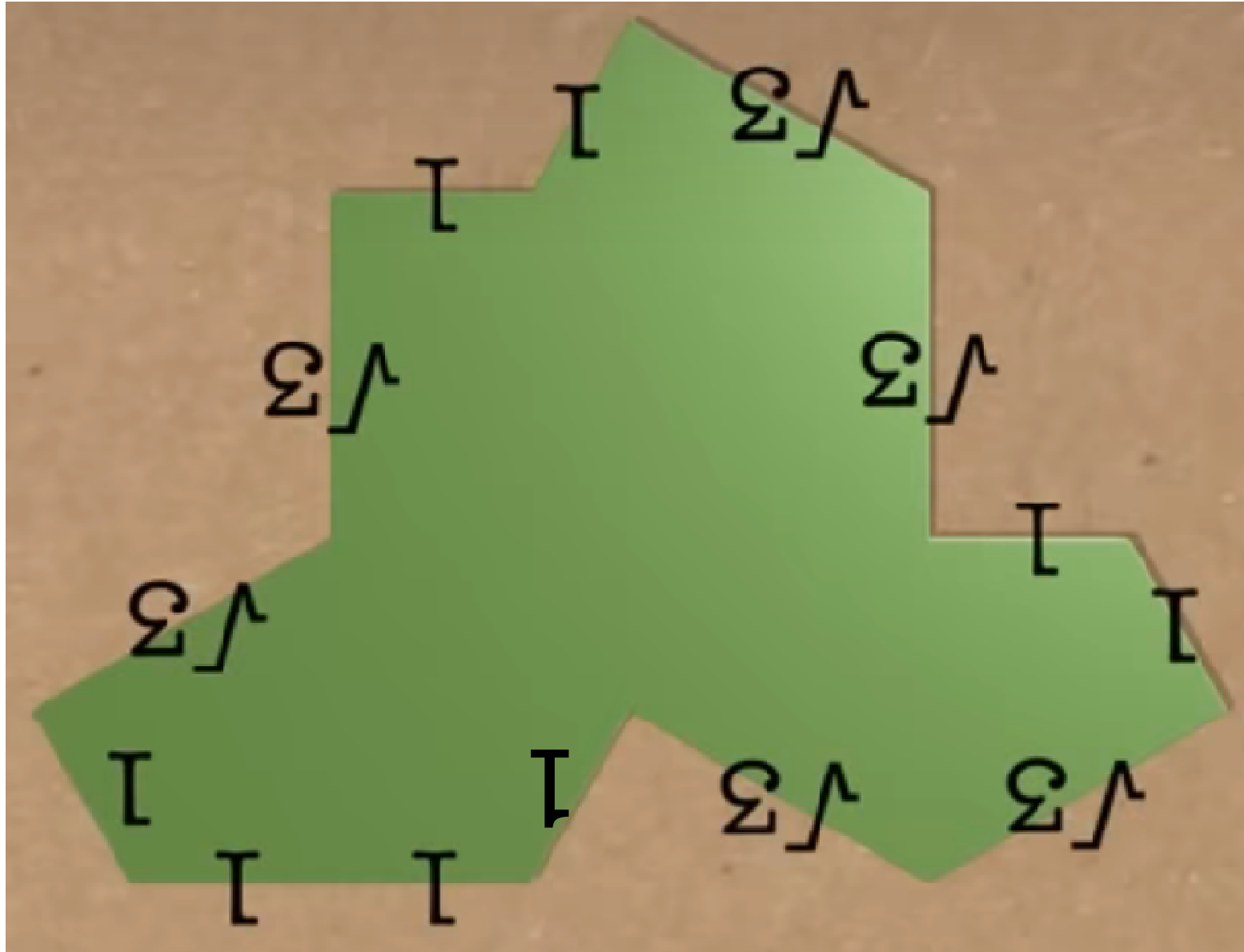
La construction



Les angles



Les longueurs



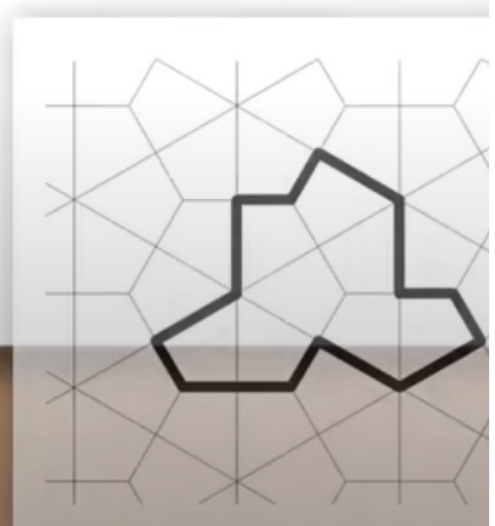
La première apparition du chapeau

© David Smith, 2022 / Numberphile, 2023

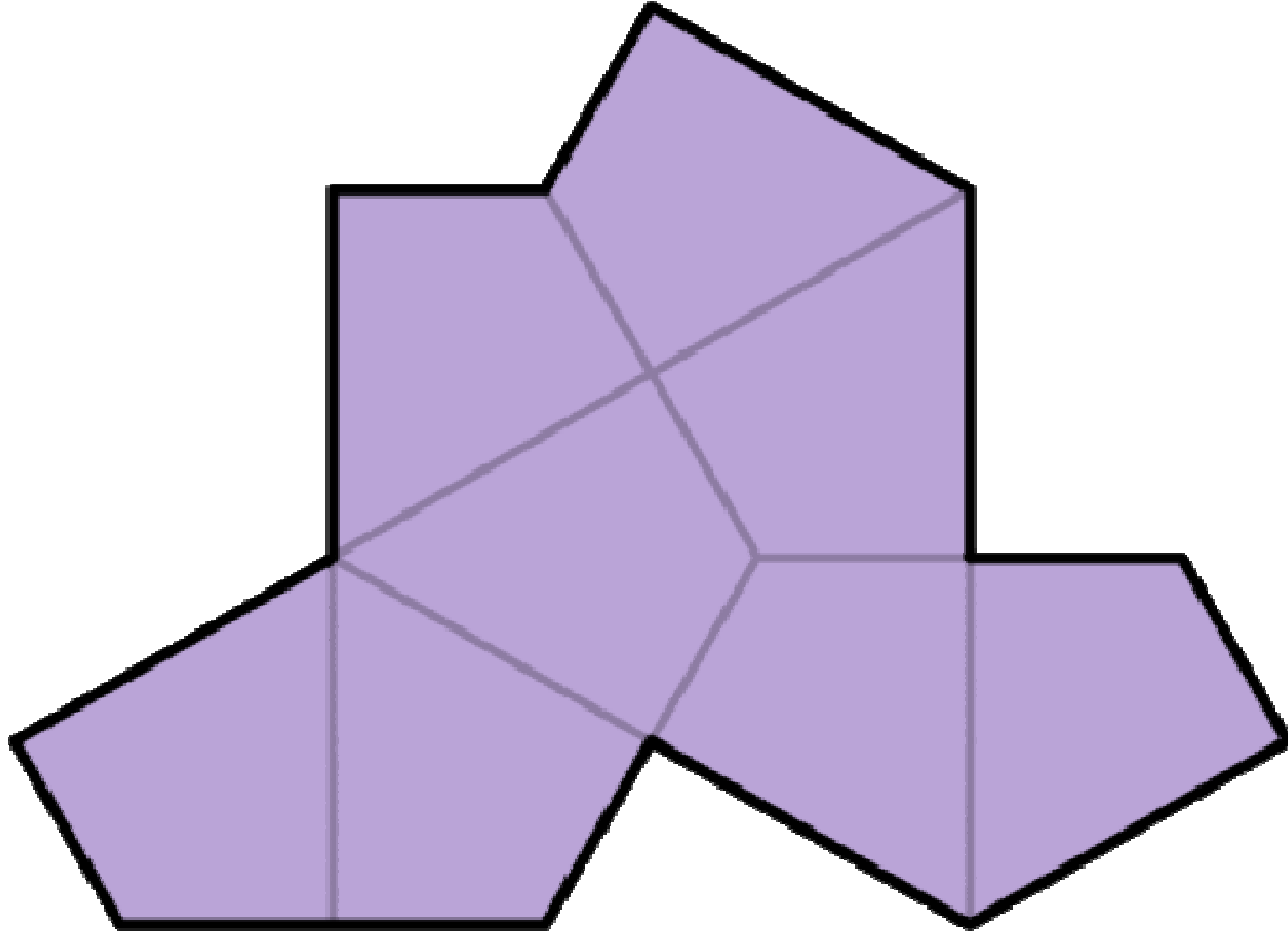
From: David Smith

To: Craig Kaplan

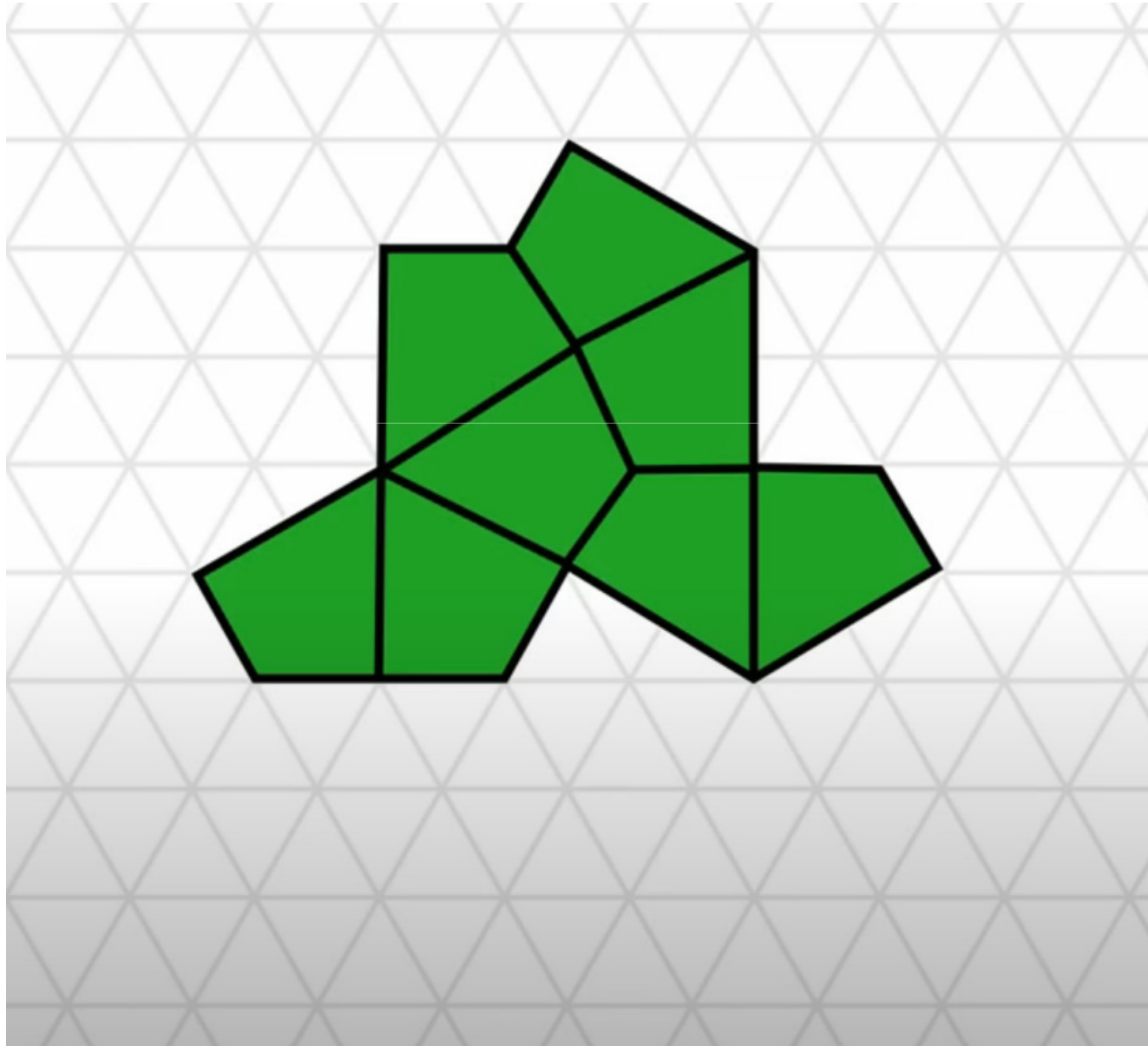
Can the 'CryptoMiniSat' program deal with drafters or kites (from regular hexagons)? Below is one such shape composed of eight kites... It has a Heesch number of at least three, if it's a non-tiler (I couldn't get it to tile periodically).



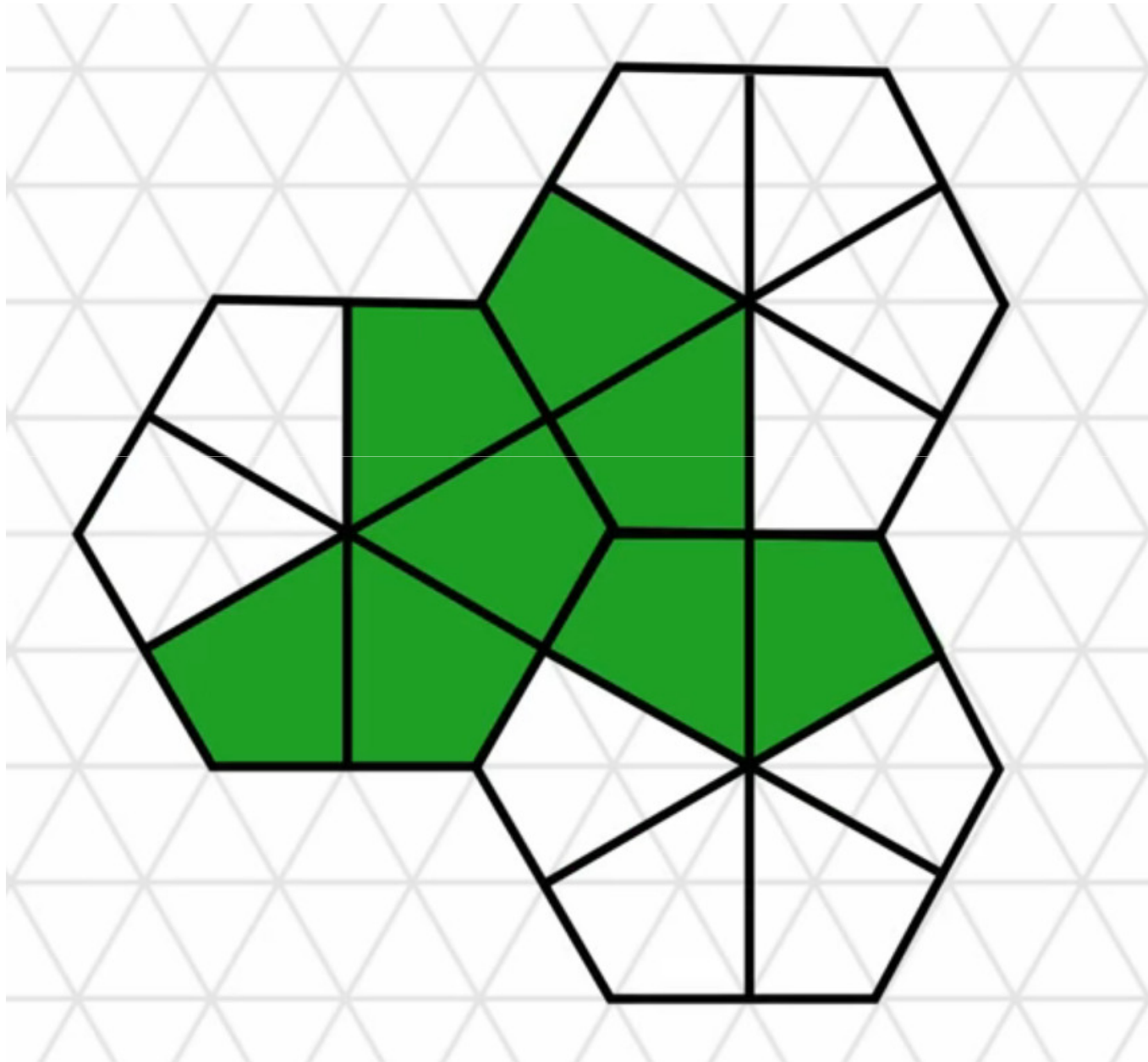
Le chapeau



Sur son réseau triangulaire

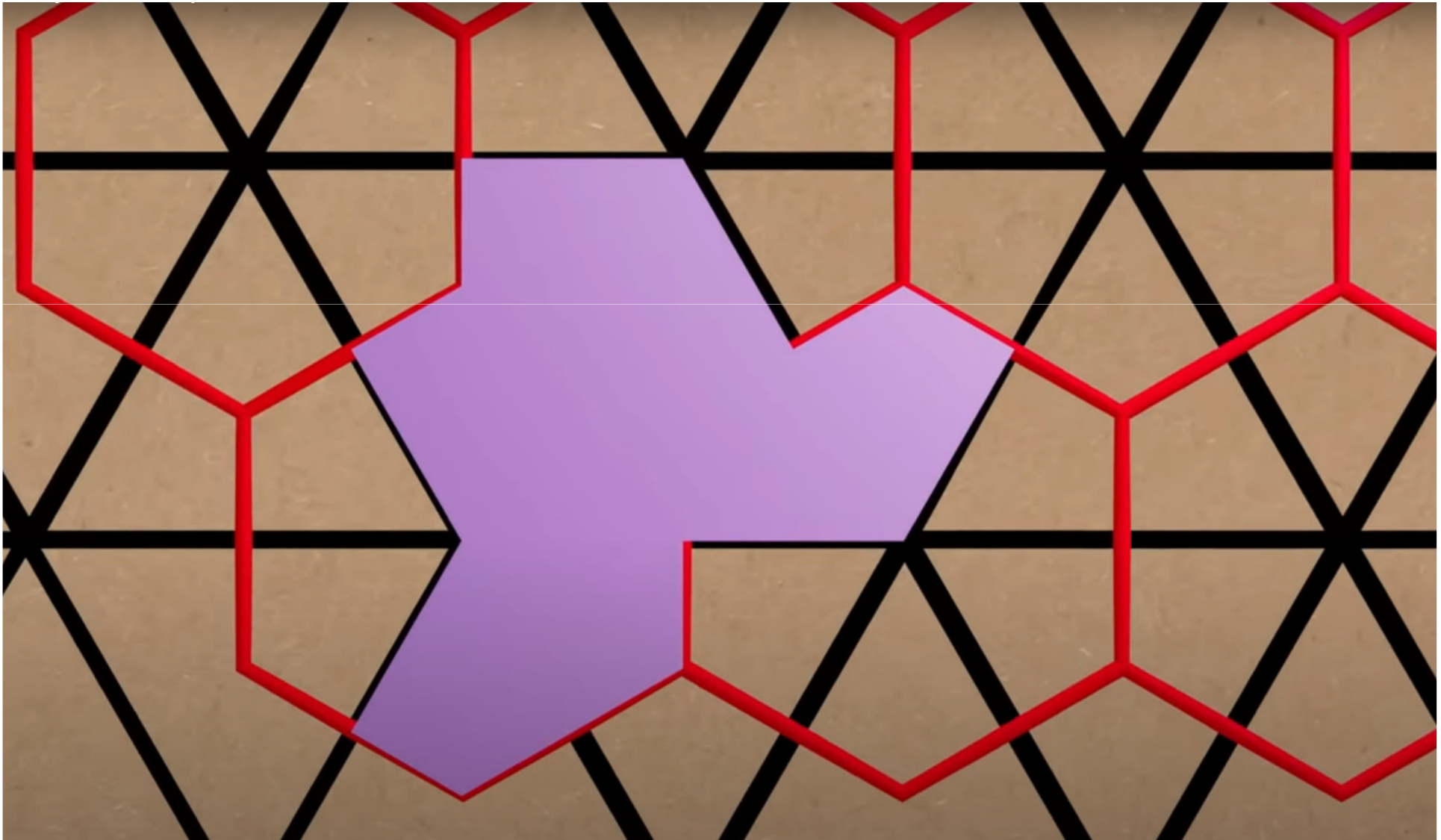


À partir des trois hexagones



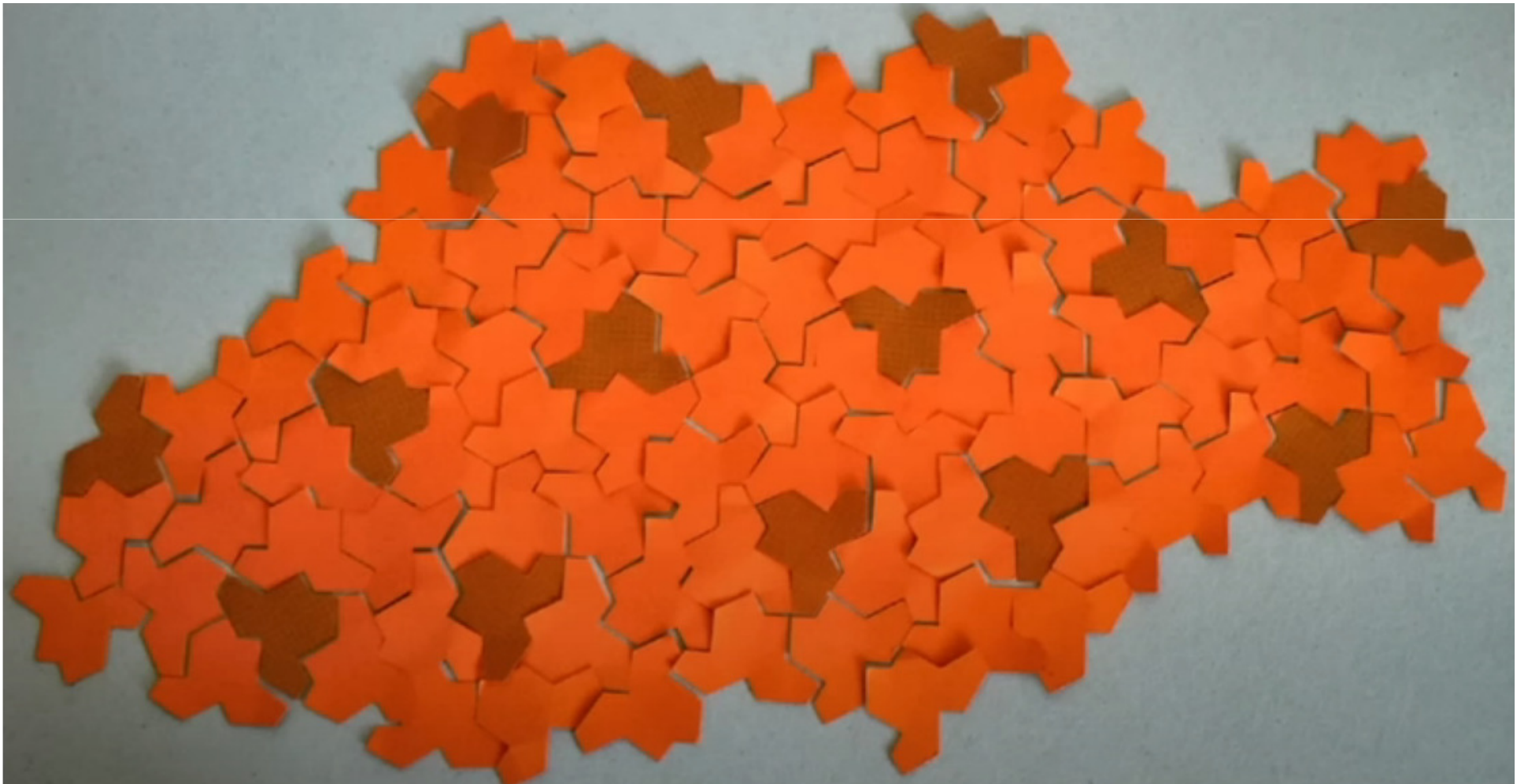
Sans les traits de construction

© Numberphile, 2023



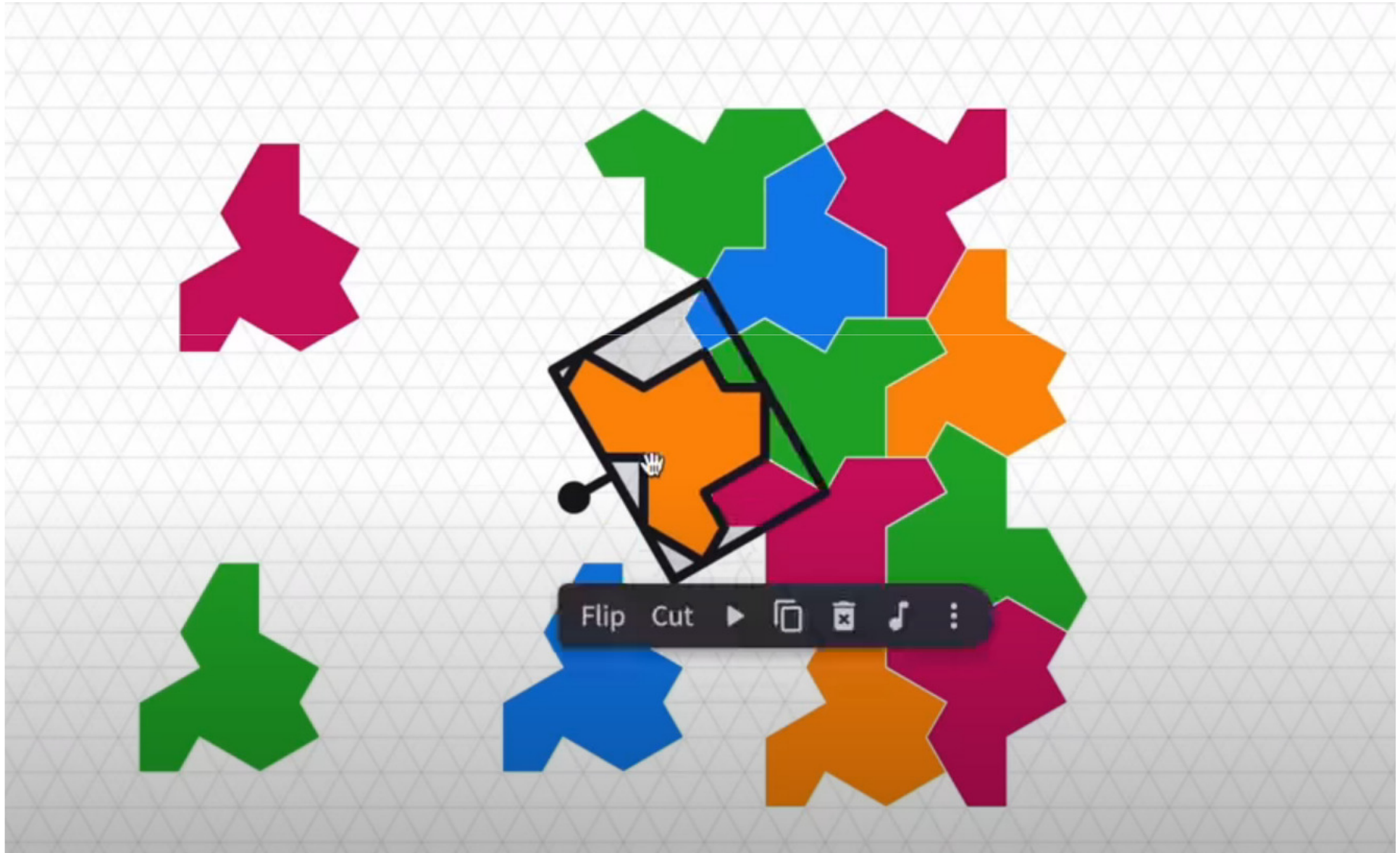
Le premier pavage

© David Smith, 2022

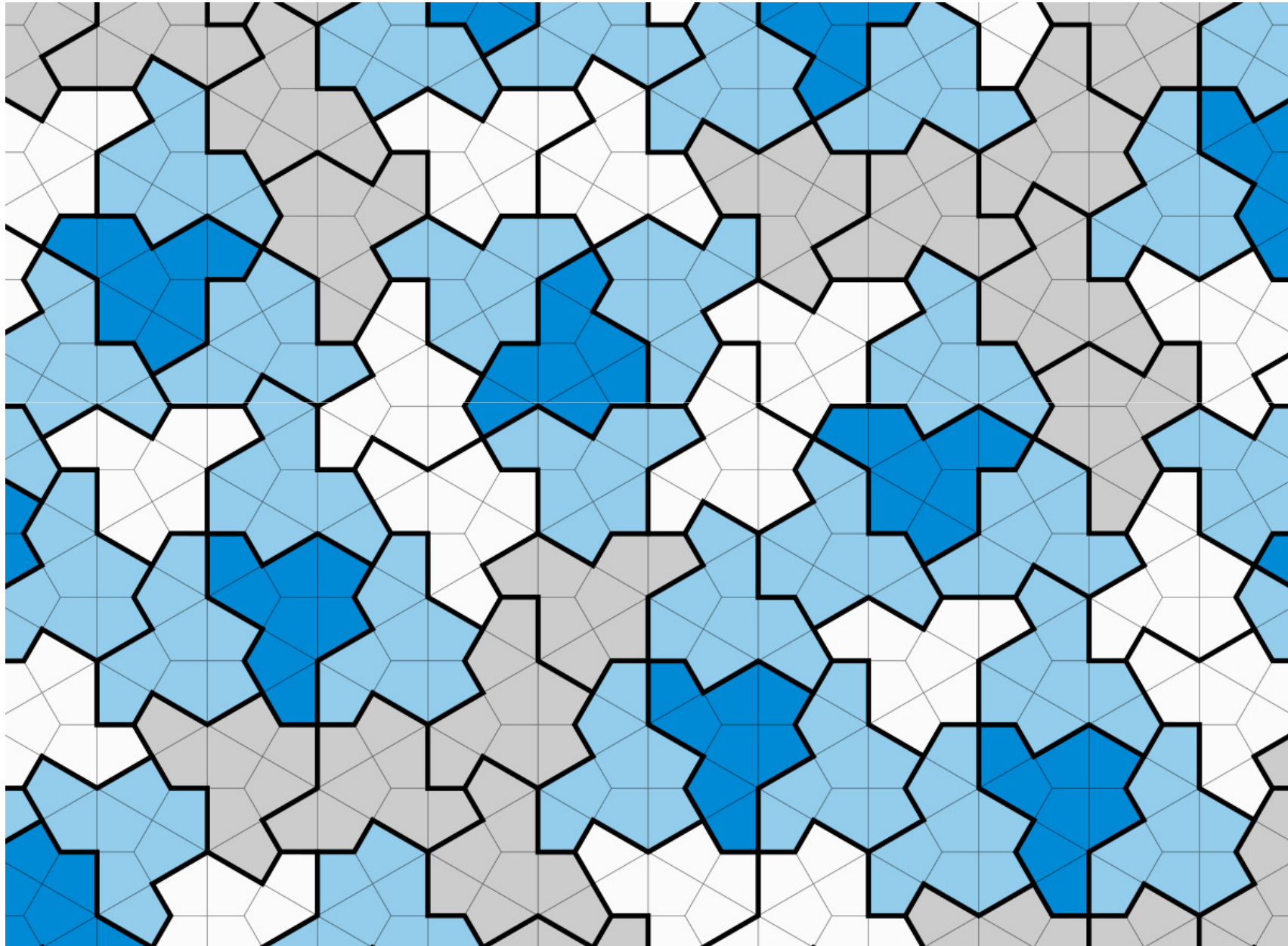


Trouvé par tâtonnement

© Up and Atom, 2023

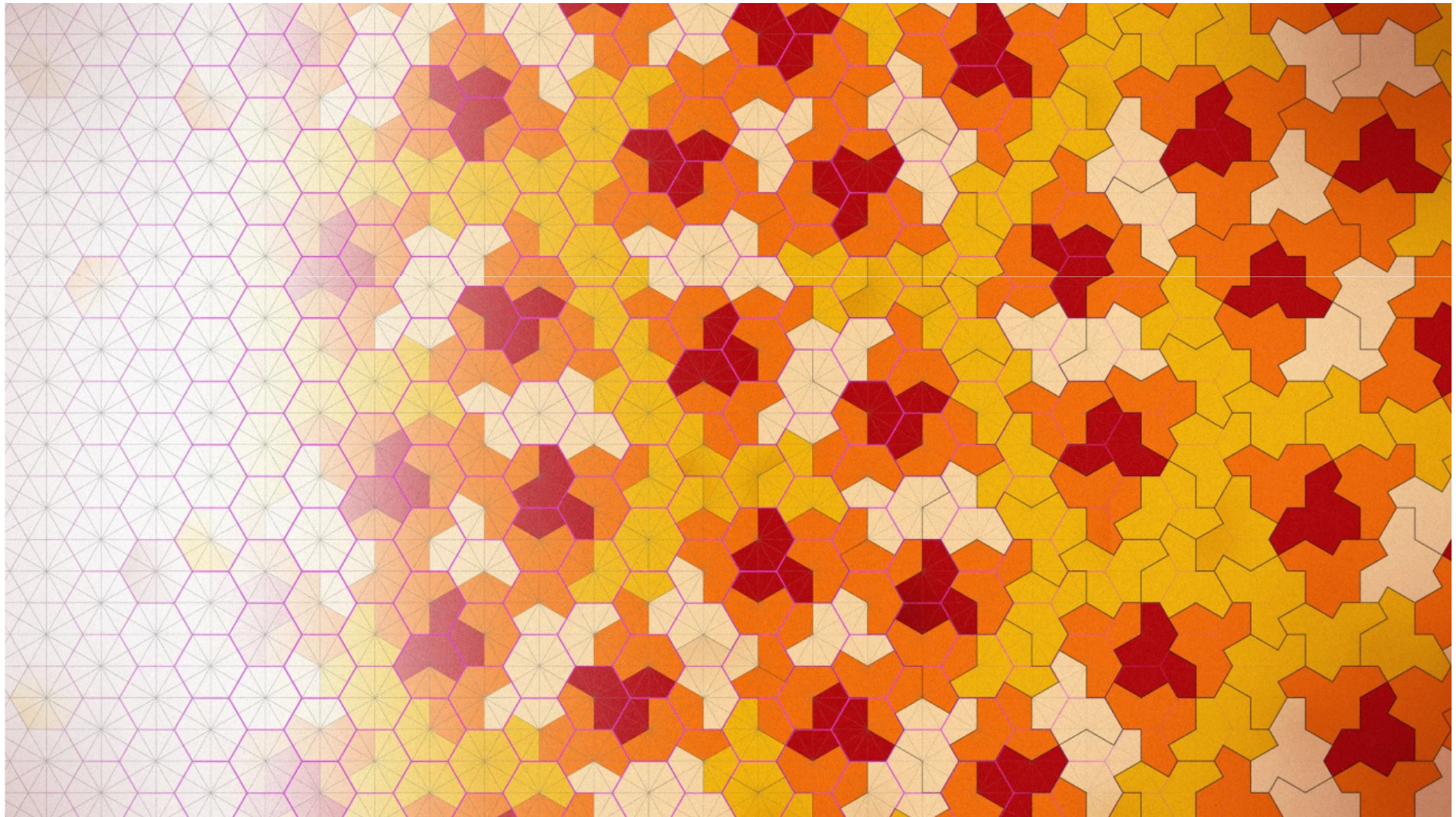


Le pavage apériodique



Sur un réseau hexagonal

© Samuel Velasco / *Quanta Magazine*, 2023

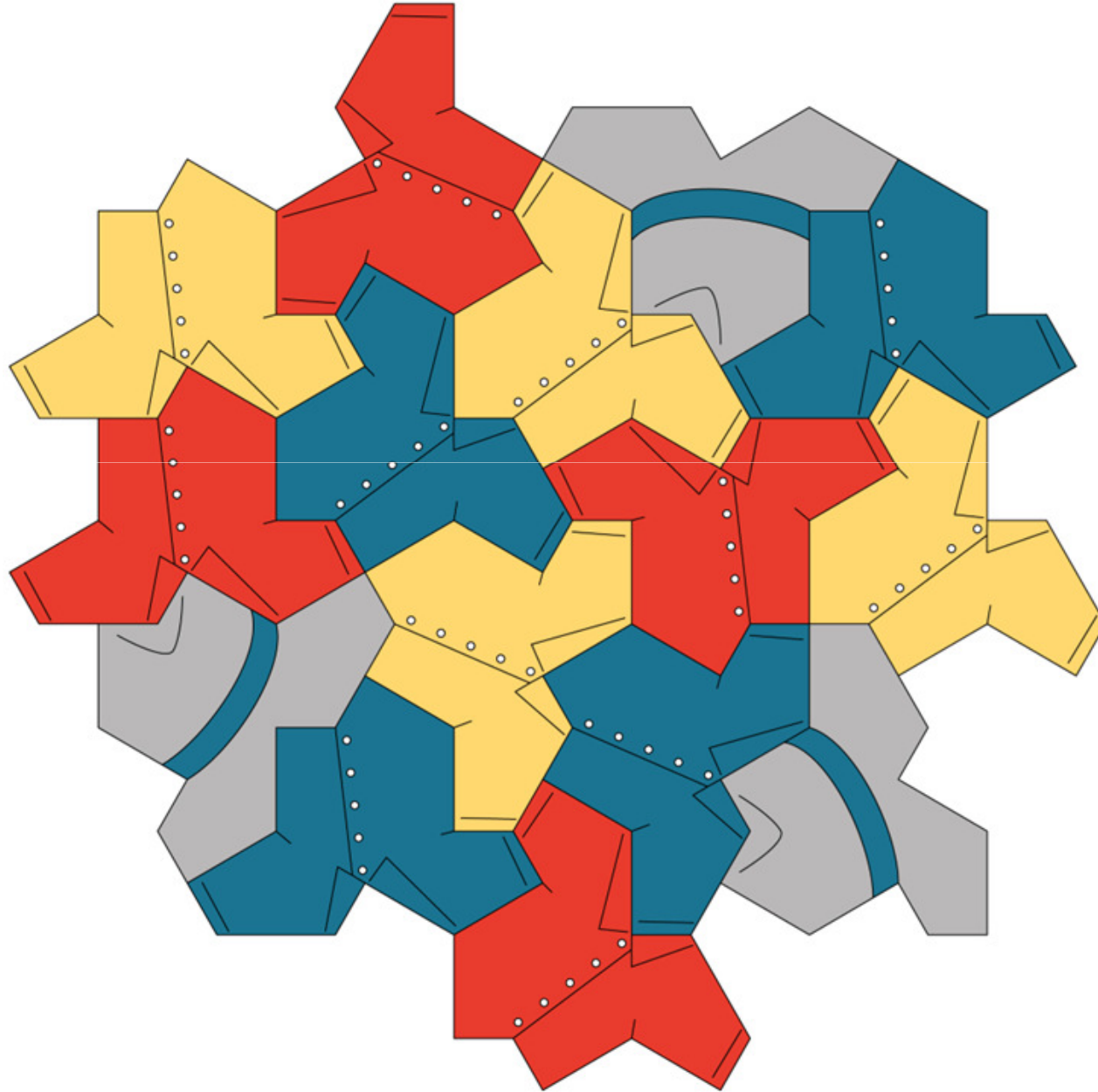


Avec des tuiles de Truchet

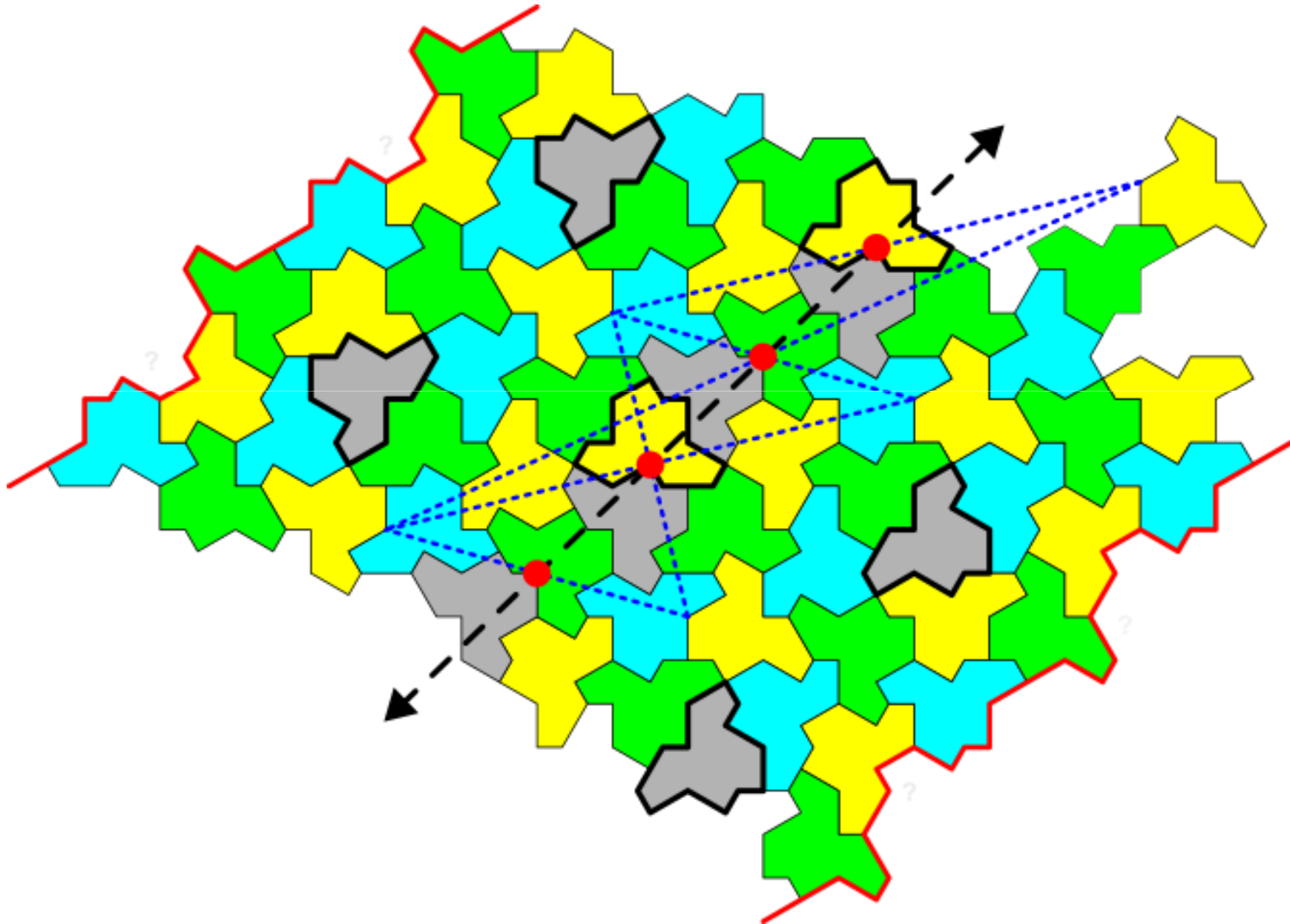
© Numberphile, 2023



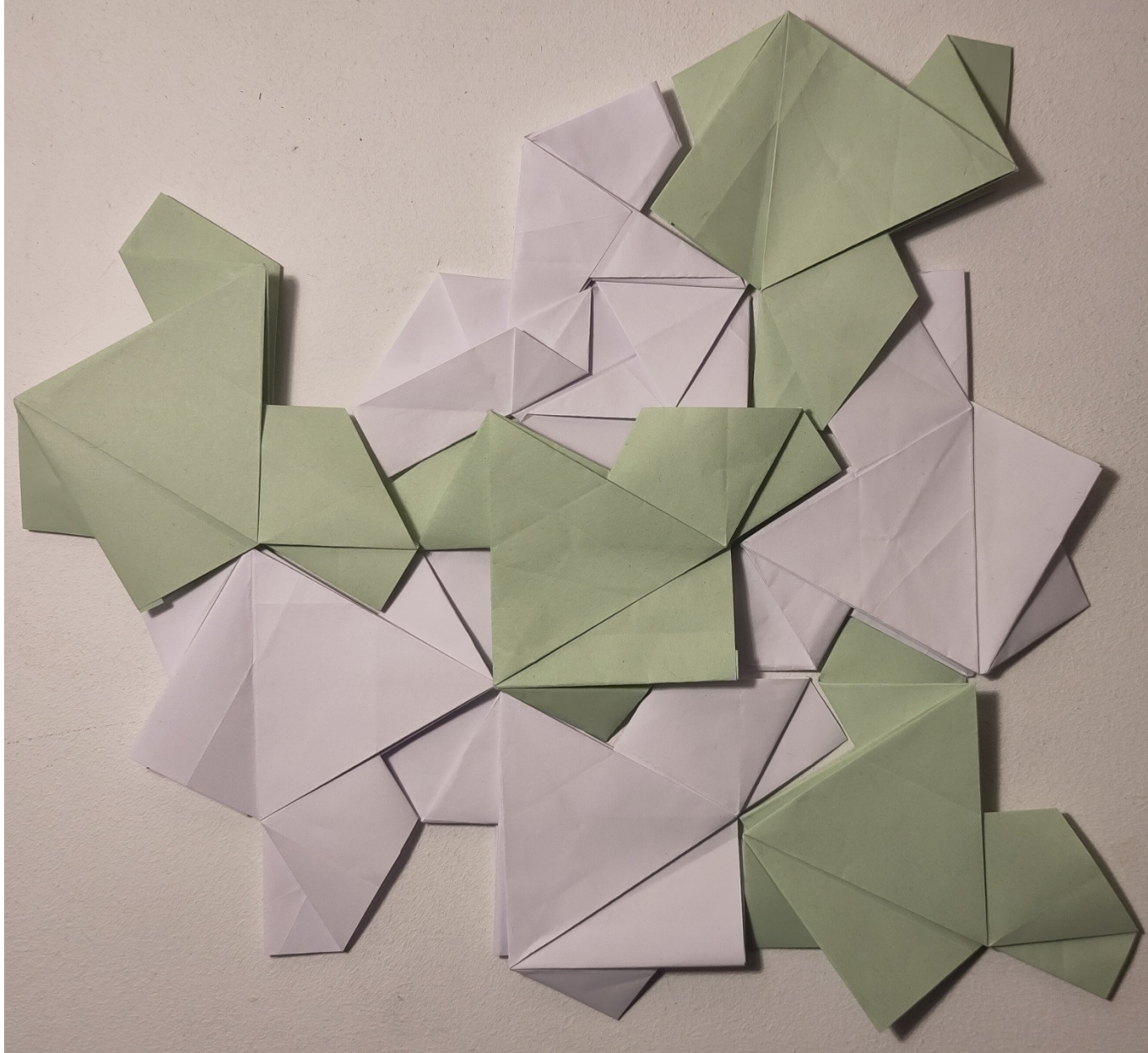
Une version magnétique



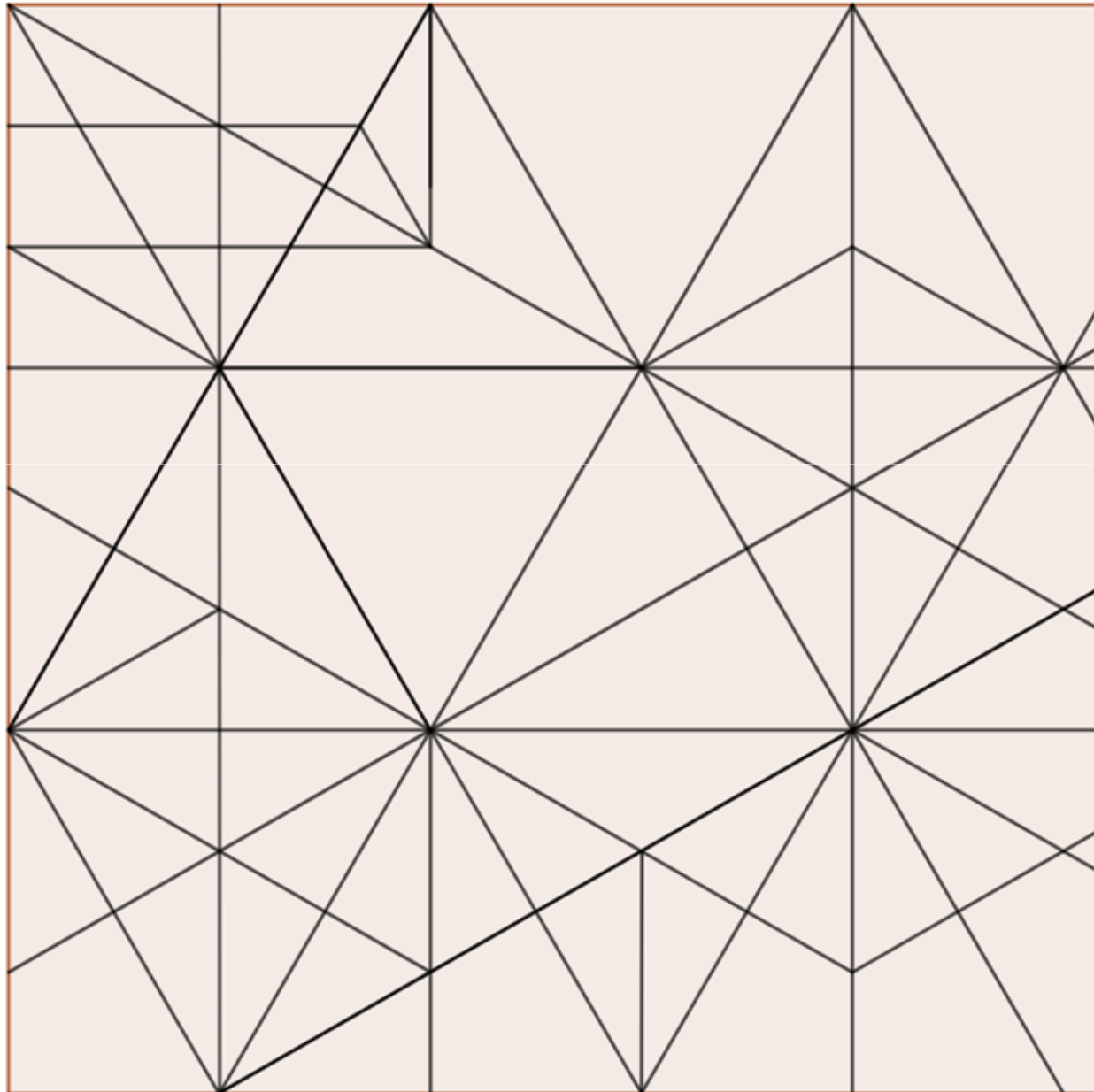
Pavage périodique... d'une frise !



En origami



La carte de pliage



Des tuiles imprimées en 3D



Un tatouage



Un ouvrage textile

© Emma Laughton, 2023



Un maillot



Une vareuse



Un coupe-vent



Un accessoire

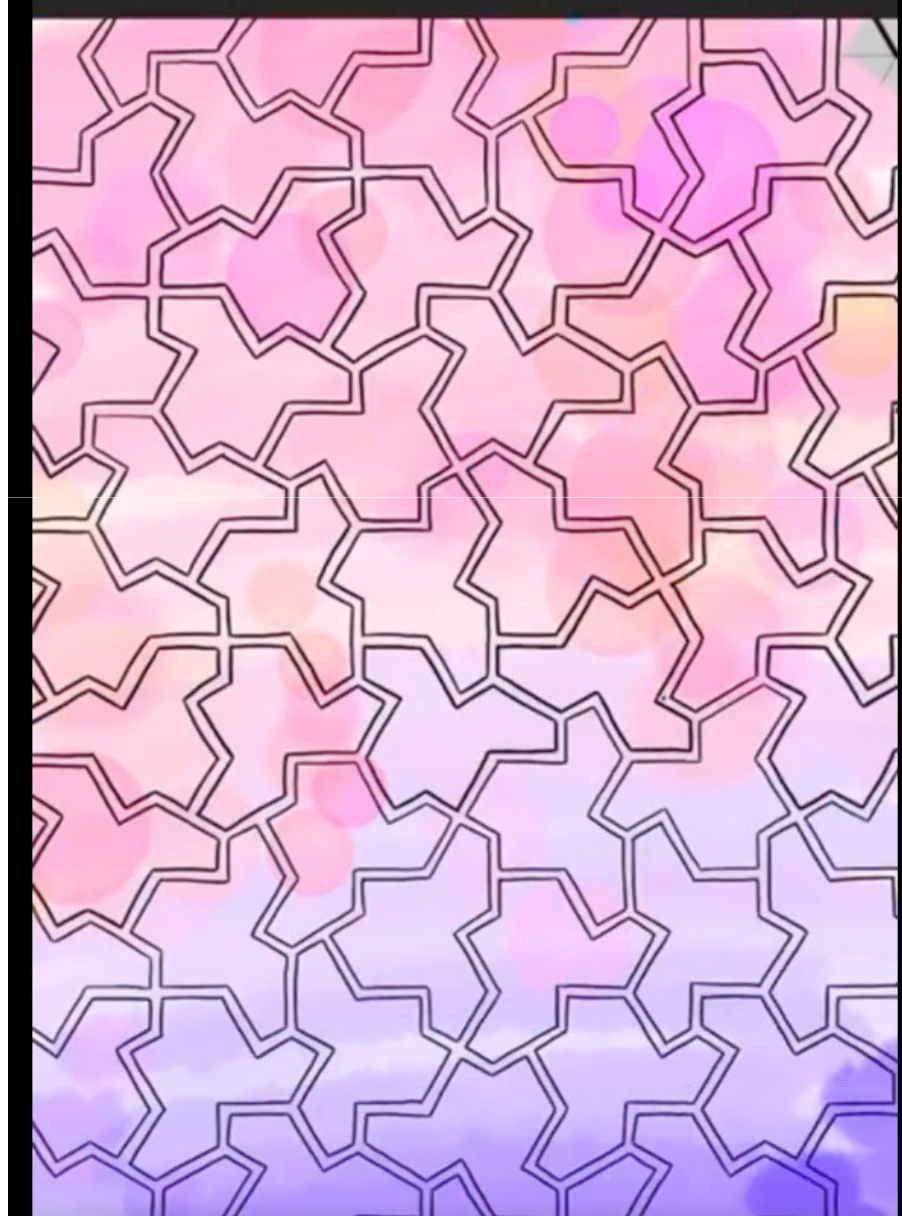


Un rideau de douche



© ProtopianPickleJar, 2023

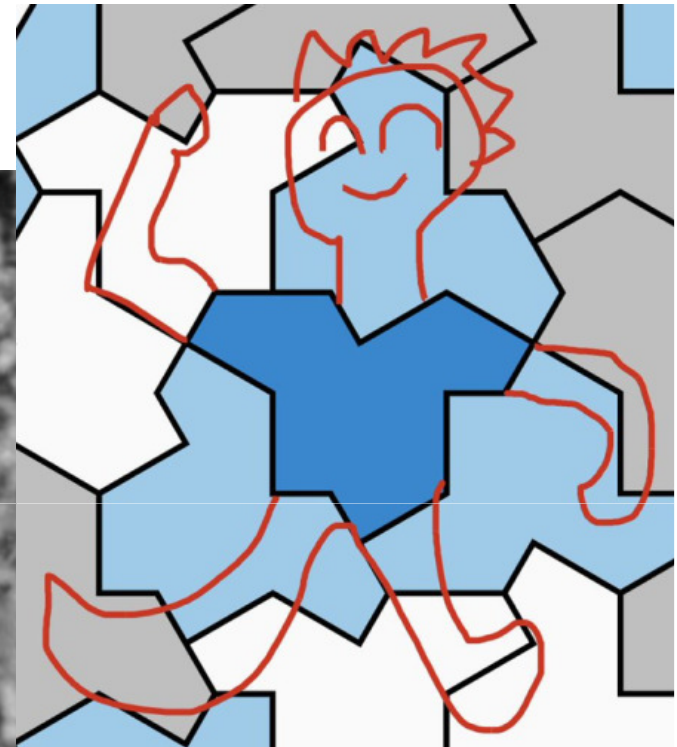
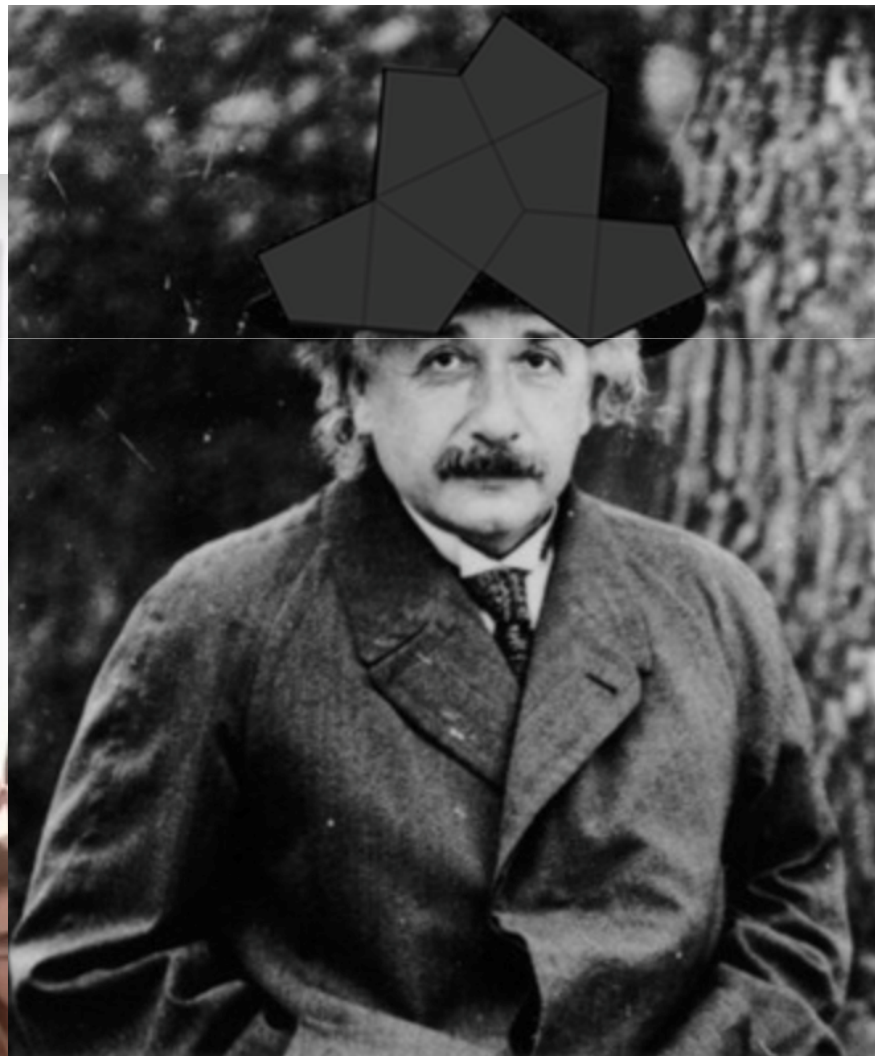
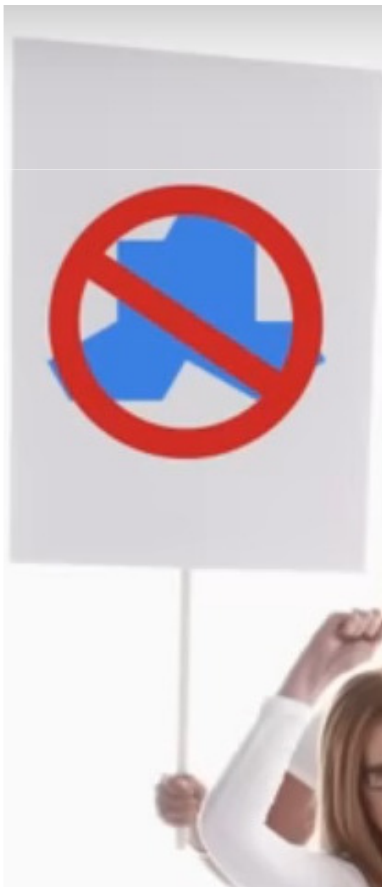
Un fond d'écran



© Aylean MacDonald, 2023

Des détournements

© Up and Atom, 2023



© songkeys, 2023

© John May, 2023

Un service de table



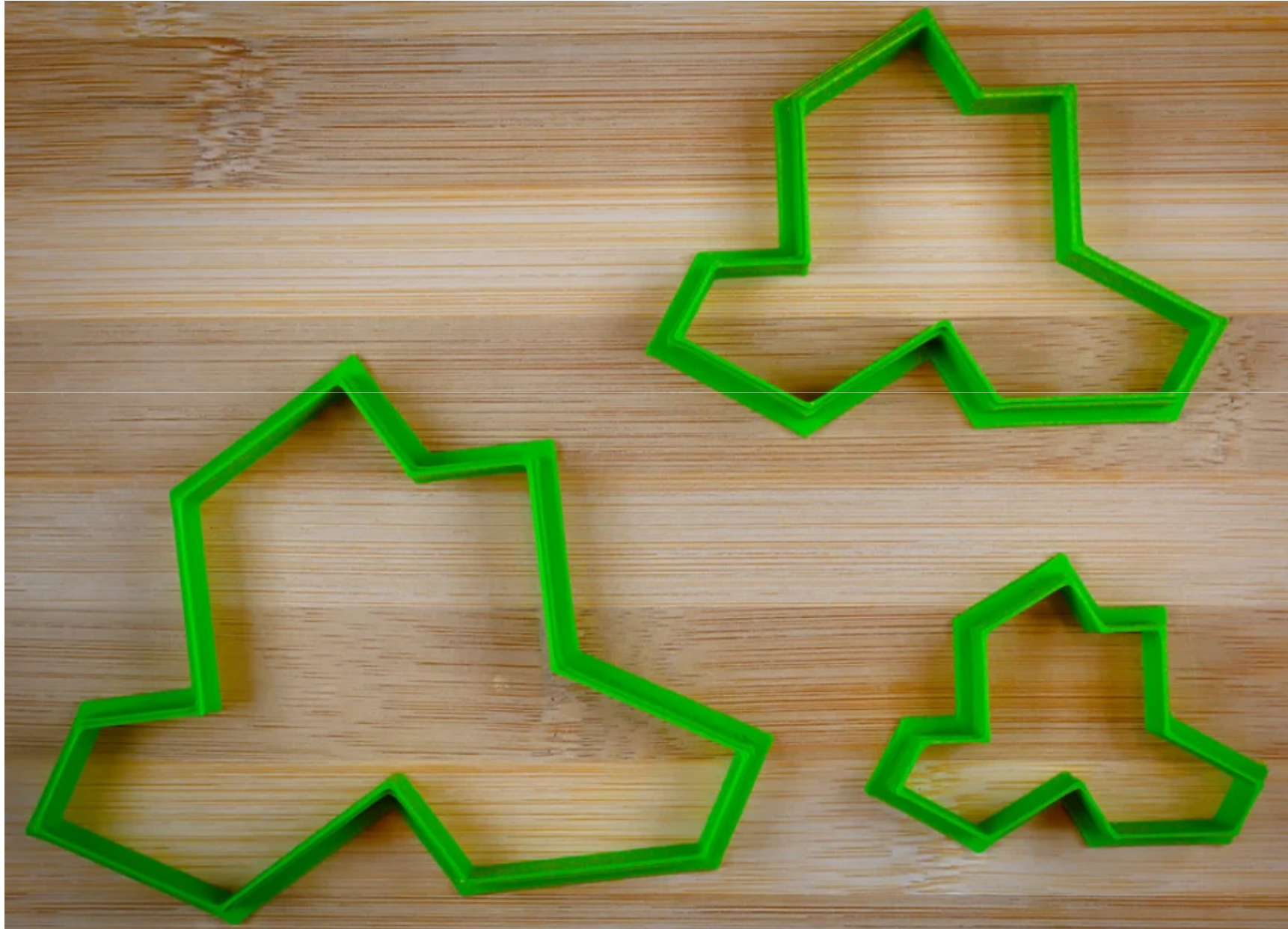
Sur des canettes



Sur des verres



Des moules



En pâtisserie

Ce ne sont pas des *tuiles*
aux amandes ! ☹️

© Nikolay Tumanov, 2023



En menuiserie

© David Michael Roberts, 2023



En ballon de foot



En briques danoises



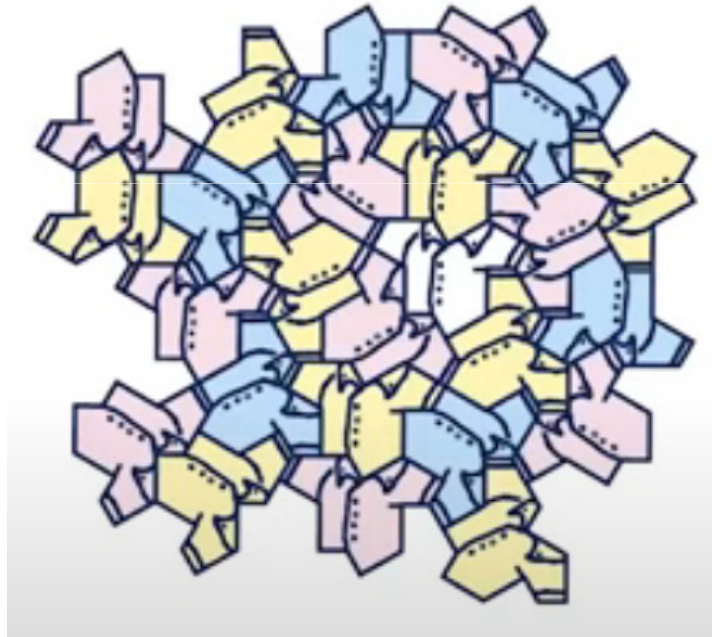
Des puzzles commercialisés



Des jeux



Trouver les images miroirs du motif



© Yoshiaki Araki / alytile, 2023

Des casse-tête

© Yoshiaki Araki, 2023



Un concours !

Un concours de créativité autour du chapeau est organisé : le **Mad Hat Einstein Awards**, qui prend fin le 27 octobre.

Organisé par le National Museum of Mathematics (MoMath, New York, États-Unis) et le United Kingdom Mathematics Trust (Grande-Bretagne).

Les projets illustrant des connexions entre mathématiques, art, design et cuisine sont encouragés.

Deux compétitions, un total de **20 000 \$ de récompense**.

<https://momath.org/hatcontest>

Quelques bons mots

Problème « *einstein* » : de l'allemand « une tuile ».

(Une recherche *infantile* et *futile* ? *OK, don't get shirty!*)

Reptile : tuile répliquante.

Vampire : tuile dont on n'utilise pas la version miroir.

Une chanson :

The Hat. The Joy Formidable, 5'40, 2023.

Les premières applications

Améliorer le rendu de l'eau ou de l'herbe dans les simulations informatiques et dans les jeux vidéo.

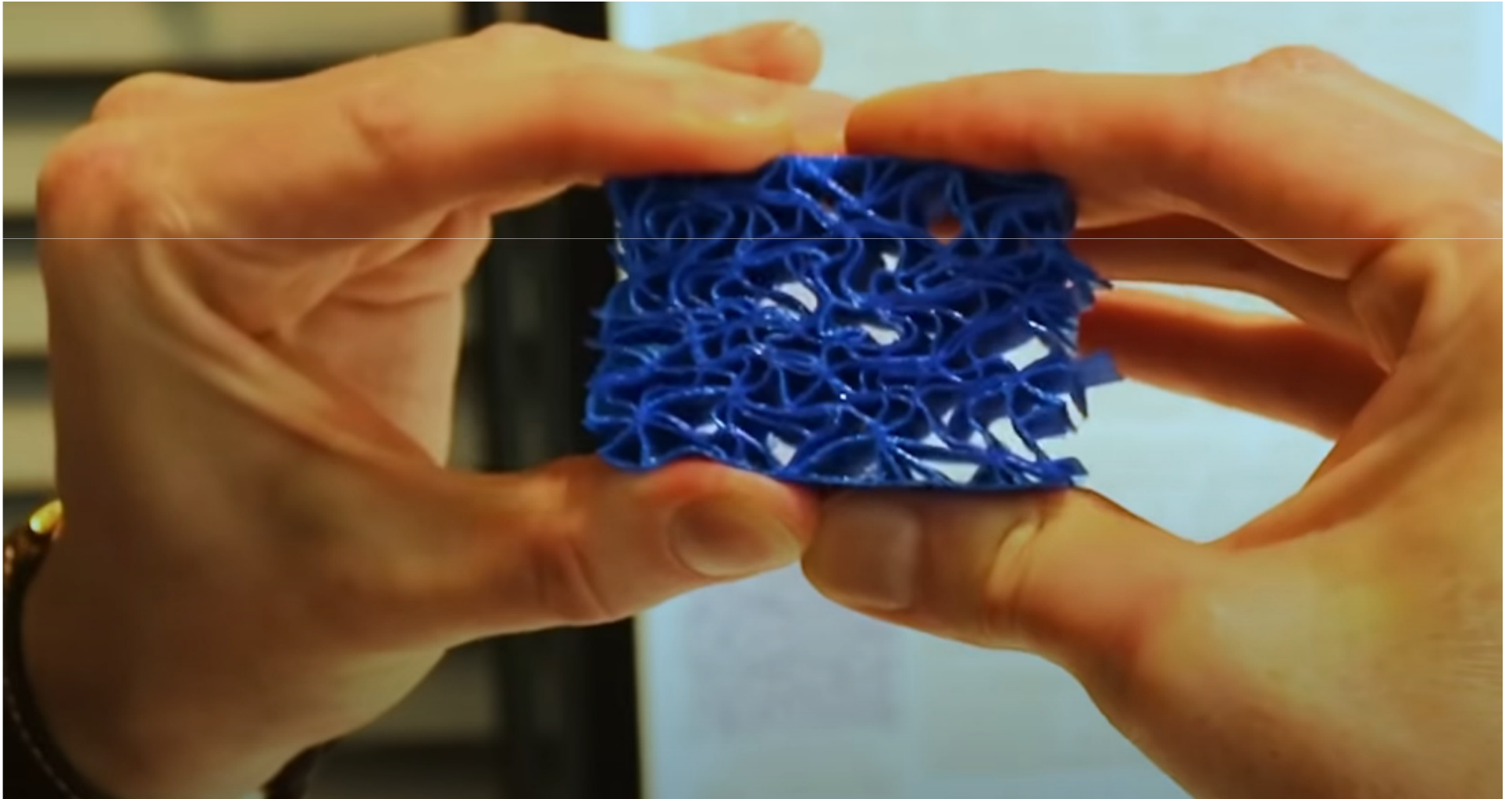
Un motif répétitif induit une production simple, un minimum de régularité permet d'éviter des phénomènes de résonance.

Une nouvelle technologie dans les vitres de trains envisage de faire passer les ondes de téléphone (pour Internet et les appels), mais pas celles de la chaleur. Ces vitres utilisent un pavage avec des hexagones non réguliers.

Utilisation dans les éléments finis, les calculs de structure, les tissus biologiques constitués d'un même élément primaire...

Vers de nouveaux matériaux ?

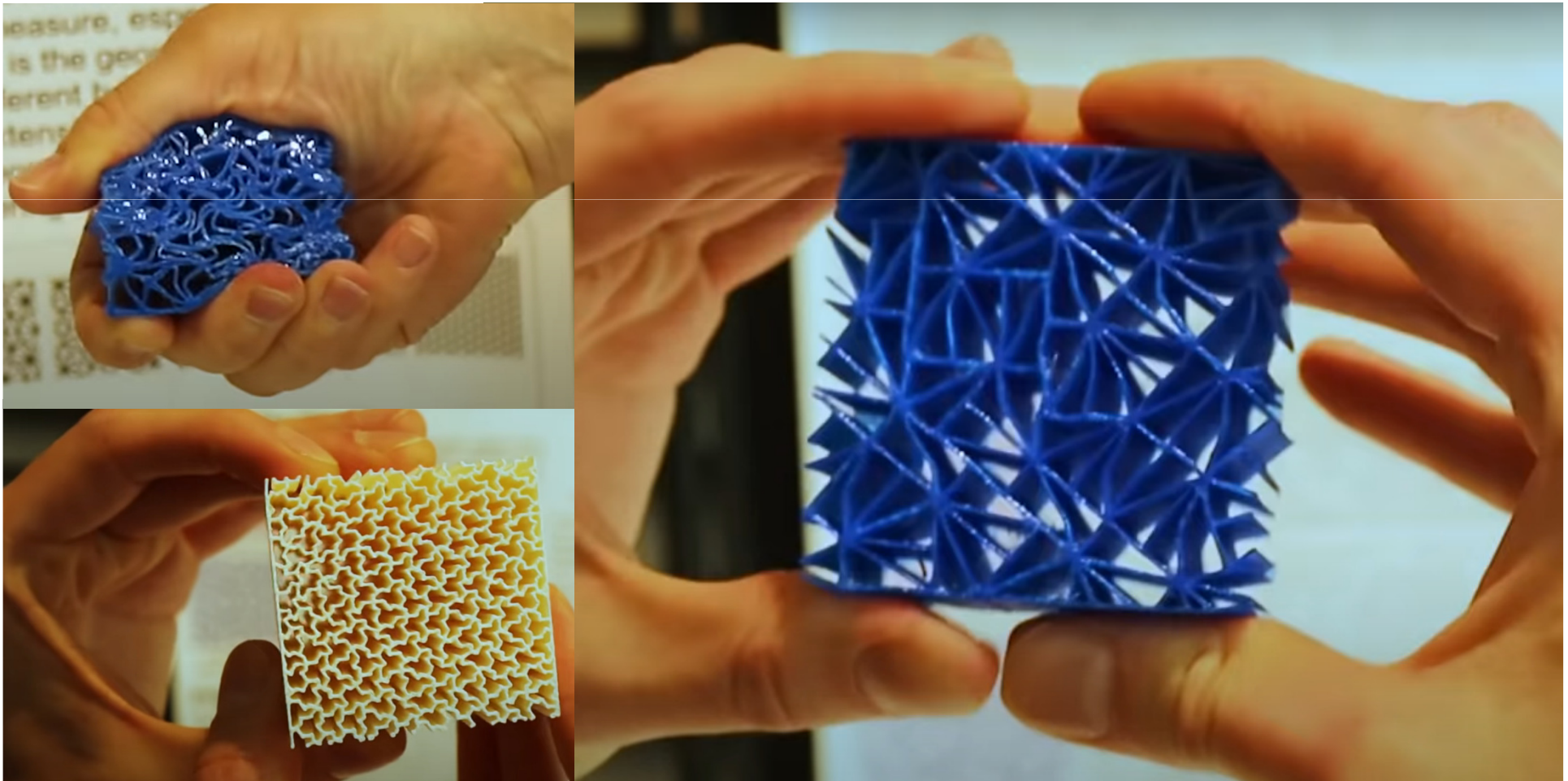
© Up and Atom, 2023



Des propriétés étonnantes

Plus d'élasticité, moins de risque de rupture...

© Up and Atom, 2023



La recherche relancée !

Classification des polygones non convexes permettant de paver le plan et des polygones convexes autorisant à paver le plan de manière anisoédrique.

Caractériser les ensembles de tuiles qui pavent le plan.

Nombre de pavages k -uniformes du plan (pour $k \geq 7$).

Conjecture de Heesch.

Problèmes 3 et 18 de Hilbert en « grande » dimension.

Conjectures sur les polyminos...

**Références
complètes
(Martin Gardner)**

Pavages périodiques du plan

Concerning the diversions in a new book on geometry (Coxeter: Intro to Geometry). Martin Gardner, Scientific American 204 (4), avril 1961.

H. S. M. Coxeter. Martin Gardner, New Mathematical Diversions From Scientific American, The Mathematical Association of America, 1966.

Paver avec des polyminos, des polyamants ou des polyhex (1)

Polyominoes, polyiamonds and polyhexes, more about tiling the plane. Martin Gardner, *Scientific American* 233 (2), août 1975.

Tiling with Polyominoes, Polyiamonds, and Polyhexes. Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, W.H. Freeman and Company, 1988.

Postscript. Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... and the Return of Dr. Matrix*, W.H. Freeman, 1989.

Paver avec des polyminos, des polyamants ou des polyhex (2)

On tessellating the plane with convex polygon tiles. Martin Gardner, *Scientific American* 233 (1), juillet 1975.

Tiling with Polyominoes. Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments.* W.H. Freeman, 1988.

Postscript (11. Polyhexes and polyaboloes). Martin Gardner, *Mathematical Magic Show,* The Mathematical Association of America, 1989.

Paver avec des polyminos, des polyamants ou des polyhex (3)

On the relation between mathematics and the ordered patterns of Op art. Martin Gardner, *Scientific American* 213 (1), juillet 1965.

Op Art. Martin Gardner, *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Diversions from Scientific American*, The University of Chicago Press, 1971.

Paver avec des polyminos, des polyamants ou des polyhex (4)

Tick-tack-toe and its complications, and answers to the quickie problems. Martin Gardner, *Scientific American* 225 (2), août 1971.

Generalized Ticktacktoe. Martin Gardner, *Fractal Music, Hypercards and More...*, W.H. Freeman and Company, 1992.

Tiling the Bent Tromino. Martin Gardner, *A Gardner's Workout*, AK Peters, 2001.

Three-Point Tiling. Martin Gardner, *A Gardner's Workout*, AK Peters, 2001.

Pavages apériodiques et pavages de Penrose (1)

Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. Martin Gardner, *Scientific American* 236 (1), janvier 1977.

Penrose Tiling. Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... and the Return of Dr. Matrix*, W.H. Freeman, 1989.

Penrose Tiling II. Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... and the Return of Dr. Matrix*, W.H. Freeman, 1989.

Pavages apériodiques et pavages de Penrose (2)

Puzzling over a problem solving matrix, cubes of many colors, and 3d dominoes. Martin Gardner, *Scientific American* 239 (3), septembre 1978.

The Thirty Color Cubes. Martin Gardner, *Fractal Music, Hypercards and More...*, W.H. Freeman and Company, 1992.

Pavages apériodiques et pavages de Penrose (3)

aha! Insight. Martin Gardner, W.H. Freeman and Company,
1978 :

*“All known rep-tiles also tile the plane periodically. That is, they tile the plane in such a way that there is a fundamental region of the pattern that tiles the plane by translation, without rotation or reflection. **Is there a reptile that will not also tile periodically? This is an outstanding unsolved question of tiling theory.**”*

Pavages apériodiques et pavages de Penrose (4)

« Haha » ou l'éclair de la compréhension mathématique.

Martin Gardner, Pour La Science-Belin, 1979 :

*« Tous les reptuiles connus peuvent également paver le plan périodiquement, ce qui signifie qu'il existe une région fondamentale du dessin qui, par simple translation, sans rotation ni réflexion, recouvre tout le plan. **Existe-t-il un reptuile qui ne couvrirait pas le plan de façon périodique ? Cette importante question de la théorie du pavage n'a pas encore été résolue.** »*

Pavages apériodiques et pavages de Penrose (5)

Penrose Tiles. Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics*, W.W. Norton & Company, 2001 :

“Unfortunately neither of the two aperiodic solids [Conway’s biprism and Peter Schmitt’s nonconvex solid] leads to the construction of a flat tile that covers the plane aperiodically. Finding such a tile or proving it nonexistent is the top unsolved problem in tiling theory.”

Pavages apériodiques et pavages de Penrose (6)

*Interview with Martin Gardner. Notices of the AMS 52 (6),
juin–juillet 2005 :*

“Notices: How did you first find out about the Penrose tiles?”

Gardner: I think Penrose sent me a copy of the piece that he had done on them for a magazine, I got into correspondence with him and found out more about them. Then Conway got intrigued by them. Actually, most of the pioneer discoveries about the Penrose tiles were made by Conway.”

Pavages de l'espace

Tetrahedrons in nature and architecture, and puzzles involving this simplest polyhedron. Martin Gardner, *Scientific American* 212 (2), février 1965.

Tetrahedra. Martin Gardner, *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Diversions from Scientific American*, The University of Chicago Press, 1971.

Pavages paradoxaux et impossibles

Calcutta. Martin Gardner, *The Magic Numbers of Dr. Matrix*, Prometheus Books, 1985.

L'art de Maurits Cornelis Escher

The eerie mathematical art of Escher. Martin Gardner, *Scientific American* 214 (4), avril 1966.

The Art of M.C. Escher. Martin Gardner, *Mathematical Carnival*, The Mathematical Association of America, 1989.

Non-Euclidean Geometry. Martin Gardner, *The Last Recreations*, Springer-Verlag, 1997.

Problèmes d'empilement (1)

Some elegant brick-packing problems, and a new order-7 perfect magic cube. Martin Gardner, *Scientific American* 234 (2), février 1976.

Packing Squares. Martin Gardner, *Fractal Music, Hypercards and More...*, W.H. Freeman and Company, 1992.

Some packing problems that cannot be solved by sitting on the suitcase. Martin Gardner, *Scientific American* 241 (4), octobre 1979.

Problèmes d'empilement (2)

Reflections on the packing of spheres. Martin Gardner, *Scientific American* 202 (5), mai 1960.

Circles and spheres, and how they kiss and pack. Martin Gardner, *Scientific American* 218 (5), mai 1968.

Packing Spheres. Martin Gardner, *New Mathematical Diversions*, The Mathematical Association of America, 1995.

Découpes géométriques (1)

Wherein geometrical figures are dissected to make other figures. Martin Gardner, *Scientific American* 205 (5), novembre 1961.

Geometric Dissections. Martin Gardner, *The Unexpected Hanging And Other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, 1991.

Découpes géométriques (2)

The problem of Mrs. Perkins' quilt, and answers to last month's puzzles. Martin Gardner, *Scientific American* 215 (3), septembre 1966.

Mrs. Perkins' Quilt and Other Square-Packing Problems. Martin Gardner, *Mathematical Carnival*, The Mathematical Association of America, 1989.

How rectangles, including squares, can be divided into squares of unequal size. Martin Gardner, *Scientific American* 199 (5), novembre 1958.

Six Challenging Dissection Tasks. Martin Gardner, *A Gardner's Workout*, AK Peters, 2001.

Découpes géométriques (3)

About rectangling rectangles, parodying Poe and many another pleasing problems. Martin Gardner, *Scientific American* 240 (2), février 1979.

The Rotating Table and Other Problems (Rectangling the Rectangle). Martin Gardner, *Mathematical Circus*, The Mathematical Association of America, 1979.

Plateaux de jeux

The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game Life. Martin Gardner, *Scientific American* 223 (4), octobre 1970.

The Game of Life, part I. Martin Gardner, *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, 1983.

The Game of Life, part II. Martin Gardner, *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, 1983.

Checker Recreations, Part I. Martin Gardner, *The Last Recreations*, Springer-Verlag, 1997.

Pliage de papier

The Tour of the Arrows and Other Problems (7. The Chicken-Wire Trick). Martin Gardner, *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, W.H. Freeman and Company, 1986.

Covering a Cube with Congruent Polygons. Martin Gardner, *A Gardner's Workout*, AK Peters, 2001.

Une vague conclusion ?

Gardner semble « plutôt » s'intéresser aux pavages non pas du plan (ou de l'espace) infini, mais des objets de mesure finie (carrés, rectangles, triangles, hexagones, damiers, échiquiers, polygones, parallélépipèdes, polyèdres...).

Si Gardner avait pu assister à l'avènement du chapeau...

Références choisies

Les deux articles

An aperiodic monotile. David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, Arxiv 2303.10798, 2023 (soumis pour publication).

A chiral aperiodic monotile. David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, Arxiv 2305.17743, 2023 (soumis pour publication).

Outils en lien avec les deux prépublications :

<https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat>,

<https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre>.

Les *blogs* des auteurs

« Hedraweb – Polyhedra, shapes, tessellations and patterns ». David Smith, 2016–2023.

« Hedraweb – Polygons, life patterns, fractals and other stuff ». David Smith, 2023–...

« Isohedral ». Craig Kaplan, 2021–...

Articles de vulgarisation (1)

La quête du pavé apériodique unique. Jean-Paul Delahaye,
Pour La Science 433, 2013.

An aperiodic monotile exists! Christian Lawson-Perfect, Katie Steckles et Peter Rowlett, *The Aperiodical*, 2023.

Hobbyist Finds Math's Elusive 'Einstein' Tile. Erica Klarreich,
Quanta Magazine, 2023.

Math Patterns That Go On Forever but Never Repeat. Patrick Honner, *Quanta Magazine*, 2023.

Articles de vulgarisation (2)

La tortue qui prenait son chapeau pour Einstein. Florentin Waligorski et Enka Blanchard, *Maths en cartes Express*, Comité international des jeux mathématiques, 2023.

The hat aperiodic monotile origami. Florentin Waligorski, Flow Motion, 3'47, 2023.

Turtle aperiodic monotile origami. Florentin Waligorski, Flow Motion, 3'06, 2023.

Nombres de Heesch et pavages de Penrose

Heesch Numbers and Tiling. Numberphile, 9'19, 2019.

Heesch Numbers (extra footage). Numberphile, 2'17, 2019.

5 and Penrose Tiling. Numberphile, 7'00, 2012.

Vidéos en ligne (1)

Un motif apériodique ! Thomaths, 9'21, 2023.

Pourquoi le Chapeau est-il apériodique ? Thomaths, 12'24, 2023.

La première tuile apériodique de l'histoire ! The Hat. Passe-science, 23'41, 2023.

Une nouvelle tuile apériodique : le spectre ! Passe-science, 14'57, 2023.

A New Tile in Newtyle. Numberphile, 26'50, 2023.

A Hobbyist Just Solved a 50-Year-Old Math Problem (Einstein Tile). Up and Atom, 17'58, 2023.

Vidéos en ligne (2)

Finally, a true Aperiodic Monotile! et *The Shiny New Shape That Aperiodically Tessellates!* Ayleian MacDonald, 5'35 et 3'16, 2023.

The Infinite Pattern That Never Repeats. Veritasium, 21'11, 2020.

Discovery of the Aperiodic Monotile. Numberphile, 31'03, 2023.

Ein Stein Revisited – The Spectre Tile. G4G Celebration, 53'07, 2023.

Chapeau, l'artiste !

© David Smith, 2023

