

DE DINGUE MATHE SH

AVNER BAR-HEN
QUENTIN LAZZAROTTO
Préface de Cédric Villani

DU PENALTY À LA MÉTÉO,
DÉCODER LE RÉEL

epa

Kafémath
16/02/2023



PRÉFACE
Cédric Villani
006

AVANT-PROPOS
008

DÉNUMBRER 018

DES MÉDICAMENTS À LA MONNAIE
Les nombres de Frobenius
032

LES NUMÉROS DE LA VIE COURANTE
Nombres pivots
040

LE PRIX D'UN BILLET D'AVION
Recherche opérationnelle
048

LA MESURE DE LA BIODIVERSITÉ
L'échantillonnage
054

LE RECENSEMENT
Statistique publique
062

LES GRANDS NOMBRES
070

PORTRAIT
Srinivasa Ramanujan, la puissance envoûtante des nombres
078

FOCUS
La magie et les nombres
086

RENCONTRE MATHÉMATIQUE
avec Étienne Ghys
102

PRÉVOIR 112

LA MARÉE
La transformée de Fourier
122

FOCUS
Prévoir le ciel avec les éphémérides
130

LA LOI DE LA JUNGLE
Le modèle proie-prédateur
142

LE LOTO
Probabilités objectives et statistiques
148

PORTRAIT
Florence Nightingale, la veilleuse des chiffres
154

LE FOOT
L'équilibre de Nash
160

LE CASINO
Gain moyen et bandit manchot
166

ÉLECTIONS ET MODES DE SCRUTIN
Le critère de Condorcet
172

RENCONTRE MATHÉMATIQUE
avec Lynne Billard
178

CODER 186

LE DIGICODE
L'analyse combinatoire
202

LA SÉCURITÉ DES COMMUNICATIONS
La cryptographie
208

LANGAGE HUMAIN
Langage informatique
214

PORTRAIT
Ada Lovelace, la princesse des algorithmes
220

FOCUS
Des machines qui comptent
224

LE GPS
La triangulation
234

RÉSEAUX SOCIAUX
Les graphes
244

IMAGES DE SYNTHÈSE
Géométrie
250

RENCONTRE MATHÉMATIQUE
avec Gérard Berry
256

CRÉER 264

LES GAMMES MUSICALES
Les intervalles de fréquence
276

LA MESURE DE LA COULEUR
La colorimétrie
282

NŒUDS DE CRAVATE
Nœuds mathématiques
288

LA CARTOGRAPHIE
La courbure gaussienne
294

LE TRAFIC ROUTIER
Le paradoxe de Braess
302

LES COÏNCIDENCES
Le risque d'erreur
306

PORTRAIT
Roger Penrose, des trous noirs aux pavages
312

FOCUS
Arts et Mathématiques
318

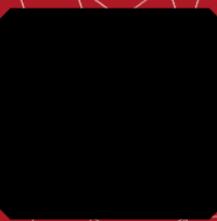
RENCONTRE MATHÉMATIQUE
avec Marie-Paule Cani
336

INDEX
344

BIBLIOGRAPHIE ET RESSOURCES
349

LES AUTEURS - REMERCIEMENTS
350

CRÉDITS
351



1

NUMÉRIQUE

2

P			R
	É		
		V	
	O	I	
		R	

3

x » @ ◊ ≈ ◊ § ÷ § ◊ Σ
 μ ö _ ÷ _ § Σ ◊ _ ç f
 ◊ _ ¥ » ≈ Σ ¥ ÷ ö _ ≈
 » _ Ω » ö ö ÷ Ø » _ ö
 » ≈ √ » § _ § f _ β »
 f ð _ μ Σ f ö _ » ≈ √
 ◊ √ » _ ÷ ∏ μ » √ @ ≈
 μ ÷ Ω . x √ _ » § _ ç
 f » μ § ◊ μ @ ÷ ≥ @ Ω
 ÷ ≈ . ≈ Σ Ω _ » § _ »
 μ ≈ Σ √ » _ * √ ÷ ∏ Σ
 _ ÷ _ § Σ ◊ CODER

4

(R T I
 ' R E T R
) U L T R
 C L E R
 CRÉER

DES MÉDICAMENTS À LA MONNAIE

Les nombres de Frobenius



Un pharmacien de l'époque. Photo de 1910. Crédit : D. J. / Le monde des sciences, des plantes, des produits et des médicaments. Choisir les produits, appliquer le traitement, choisir le nombre de médicaments par boîte et, après le soin, choisir le nombre de boîtes. Choisir une boîte ou un sachet, transporter...

La vente des médicaments à l'unité est souvent évitée pour éviter le gaspillage, délivrer la dose exacte prescrite par le médecin et ainsi réduire le déficit de la sécurité sociale. L'idée est probablement intéressante, mais on pourrait aussi réfléchir à la contenance des boîtes. Ce qui va amener à s'interroger également sur la taille des boîtes de médicaments ou sur la valeur des pièces en circulation. Cette question est ancienne dans l'industrie. Par exemple, comme on ne peut fabriquer des boîtes pour chaque médicament, il va falloir mettre en place une gamme pas trop grande, qui s'adapte aux différentes situations.

Nous allons voir comment choisir ces tailles et rendre hommage au robot Charles Bernard (1949-1965) qui a optimisé la taille des caisses des boîtes distribuées à permis l'adoption d'une norme internationale de standardisation des produits manufacturés (ou parle de nombres polyédriques).

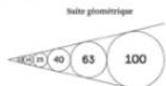
SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Les objets manufacturés sont souvent proposés dans diverses tailles; celle-ci est un critère de choix, par exemple, lors de l'achat d'une paire de chaussures, de gants, d'un sac, de boîtes de conserves, de câbles, etc. Pendant longtemps, de nombreuses séries de tailles d'objets étaient obtenues en doublant la taille précédente. On parle de suite géométrique ou de suite géométrique.

Prenez donc un exemple pour voir la différence entre les suites géométriques et arithmétiques: imaginez que nous voulions cinq tailles d'objets quelconques, comptées entre 10 et 100.

• Pour une suite géométrique, on multiplie la valeur initiale par 2 (ici soit environ 1,26, on répète l'opération sur la dernière valeur obtenue, et ainsi de suite sur les valeurs des tailles successives. Nous obtenons alors: 10, 16, 25, 40, 64 et 100.

• Pour une suite arithmétique, on ajoute à la valeur initiale 100/20, on répète l'opération sur la dernière valeur ainsi obtenue, et ainsi de suite sur les valeurs des tailles successives. Nous obtenons alors: 10, 16, 25, 40, 54, 68, 82 et 100.



LE FOOT L'équilibre de Nash



Au moment d'un tir au but (ou d'un penalty), le joueur veut mettre le ballon dans le sillage alors que le gardien veut l'empêcher. L'équilibre de Nash désigne la stratégie optimale, c'est-à-dire celle qui donne autant de chances à l'un de marquer qu'à l'autre de ne pas encaisser de but. La vie est un grand jeu composé de choix, ce résultat fondamental de la théorie des jeux est souvent utilisé.

LE DILEMME DU PRISONNIER

Conditions ou jeu où deux équipes s'affrontent. Le but est de gagner, chaque joueur cherche à optimiser sa stratégie en fonction des actions de son adversaire. Si, au vu des actions passées, un des joueurs modifie sa stratégie, et ainsi le seul à changer de stratégie, et qu'il s'agit de pas son propre gain, alors l'équilibre de Nash est atteint. L'équilibre de Nash est atteint si aucun joueur ne regrette son choix car il n'aurait pas pu faire mieux en se basant sur les choix des autres joueurs. Néanmoins, une augmentation de gain devient possible lorsque les deux équipes changent de stratégie.

La théorie des jeux apparaît dans la communauté mathématique dans les années 1930. Elle cherche à prévoir le comportement d'agents économiques dont le but est de maximiser leurs gains grâce à des choix rationnels. Le mathématicien américain John Nash (1928-2015) a démontré, dans un très court article issu de sa thèse, que sous certaines conditions, tout jeu comportant un nombre fini de joueurs à un moment un point fixe, qu'il appelle l'équilibre. Ce résultat est considéré comme l'un des plus importants en théorie des jeux car il a beaucoup d'applications. John Nash a été récompensé par le prix Nobel d'économie en 1994 et, en 2015, il a reçu le prix Abel (équivalent considéré comme le prix Nobel des mathématiques).

Le mathématicien John Nash. Photo: une illustration de la Bibliothèque de la Sorbonne.



LE GPS La triangulation

L'invention du GPS a révolutionné notre utilisation des cartes et des itinéraires. Ce ne sont pas les journaux de Pokémon Go, occupés à capturer des Pokémon disséminés selon leur géolocalisation, qui diront le contraire! Mais comment ce GPS fonctionne-t-il et est-il vraiment exact? Un petit tour de mathématiques et de géométrie sur la triangulation s'impose pour mesurer sa précision très relative.

LE GPS ET SON RÉSEAU DE SATELLITES

Être capable de localiser sa position à la surface de la Terre est essentiel, notamment pour les militaires, les géomètres, les marins, les entreprises de services publics, les randonneurs ou les pilotes. Actuellement, le système de positionnement le plus utilisé est le GPS. Il repose sur le fonctionnement de beaucoup d'étoiles de la vie courante, et en fait premier lien des smartphones. Il permet la localisation de tout objet connecté, 24 heures sur 24, sur n'importe quel point de globe. Le GPS repose sur un réseau de 24 satellites tournant à 55 degrés par rapport à l'équateur, placés sur des orbites circulaires à une altitude d'un peu plus de 20 000 kilomètres afin de faire un tour de terre en 12 heures. Il y a donc 24 satellites qui parcourent les orbites en permanence et qui sont capables de fournir une onde électromagnétique.

Prévoient à 20 000 mètres à 137,45 MHz. Ils envoient les données des codes et le temps de transit (ou parle d'effet Doppler). Le récepteur calcule la distance qui le sépare du satellite.

Les mathématiciens répondent à trois questions concernant la triangulation par satellite: comment un récepteur GPS utilise-t-il les informations des satellites pour déterminer sa position? Pourquoi la position déterminée change-t-elle à chaque mouvement, même si nous ne bougeons pas? Que faut-il pour améliorer la précision de nos différentes positions?

Les récepteurs GPS utilisent des mathématiques très simples mais de manière très ingénieuse. Comme quoi, il peut y avoir de la géométrie dans tout ce qui nous entoure et que nous ne voyons pas.

Satellite GPS GPS-1080.

Un satellite GPS, également connu sous le nom de GPS II, est utilisé pour le positionnement global sur une constellation de satellites tournant en orbite autour de la Terre.

Chaque satellite transmet des informations sur sa position, sa vitesse, ainsi que des données horaires précises. Le récepteur du GPS utilise ces données pour calculer sa position et sa vitesse.



LA MESURE DE LA COULEUR La colorimétrie



Carte de référence des couleurs et de la densité de couleur. Elle est utilisée pour mesurer la précision des couleurs et de la densité de couleur.

Le langage est bien trop limité et trop imprécis pour définir de manière universelle les centaines de milliers de couleurs observables à l'œil nu. Si les Français ont coutume de parler de la blancheur de la neige, nous n'en avons pas assez pour comparer la teinte d'un vin de Bourgogne à celle d'un vin de Bordeaux. Certains artistes, comme Yves Klein ou Pierre Soulages, ont fait de la couleur une œuvre d'art. Mais comment faire si l'on ne veut pas peindre sa cuisine en bleu Klein ou en noir Soulages? Afin de communiquer à un peintre la bonne couleur, il faut utiliser la colorimétrie, discipline qui mesure et codifie les couleurs et qui permet de créer les très utiles peintures de couleurs.

ONDES ET PERCEPTIONS

On est en effet dans un spectre de la lumière visible qui va du violet au rouge en passant par le vert et le jaune. D'un point de vue physique, la lumière est une onde électromagnétique à la fréquence de 400 à 800 milliards de cycles par seconde. Elle se mesure en nanomètres (nm). C'est à dire en milliardièmes de mètre. On est là, c'est à dire dix fois les longueurs d'onde courtes, la limite est assez nette et correspond à une longueur d'onde de 380 nm pour le violet extrême. À l'extrême rouge, la limite n'est pas aussi nette, mais elle se situe autour de 780 nm pour le rouge extrême. Les ondes possèdent une fréquence plus élevée que le violet extrême sont appelées les ultraviolets (ou les rayons UV), et celles dont la fréquence est inférieure au rouge extrême sont appelées les infrarouges (ou les rayons IR). Les rayons ultraviolets et infrarouges ne sont donc pas visibles.

rapidité de deux lumières de couleurs différentes provoque une impression de scintillement qui détermine la structure de la pupille et cette réaction n'est pas causée par la simple alternance de couleurs (deux lumières ayant la même longueur). Peut-être il existe trois sortes de cônes, l'absence des cônes est insuffisamment, il existe ainsi de nombreuses espèces différentes produisant la même couleur, c'est-à-dire diverses façons de mélanger des lumières pour produire un effet identique sur les cônes. La colorimétrie est donc l'art de représenter ces spectres lumineux.

DU CERCLE CHROMATIQUE AU MODÈLE RVB

L'histoire de la représentation de la couleur est ancienne. Dans la Grèce antique, Pythagore suggérait un lien entre l'échelle des tons et la position des plaques de la Terre et à la sphère des étoiles fixes. Une théorie dite de l'harmonie qu'on retrouve aussi en musique. Depuis la Renaissance au moins, les artistes et les scientifiques ont remarqué qu'avec seulement trois teintes bien choisies, on peut reproduire un très grand nombre de couleurs. C'est à dire un spectre continu de couleurs. Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832), passionné par l'optique, écrit en 1810 un Traité des couleurs de 2000 pages dans lequel il formule un cercle chromatique, représentant les mélanges de couleurs, semblables à la palette du peintre. Il fonde sa théorie sur la polarité des couleurs: celles-ci naissent de la rencontre de la lumière et de l'obscurité - et développe son système à partir du contraste entre le clair et le foncé. De son côté, l'opticien français Eugène Chevreul (1786-1859), dans son ouvrage De la loi du contraste simultané des couleurs et de l'assimilation des objets colorés (1839), montre comment la perception d'une couleur change lorsqu'elle est placée à côté d'une autre couleur. Il pose le lien de la théorie de la juxtaposition des couleurs primaires et complémentaires qui va inspirer les premiers impressionnistes. Par exemple, pour une touche d'orange à côté d'un bleu on rendra ce bleu plus intense. De même la différence entre deux verts sera beaucoup plus visible s'ils sont accoutés.

SRINIVASA RAMANUJAN

La puissance envoûtante des nombres



1887 **RAMANUJAN À CHENNAI, INDIA**

1916 **ARRIVEE À L'HÔPITAL DE CHICHESTER EN ANGLAETERRE**

1920 **TRAVAILLE SUR LES FRACTIONS CONTINUES COMPOSÉES AU TRUMP CLUB DE CHICHESTER**

1929 **MEURTRE**

1930 **MORT À KODAYANKUNAL, INDIA**

Srinivasa Ramanujan - Au large de Ramanujan - a apporté des contributions importantes à la théorie analytique des nombres, en travaillant sur les fonctions elliptiques, les fractions continues et les séries infinies. L'histoire de sa collaboration étonnante avec le mathématicien britannique G.H. Hardy est l'une des aventures mathématiques les plus connues du 20^{ème} siècle, teintée de romantisme et d'exotisme. Fasciné, envoûté par les nombres et les calculs, Ramanujan semblait manipuler avec une facilité innée. Son histoire sert à la base d'un film hollywoodien sorti en 2015 intitulé "L'homme qui défiait l'infini".

© Thomas A. Sorenson
© 1916 © Sorenson

L'histoire commence dans la ville universitaire de Cambridge, au Royaume-Uni, au début du 20^{ème} siècle. Pour le élève un bureau tenu, un tuteur honoraire et l'éducation tout juste gratuite. Pendant les heures froides sans autres élèves, G. H. Hardy y trouvait. Diplômé de la prestigieuse université, il vient de recevoir une proposition de poste de chercheur (ou collègue *fellows*), et deviendra l'un des mathématiciens les plus importants du 20^{ème} siècle. Àgé d'une trentaine d'années, il paraît plus jeune et son allure évoque l'éternel jeune en col blanc, tout juste un brin mod. Hardy est épaté par le talent et le talent mathématique. Les intégrales, les lois qui régissent les nombres, les sommes et les suites de nombres, voilà son domaine, sa chance guidée, à laquelle il compte, et l'un en croit ses écries, rapporte une nouvelle rigueur et une professionnalisme. Au bout, Hardy correspond d'une certaine manière au cliché bien répandu du mathématicien d'un peu austère, bien que brillant.



Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
L'acteur principal, Dev Patel, dans une scène avec Sorenson.
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".

DES LETTRES MATHÉMATIQUES INATTENDUES
En ce jour glorieux de janvier 1911, Hardy découvre dans son courrier une lettre bégayée de zéros et d'andares, comme pages d'une lecture moquée, dont le contenu le laisse perplexe. Elle commence ainsi: «Cher Monsieur, je vous prie de bien vouloir me présenter en tant que commis une collecte dans le département des comptes du bureau du port de Madras, en Inde, avec un salaire de seulement 20 £ par an. J'ai maintenant environ 21 ans.» La lettre s'achève par un mot: «Un pauvre», suivis des coordonnées qu'il y a quelque chose de valider dans mes calculs, j'aimerais que mes théorèmes soient publiés... Étant mathématicien, j'apprécierais beaucoup les conseils que vous pourriez me donner. Je vous demande de m'excuser pour la peine que j'ai dû vous donner. Je vous prie d'agréer, cher Monsieur, mes salutations distinguées, S. Ramanujan.»

FLORENCE NIGHTINGALE

La veillesse des chiffres



1820 **RAMANUJAN À CHICHESTER, INDIA**

1854 **ARRIVEE À L'HÔPITAL DE CHICHESTER EN ANGLAETERRE**

1860 **TRAVAILLE SUR LES FRACTIONS CONTINUES COMPOSÉES AU TRUMP CLUB DE CHICHESTER**

1869 **MEURTRE**

1870 **MORT À KODAYANKUNAL, INDIA**

Surnommée « La Dame à la lampe », en référence à ses nombreuses visites nocturnes auprès de ses patients, une torche à la main, Florence Nightingale est considérée comme l'une des fondatrices de l'épidémiologie et des soins modernes. Pour élaborer de nouvelles méthodes de soins et surtout de gérer un hôpital, elle comprit l'intérêt des mathématiques et notamment des statistiques. En élaborant de nouveaux types de visualisations graphiques mathématiques, son approche préfigure les techniques dites « big data » ou mathématiques modernes. La journée internationale des infirmières célèbre le 12 mai, jour de son anniversaire, 121^{ème} anniversaire.

Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
L'acteur principal, Dev Patel, dans une scène avec Sorenson.
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".

Aujourd'hui, nous sommes habitués aux graphiques et autres représentations visuelles des données et des données. Il existe des applications dédiées pour ceux qui ont besoin de quelques recommandations graphiques sur notre activité sportive hebdomadaire ou notre bilan cardiaque. Ces représentations ne sont apparues qu'un siècle ou deux après la naissance de Florence Nightingale, mais elle a été formée par James Joseph Hyatt (1814-1897), un mathématicien renommé, puis elle s'est engagée dans le métier d'infirmière. En 1851, elle est envoyée à la tête d'un groupe d'infirmières à l'hôpital de Scutari (aujourd'hui en Turquie) en pleine guerre de Crimée. C'est à cet hôpital qu'elle découvre dans laquelle sont soignés les soldats turcs et britanniques, elle a l'intuition que ces conditions déplorables provoquent plus de morts que la guerre elle-même. Mais il lui faut un moyen inattendu pour prouver au docteur et convaincre un haut commandement de la nécessité de réformer les conditions de vie des malades (mauvaise alimentation, nouvelle hygiène, vêtements secs pour les soldats...). Elle utilise les mathématiques, l'analyse statistique à élaborer des statistiques hospitalières, une discipline nouvelle. Elle rassemble des travaux de mathématiciens contemporains comme John Snow (1813-1858), lequel est parvenu grâce aux statistiques à retracer l'origine d'une épidémie de choléra et sa diffusion dans un quartier de Londres.



Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
L'acteur principal, Dev Patel, dans une scène avec Sorenson.
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".

Dans son hôpital de guerre, Florence Nightingale constate que les décès et leurs causes sont très mal enregistrés, notamment par les comptages hebdomadaires ne considérant pas les soldat malades et morts entre deux comptages. À partir de données statistiques, elle calcule que les registres hospitaliers s'inscrivent dans un problème qui se traduit par le nombre de décès. Puis, en un mois seulement, elle parvient à élargir les notions, fait réviser les règles, agresse une bibliothèque et modifie les conditions de vie des malades (meilleure alimentation, nouvelle hygiène, vêtements secs pour les soldats...). Elle utilise les mathématiques, l'analyse statistique à élaborer des statistiques hospitalières, une discipline nouvelle. Elle rassemble des travaux de mathématiciens contemporains comme John Snow (1813-1858), lequel est parvenu grâce aux statistiques à retracer l'origine d'une épidémie de choléra et sa diffusion dans un quartier de Londres.

ADA LOVELACE

La princesse des algorithmes



1815 **RAMANUJAN À CHICHESTER, INDIA**

1854 **ARRIVEE À L'HÔPITAL DE CHICHESTER EN ANGLAETERRE**

1860 **TRAVAILLE SUR LES FRACTIONS CONTINUES COMPOSÉES AU TRUMP CLUB DE CHICHESTER**

1869 **MEURTRE**

1870 **MORT À KODAYANKUNAL, INDIA**

Fille du poète romantique Lord Byron, Ada Lovelace est considérée aujourd'hui comme l'inventrice du premier algorithme informatique. En plein âge industriel, alors que la machine à vapeur l'honneur, les mathématiciens n'échappent pas à la mécanisation. Dans les années 1850, Ada collabore avec le mathématicien britannique Charles Babbage au développement de la machine de Babbage, qui préfigure les ordinateurs modernes. Un langage de programmation porte la nom de Ada, en hommage à sa contribution précoce à la naissance de l'informatique.

UNE « MACHINE À PENSER »
Au début des années 1850, Ada et sa mère, Annabella Milbanke, baronne de Westworth, contemplent une machine étrange. D'environ 60 cm de hauteur, fabriquée avec 2000 engrenages en laiton empilés par colonnes et entraînés par une architecture subtile et invisible. Fascinée, envoûtée par les nombres et les calculs, Ramanujan semblait manipuler avec une facilité innée. Son histoire sert à la base d'un film hollywoodien sorti en 2015 intitulé "L'homme qui défiait l'infini".

ADA ET LES MATHÉMATIQUES
Après avoir contemplé la machine à différences de Babbage, Ada aurait dit: «64, dit-on, de commencer ma vie aux mathématiques. Elle étudia les travaux des grands mathématiciens Laplace et Bachelier, avant de donner quelques cours à des jeunes filles. À l'une d'elles, elle écrit en 1842 que leur relation se présente comme correspondance mathématique sentimentale [...] éditée pour l'édification des hommes - ou celle des femmes... (comme dit le romantisme) [...] L'histoire d'Ada Lovelace, comme la nôtre et amment trait d'espérance, est une véritable histoire moderne, bien que rétrospectivement, à notre époque des années 1850, elle est considérée comme la première femme à avoir écrit un programme informatique. Ada rencontre Mary Somerville, figure politique et scientifique de l'époque, traductrice des livres de Laplace. Leur amitié semble être devenue leur apprentissage des mathématiques.

ROGER PENROSE

Des trous noirs au pavage à l'impossible



1918 **RAMANUJAN À CHICHESTER, INDIA**

1954 **ARRIVEE À L'HÔPITAL DE CHICHESTER EN ANGLAETERRE**

1960 **TRAVAILLE SUR LES FRACTIONS CONTINUES COMPOSÉES AU TRUMP CLUB DE CHICHESTER**

1969 **MEURTRE**

1970 **MORT À KODAYANKUNAL, INDIA**

Roger Penrose est l'inventeur des pavages qui portent son nom. Ces pavages ont la particularité incroyable d'être constitués avec un arrangement de deux tuiles dont l'agencement ne se répète jamais, même s'il est infini. Au-delà de ce travail fondateur, Roger Penrose a travaillé sur le travail de l'artiste M.C. Escher, les pavages de Penrose, notamment sous le résultat d'une étrange histoire: celle de la collaboration entre le mathématicien et l'artiste. Un formidable exemple montrant l'importance des aspects créatifs dans la recherche en mathématiques.

Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
L'acteur principal, Dev Patel, dans une scène avec Sorenson.
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".

ROGER PENROSE: DE LA GÉOMÉTRIE AUX TROUS NOIRS
Roger Penrose (1918-2020) aime raconter cette petite anecdote: imaginez le centre bouillonnant de Londres, au début des années 1960. Les bureaux bas à étage, les rues étroites piétonnières et, au milieu, Roger Penrose, âgé d'une trentaine d'années, se baladant un peu nonchalamment, armé de son passe-partout anglais, en conversation avec un ami. Les deux hommes traversent une rue étroite. soudain Penrose éprouve une joie inattendue. Il s'en souvient à son ami, rétroché... ce n'est pas l'effet de ce que son petit-déjeuner dégoûté le matin même ou d'une nouvelle nuit de sommeil? Le sentiment éphémère persiste presque toute la journée, jusqu'à l'épiphanie. Il a résolu un problème de géométrie fondamentale, inconnu depuis plusieurs années, lui, le mathématicien qui s'est attaqué au plus grand problème de la physique de l'époque: la relativité générale d'Einstein. La géométrie de l'espace-temps peut en outre dans cette théorie est tellement bizarre qu'elle prévoit l'existence d'autres dimensions et d'étoiles que même la lumière ne pourrait s'échapper. Aujourd'hui, grâce aux détections des ondes gravitationnelles en 2016, on a pu observer directement ces ondes gravitationnelles, éprouvées sous une découverte qui n'aurait pas été possible sans le «charisme» de la géométrie (publié en 1963) découvert par Roger Penrose en travaillant en son laboratoire.



Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
L'acteur principal, Dev Patel, dans une scène avec Sorenson.
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".
Le compositeur qui offre l'opéra "L'homme qui défiait l'infini".

Cette anecdote conjure la beauté de la simplicité et celle de l'insolite - qui est justement d'être de manière inattendue? Elle illustre parfaitement le démarche de Roger Penrose: la créativité, en mathématiques, est aussi importante que la rigueur et la maîtrise des équations. Ce mathématicien s'est engagé très tôt dans cette voie créative. Destinataire lui-même, il a utilisé l'imagination et celle de l'insolite - qui est justement d'être de manière inattendue? Elle illustre parfaitement le démarche de Roger Penrose: la créativité, en mathématiques, est aussi importante que la rigueur et la maîtrise des équations. Ce mathématicien s'est engagé très tôt dans cette voie créative. Destinataire lui-même, il a utilisé l'imagination et celle de l'insolite - qui est justement d'être de manière inattendue? Elle illustre parfaitement le démarche de Roger Penrose: la créativité, en mathématiques, est aussi importante que la rigueur et la maîtrise des équations.

Des nœuds partout !



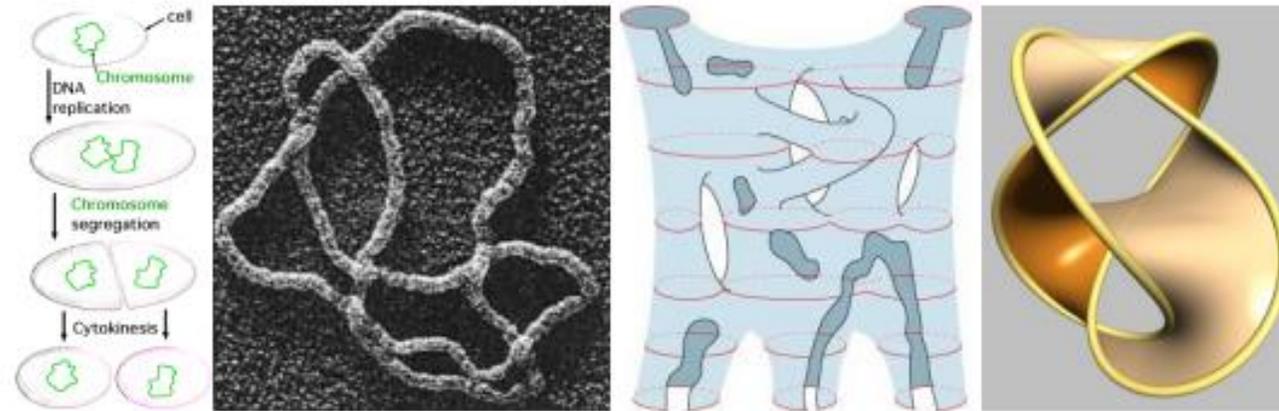
(a) Alpinisme

(b) Bateau

(c) Cravate

(d) Décoration

(e) Écriture



(f) Biologie moléculaire

(g) Physique théorique

(h) Mathématique

L'ART

DE METTRE

SA CRAVATE

DE TOUTES LES MANIÈRES CONNUES ET USITÉES.

ENSEIGNÉ ET DÉMONTRÉ

EN SEIZE LEÇONS,

PRÉCÉDÉ

DE L'HISTOIRE COMPLÈTE DE LA CRAVATE, DEPUIS SON ORIGINE JUSQU'À CE
JOUR; DE CONSIDÉRATIONS SUR L'USAGE DES COLS, DE LA
CRAVATE NOIRE ET L'EMPLOI DES FOULARDS.

PAR

LE B^{ON} ÉMILE DE L'EMPESÉ.

OUVRAGE INDISPENSABLE A TOUS NOS FASHIONABLES,

Orné de trente-deux figures explicatives du texte,
et du portrait de l'auteur.

*« L'art de mettre sa cravate est à l'homme
du monde, ce que l'art de donner à dîner
est à l'homme d'État. »*

(Pensée jusqu'alors inédite.)

DEUXIÈME ÉDITION.



Paris,

À LA LIBRAIRIE UNIVERSELLE,

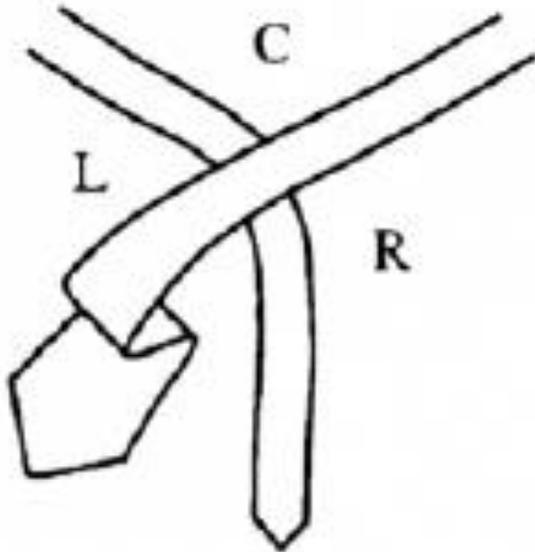
RUE VIVIENNE N. 2 BIS, AU COIN DU PASSAGE COLBERT.

Et chez tous les marchands de cravates, de cols et de foulards les
plus en vogue de la Capitale.

1827.

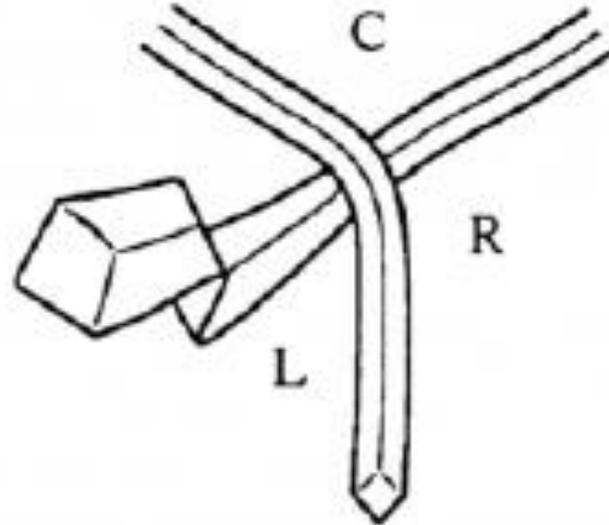


Notations



$L \otimes \dots$

ou

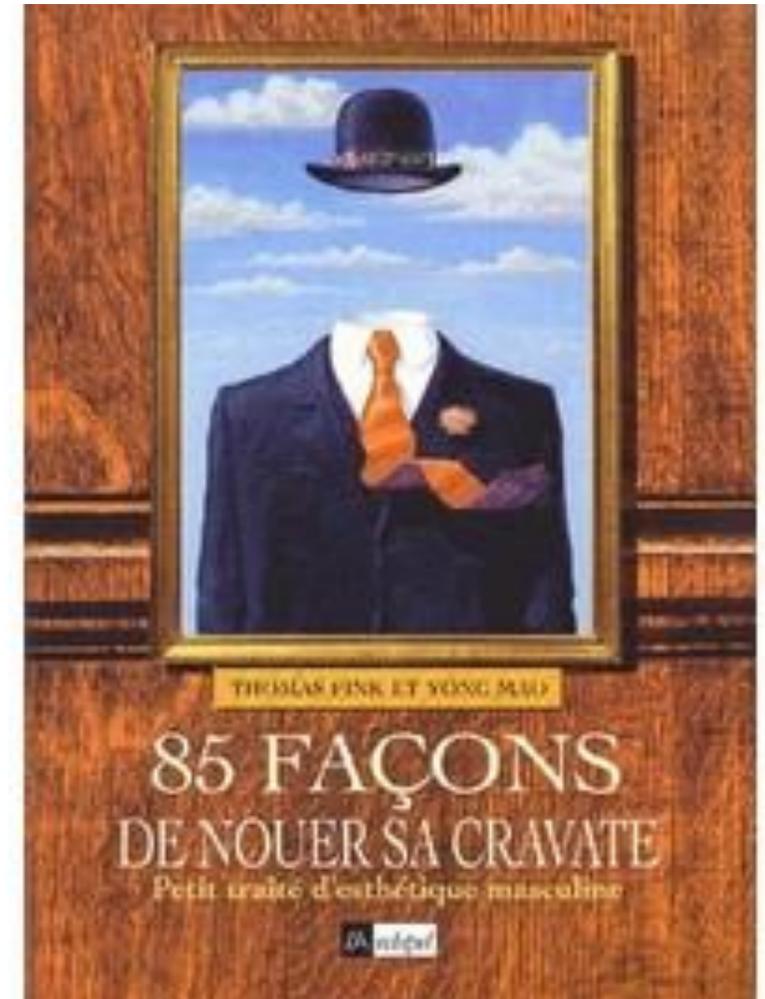


$L \circ \dots$

- On commence par un L
- On finit par un C
- Jamais deux lettres répétées de suite (impossible d'avoir RR, LL ou CC)
- On alterne les croix et les points (on ne passe pas deux fois de suite en dessous ou au-dessus)

Fink & Mao (1999) : 9 mouvements max

Number	Sequence	Name
1.	Lo Ri Co T	Small knot
2.	Li Ro Li Co T	Four-in-hand
3.	Lo Ri Lo Ri Co T	Kelvin
4.	Lo Ci Ro Li Co T	Nicky (self-releasing Pratt)
6.	Li Ro Li Ro Li Co T	Victoria
7.	Li Ro Ci Lo Ri Co T	Half-Windsor
12.	Lo Ri Lo Ci Ro Li Co T	St Andrew
18.	Lo Ci Ro Ci Lo Ri Co T	Plattsburgh
23.	Li Ro Li Co Ri Lo Ri Co T	Cavendish
31.	Li Co Ri Lo Ci Ro Li Co T	Windsor
44.	Lo Ri Lo Ri Co Li Ro Li Co T	Grantchester
54.	Lo Ri Co Li Ro Ci Lo Ri Co T	Hanover
78.	Lo Ci Ro Ci Lo Ci Ro Li Co T	Balthus



Mikael Vejdemo-Johansson (2014) : 177 147 combinaisons
(au plus 11 plis)



Lo Ci Lo Ri Co Ri Lo Ci U

Nœud gordien



Voyant Gordius, le peuple le fit donc roi. En remerciement, Gordius dédia son char à bœufs à Zeus, en l'attachant avec un nœud très complexe - le nœud gordien.

Un autre oracle - ou peut-être le même, la légende n'est pas précise, mais les oracles sont nombreux dans la mythologie grecque - prédit que la personne qui dénouera le nœud régnera sur toute l'Asie.

Problème résolu !!!



Alexandre tranchant le nœud gordien, Jean-Simon Berthélemy (1767)

Frise chronologique

Depuis toujours : usages pratiques et décoratifs

⋮

≈ 1830 C.-F. Gauss (Göttingen) : quelques essais sur les tresses

⋮

1867 W. Thomson [Lord Kelvin] : atomes comme nœuds dans l'éther

1870-1890 P.G. Tait, C.N. Little, T.P. Kirkman : tabulation empirique

⋮

1923 E. Artin (Hambourg) : le groupe des tresses

⋮

1924 J.W. Alexander (Princeton) : nœuds sous forme de tresses

⋮

1935 A. Markov (Moscou) : correspondance entre tresses et nœuds

⋮

1984 V. Jones (Berkeley) : représentations « quantiques » des tresses et invariants « quantiques » des nœuds (Médaille Fields 1990)

⋮

1994 P. Dehornoy (Caen) : le groupe des tresses est ordonnable.

⋮

2001 D. Krammer, S. Bigelow : représentation fidèle par des matrices

⋮

En mathématiques, tout était déjà connu à nos ancêtres ? Loin de cela !
Les mathématiques sont bien vivantes et évoluent constamment.

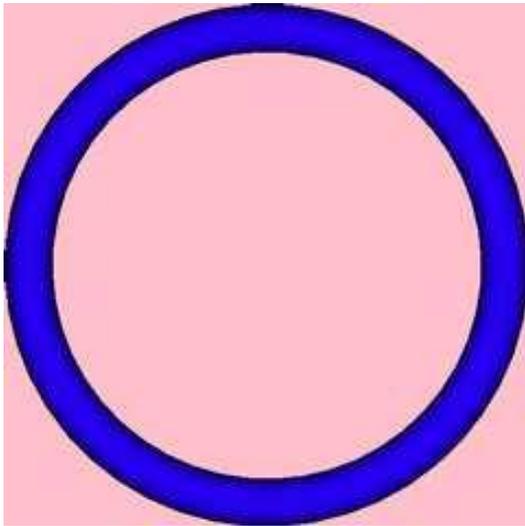
Qu'est-ce qu'un nœud ?

Un nœud est un plongement d'un cercle dans \mathbb{R}^3

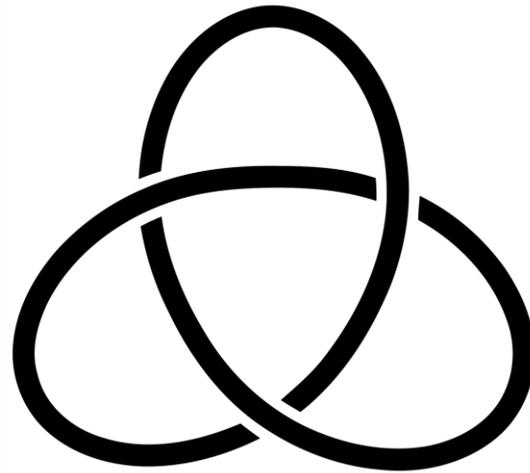
- Prenez un morceau de ficelle.
- Faites un nœud
- Collez maintenant les extrémités de la ficelle ensemble pour former une boucle nouée.

Quelques exemples

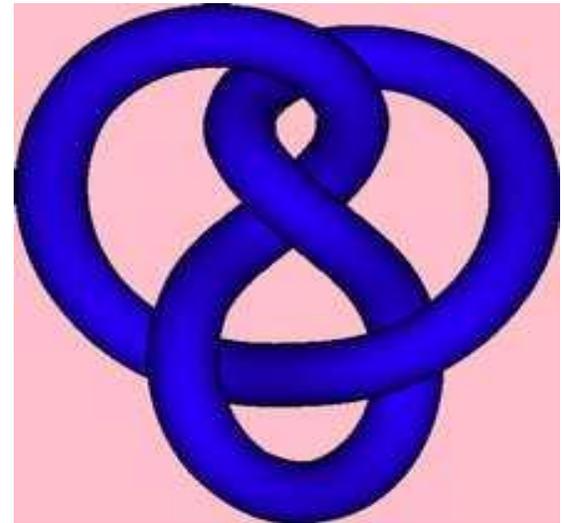
Nœud trivial



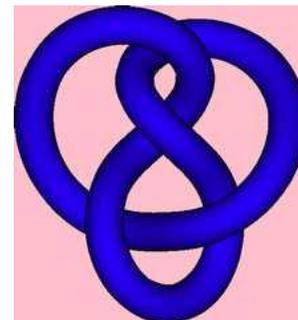
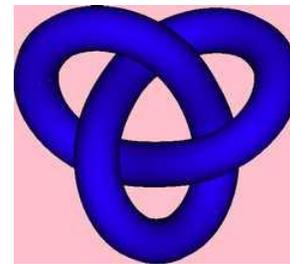
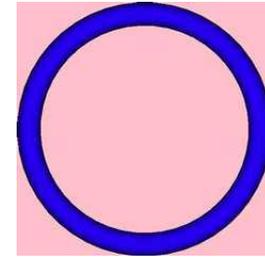
Nœud de trèfle



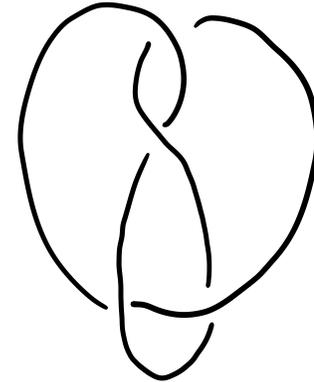
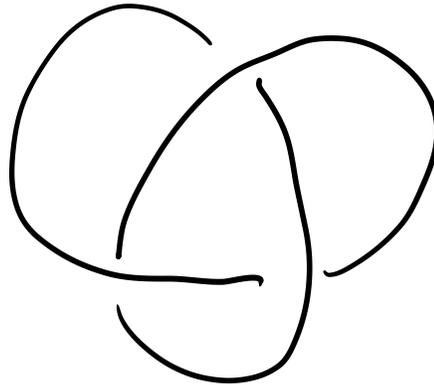
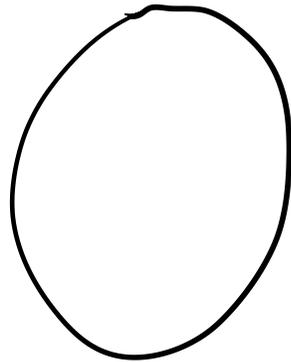
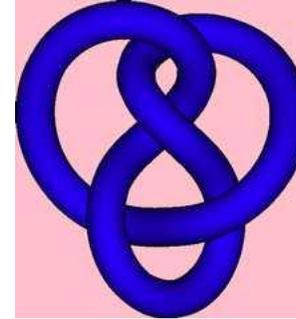
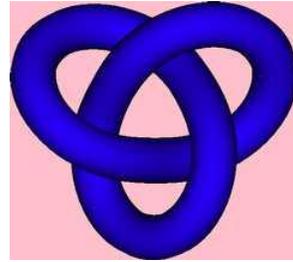
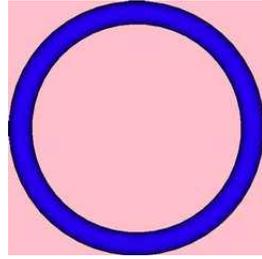
Nœud en huit



Quel est ce nœud?



Exemples

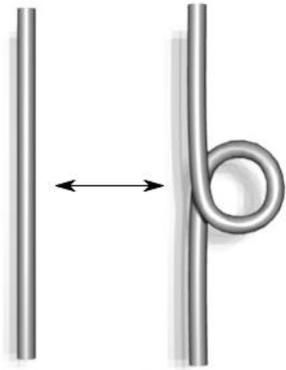


Deux nœuds sont équivalents s'il existe une isotopie de \mathbb{R}^3 amenant un nœud à l'autre.

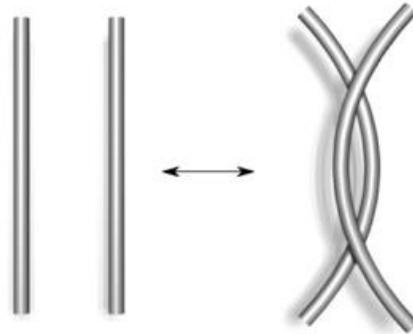
Deux nœuds sont équivalents si l'on peut obtenir l'un à partir de l'autre en déformant la corde sans la couper.

Mouvement de Reidemeister (1927) [et Briggs, 1926]

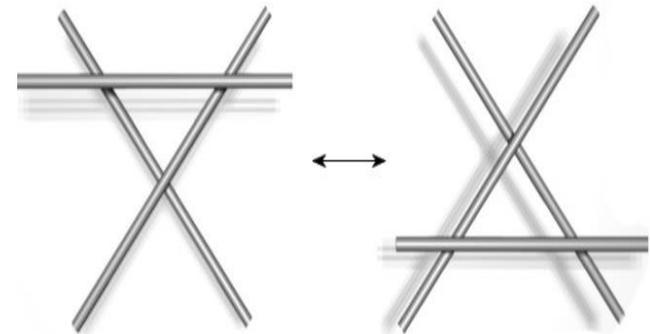
R1



R2

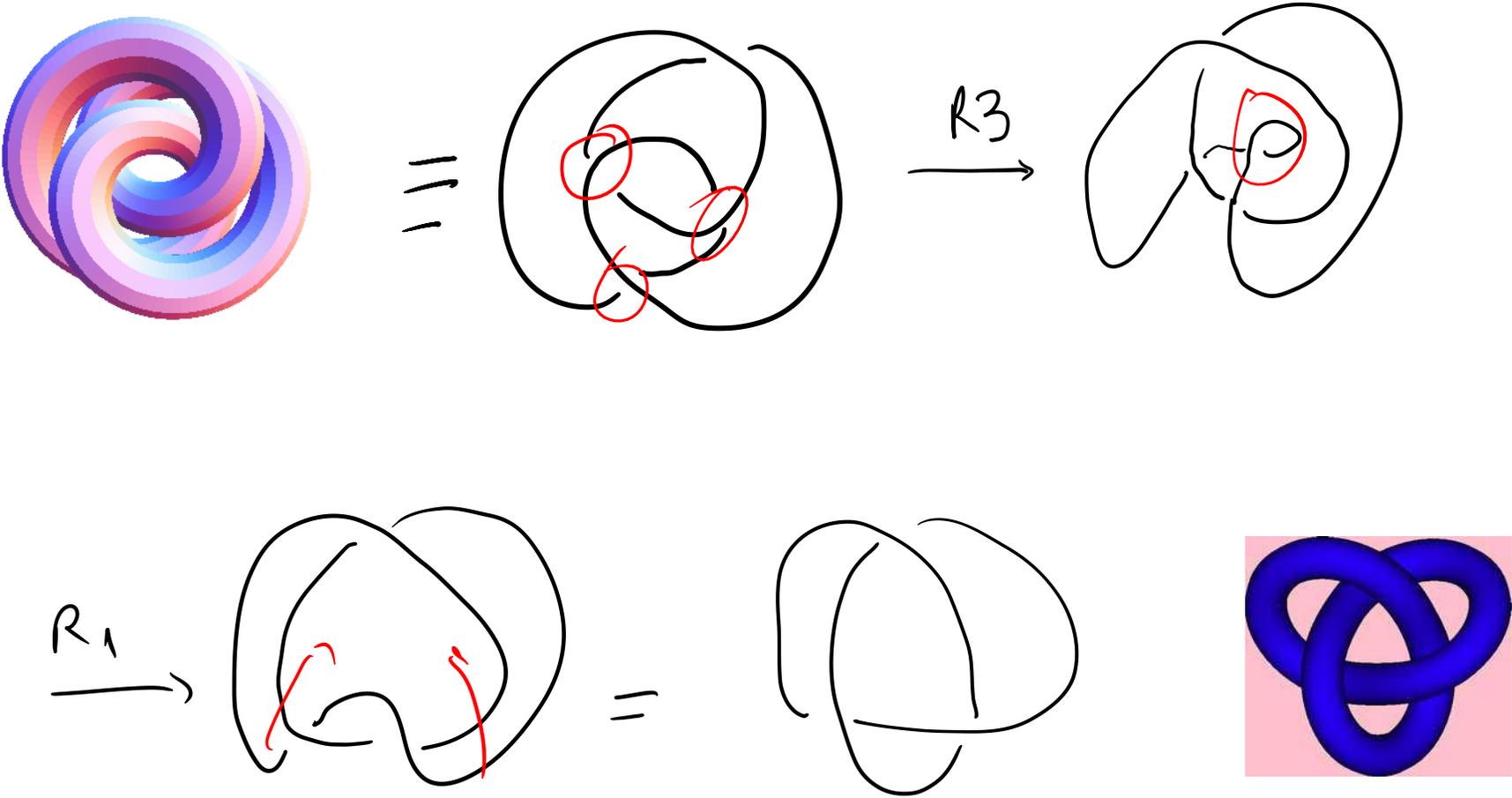


R3



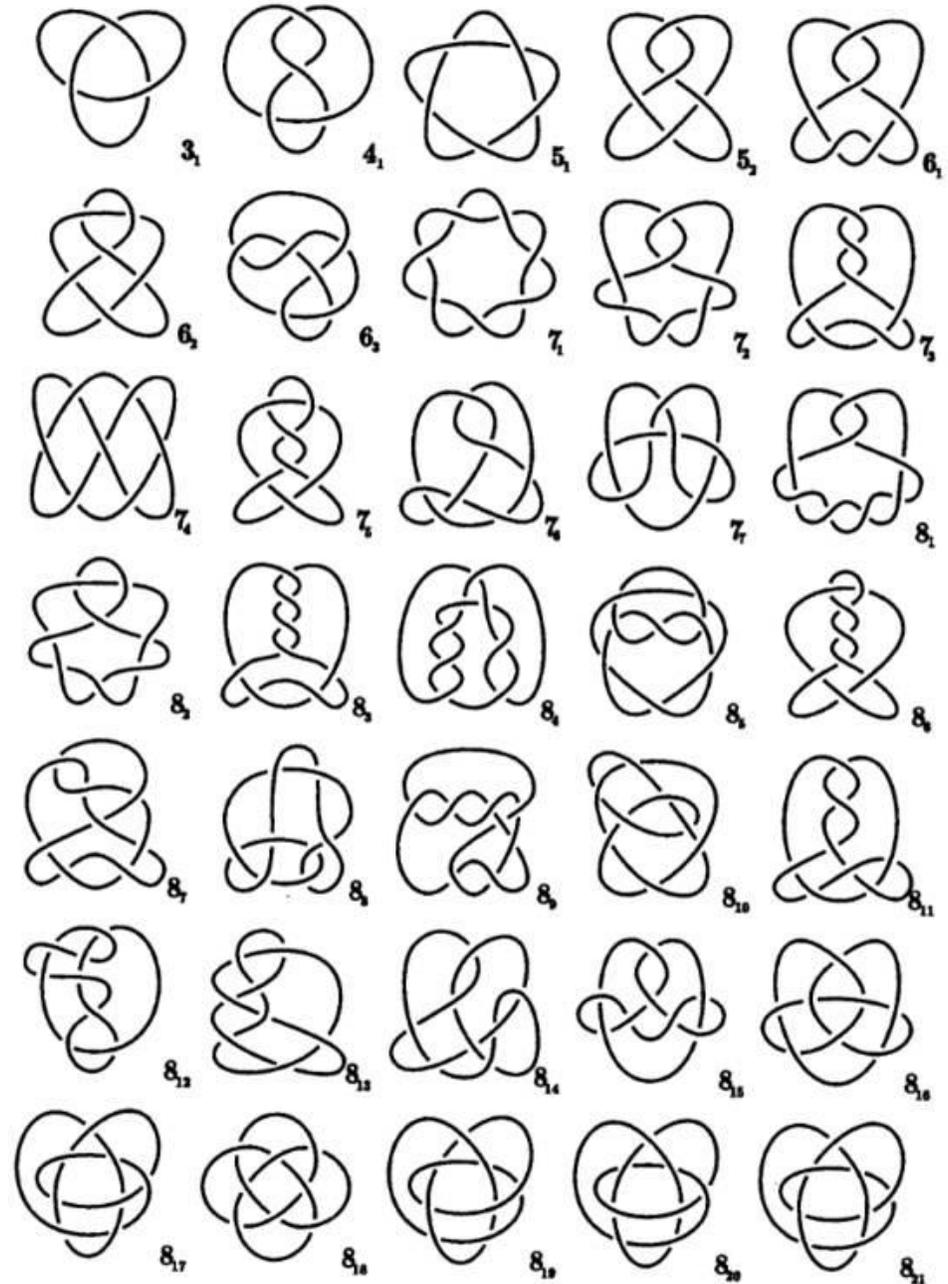
- R1 enroule ou déroule le brin.
- R2 superpose/sépare un morceau du brin sur l'autre.
- R3 déplace un morceau de brin sur un croisement.

Quel est ce noeud?



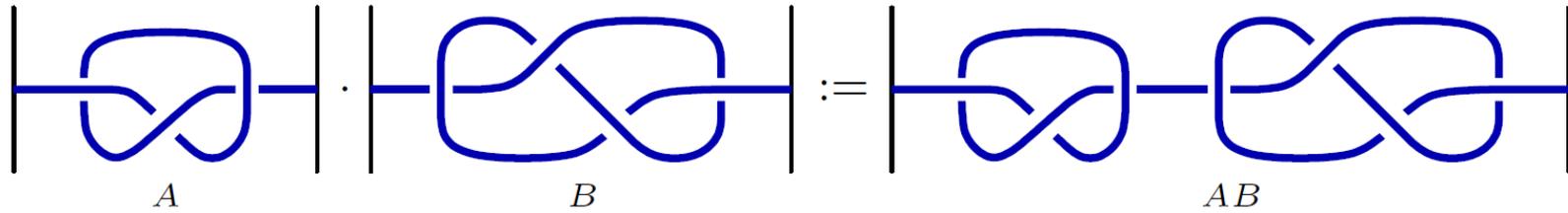
Type de nœuds

- Le premier numéro donne la quantité de croisements (l'ordre).
- L'indice est une simple indication pour distinguer les nœuds de même ordre.

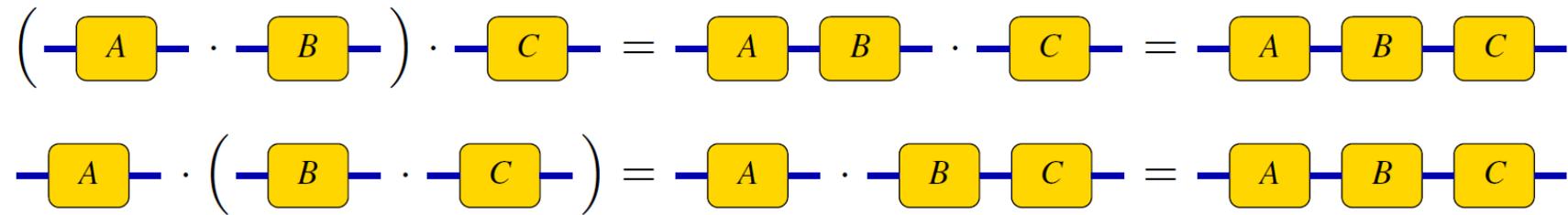


La multiplication des nœuds

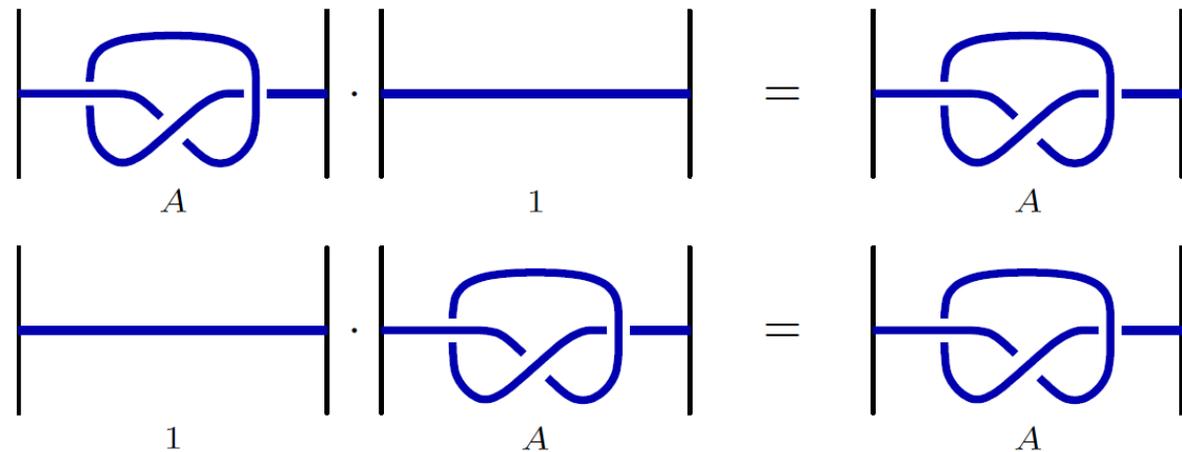
Les nœuds jouissent d'une multiplication naturelle :



Est-elle associative ? $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$? Bien sûr !

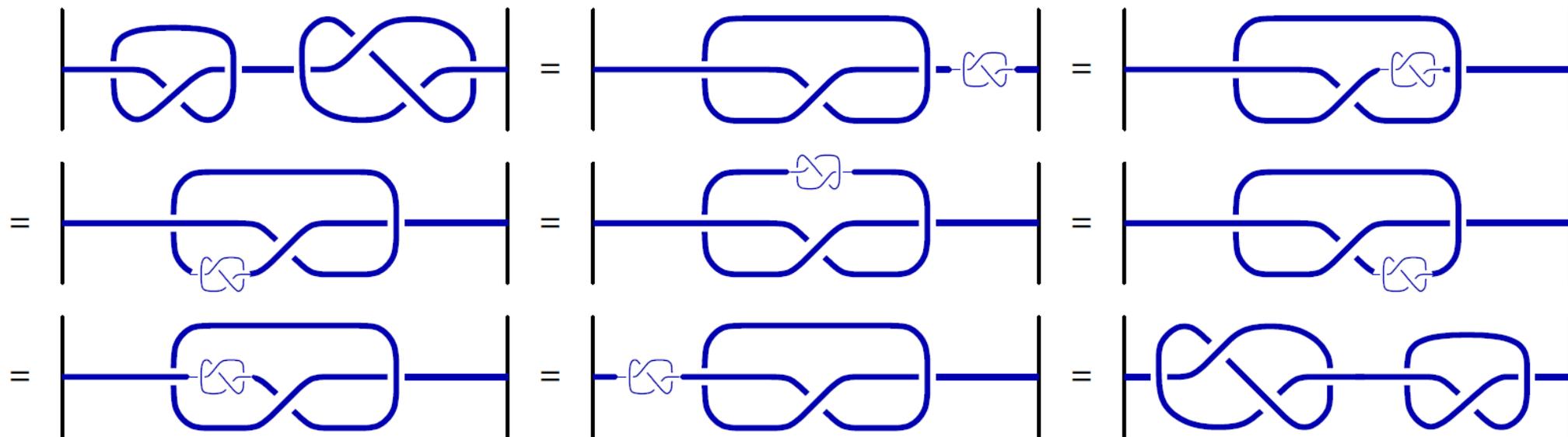


Admet-elle un élément neutre ? $A \cdot 1 = A$ et $1 \cdot A = A$? Bien sûr !

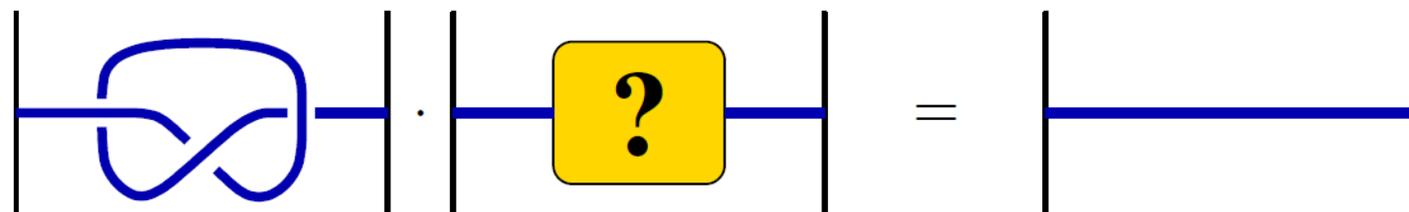


La multiplication des nœuds (suite)

Est-elle commutative ? $A \cdot B = B \cdot A$?

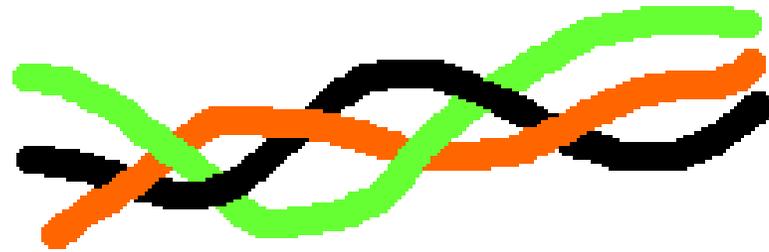


Existe-t-il des éléments inverses ? $A \cdot A^{-1} = 1$ et $A^{-1}A = 1$?



Le nœud de trèfle n'a pas d'inverse.

Tresses



une tresse est constituée d'un ensemble fini de "brins" entrelacés ayant une origine et une extrémité. L'ordre entre les origines et les extrémités étant différents (permutations).

En raboutant les extrémités d'une tresse, on obtient un nœud. On parle de clôture d'une tresse.

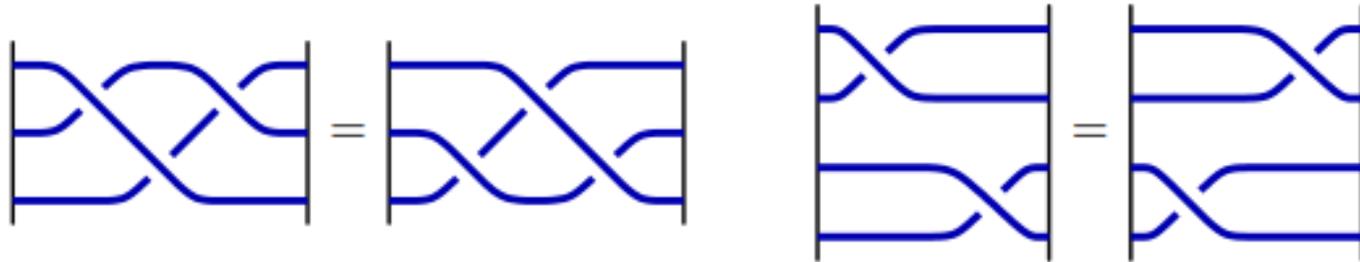
Ci-dessus, à droite, cette tresse à deux brins peut être clôturée en reliant (b) à (c) et (a) à (d) : on reconnaît alors le double huit qui n'est autre qu'un nœud de trèfle.

Tresses



On fixe les extrémités
à gauche et à droite

Au milieu les brins peuvent encore bouger : = This part shows a braid with four strands between two vertical bars. The central section of the braid is enclosed in a box, and an equals sign follows, pointing to a straight section of the braid, indicating that the internal strands can move.

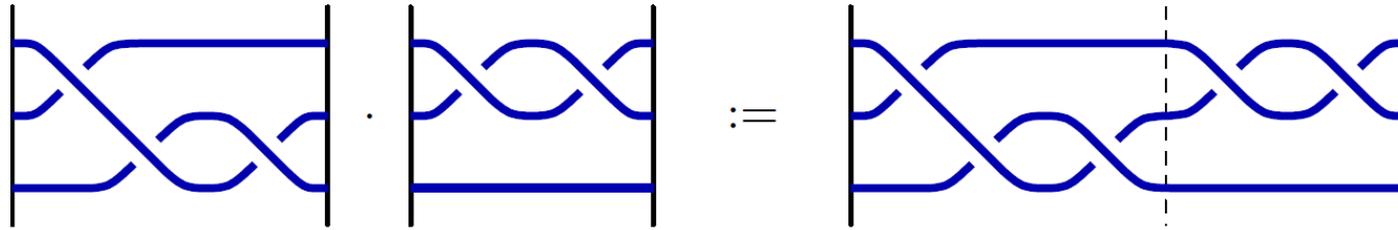


La longueur n'est pas essentielle :



On peut multiplier les tresses !

Les tresses à n brins jouissent d'une multiplication naturelle :



Questions naturelles :

- 1 La multiplication des tresses est-elle associative ?

Oui !

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- 2 Est-elle commutative ?

Non !

$$A \cdot B = B \cdot A$$

- 3 Admet-elle un élément neutre ?

Oui !

$$A \cdot 1 = A \quad \text{et} \quad 1 \cdot A = A$$

- 4 Pour une tresse A donnée, y a-t-il une tresse inverse ?

Oui !

$$A \cdot A^{-1} = 1 \quad \text{et} \quad A^{-1} \cdot A = 1$$

Merci de votre attention !



Remerciements