

# Quel choix pour l'électeur ?

François Dubois <sup>1</sup>

**Kafemath**

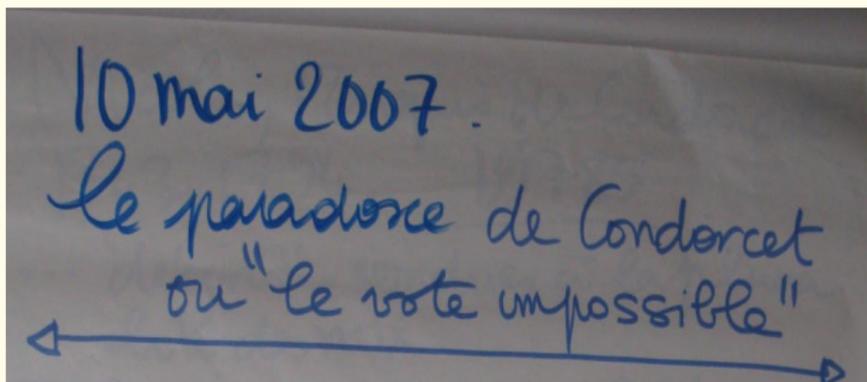
**"La Coulée Douce", 51 rue du Sahel, Paris 12e**

**jeudi 10 mars 2022**

---

<sup>1</sup> membre fondateur de l'association Kafemath

# Un classique au Kafemath



"Chez Céleste", 18, rue de Cotte, Paris 12e

# Un classique au Kafemath...

exemple à trois exemple des maths... Hare nouvelles approches mathématiques assentiment votons !

Eh bien votons, maintenant !

François Dubois <sup>1</sup>

**La question d'un système de vote  
est un problème de maths très difficile !**

**Kafemath  
"L'Oiseau Blanc", Paris 08<sup>ième</sup>  
jeudi 05 avril 2012**

---

<sup>1</sup> animateur du Kafemath, café mathématique à Paris.

# Au delà d'un choix binaire

dire **oui ou non**, faire un choix binaire, c'est facile !  
mais si on a plus de deux choix possibles ?  
si plus de deux candidats se présentent ?

solution "à la Française" : se ramener au cas précédent !  
au second tour : deux candidats... choix binaire !  
après le premier tour on garde les deux premiers...  
cette façon de faire est-elle **la seule possible** ?

quel **système de vote** ? une très vieille question !

élection du pape par les cardinaux

29 novembre **1268** :

mort de Clément IV

1er septembre **1271** :

élection de Grégoire X



## Mémoire sur les élections au scrutin, 1781

DES SCIENCES.

657

## M É M O I R E

## SUR LES ÉLECTIONS AU SCRUTIN \*.

Par M. DE BORDA.

C'EST une opinion généralement reçue, & contre laquelle je ne sache pas qu'on ait jamais fait d'objection, que dans une élection au scrutin, la pluralité des voix indique toujours le vœu des électeurs, c'est-à-dire, que le Candidat qui obtient cette pluralité, est nécessairement celui que les électeurs préfèrent à ses concurrents. Mais je vais faire voir que cette opinion, qui est vraie dans le cas où l'élection se fait entre deux sujets seulement, peut induire en erreur dans tous les autres cas.

Supposons, par exemple, que l'élection se fasse entre trois sujets présentés *A, B, C*; & que les électeurs soient au nombre de 21: supposons encore que de ces 21 électeurs, il y en ait 13, qui préfèrent le sujet *B* au sujet *A*, & que 8 seulement préfèrent le sujet *A* au sujet *B*; que ces mêmes 13 électeurs donnent aussi la préférence à *C* sur *A*, tandis que les 8 autres la donnent à *A* sur *C*; il est clair qu'alors le sujet *A* aura, dans l'opinion collective des électeurs, une infériorité très-marquée, tant par rapport à *B* que par rapport à *C*, puisque chacun de ces derniers, comparé au sujet *A*, a 13 voix, tandis que le sujet *A* n'en a que 8; d'où il suit évidemment que le vœu des électeurs donneroit l'exclusion au sujet *A*. Néanmoins il pourroit arriver qu'en faisant l'élection à la manière ordinaire, ce sujet eût la pluralité des voix. En effet, il n'y a qu'à supposer que dans le nombre des 13 électeurs qui sont favorables aux sujets *B* & *C*, & qui donnent à l'un & à l'autre la préférence sur *A*, il y en ait 7 qui mettent *B*

\* Les idées contenues dans ce Mémoire, ont déjà été présentées à l'Académie il y a quatorze ans, le 16 Juin 1770.

# Chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799)



traces-ecrites.com

Mémoire sur les élections au scrutin, 1781

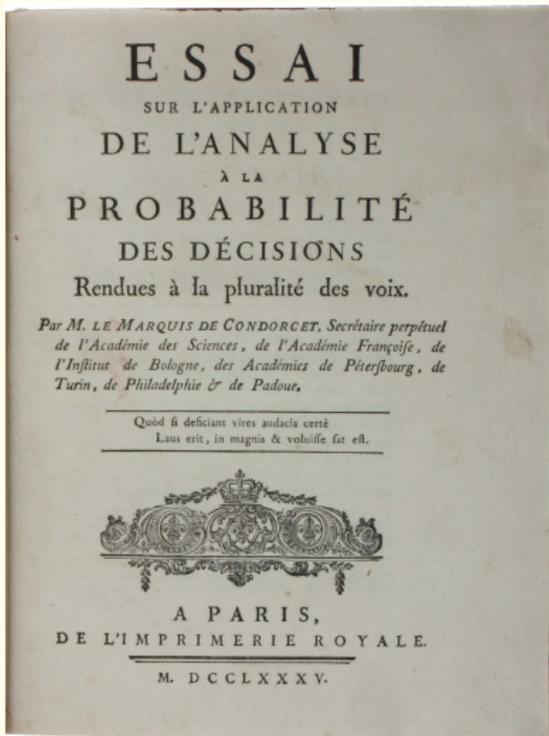
“Si vous parlez de ce que je dis sur les élections,  
il faut observer que M. le chevalier de [Borda](#)  
a remarqué le premier l'absurdité de la méthode ordinaire.”  
N. de [Condorcet](#), lettre à Garat, 1784

# Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794)



# Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité...

Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions  
rendues à la pluralité des voix (1785)



# Vainqueurs de Borda et de Condorcet

## Vainqueur de Borda

on choisit un nombre  $n$  inférieur ou égal au nombre de candidats  
chaque électeur construit une liste de  $n$  candidats

par ordre de préférence

$n$  points au premier de la liste,  $n - 1$  points au second

et ainsi de suite, 1 point pour le  $n$ ième de la liste

score d'un candidat : somme de tous les points

qui lui ont été attribués

le ou les candidats dont les scores sont les plus élevés

remportent les élections.

si  $n = 1$ , système de scrutin majoritaire à un tour

## Vainqueur de Condorcet

celui, s'il existe,

qui comparé tour à tour à tous les autres candidats,

est à chaque fois le candidat préféré

# Exemple avec trois candidats... et soixante électeurs

préférences individuelles entre les trois candidats

si je préfère A à B et B à C, je le note :  $A > B > C$

les autres électeurs peuvent préférer B à C et C à A :

$$B > C > A$$

une ribambelle de relations d'ordre !!

exemple où on utilise 5 relations (sur un total possible de 6)

$$A > B > C \quad 23 \text{ cas}$$

$$B > C > A \quad 17 \text{ cas}$$

$$C > A > B \quad 10 \text{ cas}$$

$$C > B > A \quad 8 \text{ cas}$$

$$B > A > C \quad 2 \text{ cas}$$

$$??? \quad 60 \text{ cas}$$

je tire un trait et j'additionne ?

possible d'agréger des relations d'ordre individuelles ?

obtenir **une relation d'ordre globale** ?

# Résultat d'un "premier tour à la Française"

seul le candidat préféré a une voix

$A > B > C$	23 cas
$B > C > A$	17 cas
$C > A > B$	10 cas
$C > B > A$	8 cas
$B > A > C$	2 cas

Score de A : 23

Score de B : 19

Score de C : 18

$A > B > C$

# Vainqueur de Borda

le premier du trio : 2 points, le second : 1 point, le troisième : 0 point

$$A > B > C \quad 23 \text{ cas}$$

$$B > C > A \quad 17 \text{ cas}$$

$$C > A > B \quad 10 \text{ cas}$$

$$C > B > A \quad 8 \text{ cas}$$

$$B > A > C \quad 2 \text{ cas}$$

score de A :

$$(2 \times 23) + (0 \times 17) + (1 \times 10) + (0 \times 8) + (1 \times 2) = 58$$

score de B :

$$(1 \times 23) + (2 \times 17) + (0 \times 10) + (1 \times 8) + (2 \times 2) = 69$$

score de C :

$$(0 \times 23) + (1 \times 17) + (2 \times 10) + (2 \times 8) + (0 \times 2) = 53$$

$$B > A > C$$

# Vainqueur de Condorcet

regarder les duels deux à deux issus des préférences

$$A > B > C \quad 23 \text{ cas}$$

$$B > C > A \quad 17 \text{ cas}$$

$$C > A > B \quad 10 \text{ cas}$$

$$C > B > A \quad 8 \text{ cas}$$

$$B > A > C \quad 2 \text{ cas}$$

duel A - B :

$$\text{score de A} = 23 + 10 = 33$$

$$\text{score de B} = 17 + 8 + 2 = 27$$

duel B - C

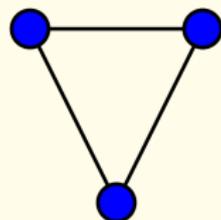
$$\text{score de B} = 23 + 17 + 2 = 42$$

$$\text{score de C} = 10 + 8 = 18$$

duel C - A

$$\text{score de C} = 17 + 8 + 10 = 35$$

$$\text{score de A} = 23 + 2 = 25$$



wikipedia.org

pas de vainqueur de Condorcet !

## Second exemple

préférences des 81 électeurs

$A > B > C$	30 cas
$A > C > B$	01 cas
$B > A > C$	29 cas
$B > C > A$	10 cas
$C > A > B$	10 cas
$C > B > A$	01 cas

calcul de Borda :

$$\text{score de A : } 2 \times (30 + 1) + 29 + 10 = 101$$

$$\text{score de B : } 2 \times (29 + 10) + 30 + 1 = 109$$

$$\text{score de C : } 2 \times (10 + 1) + 1 + 10 = 33$$

le candidat **B** est le vainqueur de **Borda**

calcul de Condorcet :

$$\text{duel A-B : } 30 + 1 + 10 = 41 / 40 = 29 + 10 + 1$$

$$\text{duel A-C : } 30 + 1 + 29 = 60 / 21 = 10 + 10 + 1$$

le candidat **A** est le vainqueur de **Condorcet** !

# Formaliser mathématiquement le problème

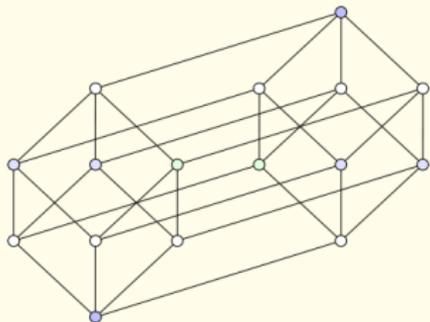
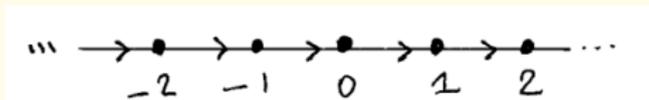
pas de nombres *a priori* inutiles dans l'approche de Condorcet  
famille de  $m$  candidats

préférences des électeurs entre les candidats :  $m!$  relations d'ordre

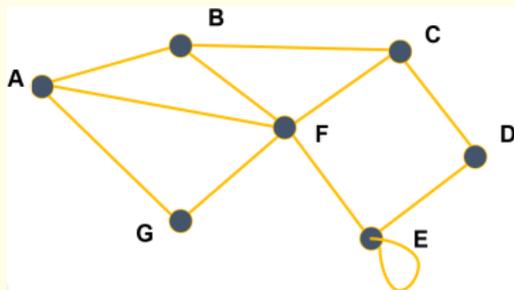
$$A_1 > A_2 > \dots > A_m \quad N_1 \text{ cas de figure}$$

$$A_2 > A_1 > \dots > A_m \quad N_2 \text{ cas de figure, etc !}$$

comment agréger les choix individuels pour former un "ordre social" ?  
peut-on construire un classement global  $>_S$  ?



wikipedia.org



info-mounier.fr

# Formaliser mathématiquement le problème (ii)



futura-sciences.com

**Axiomes** pour l'agrégation

(1) **unanimité**

si  $A > B$  quel que soit le votant, alors  $A >_S B$

(2) **indépendance des alternatives non pertinentes**

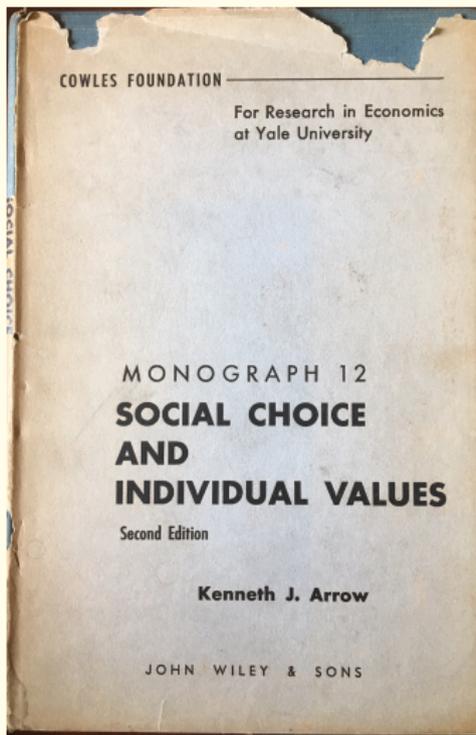
le choix social dépend du classement relatif des candidats entre eux et non des candidats intermédiaires

(3) **universalité** : le choix de chaque électeur peut être arbitraire

(4) **non dictature**

aucun votant ne peut imposer son choix sans tenir compte des autres votants.

# Théorème d'impossibilité de Arrow (1951)



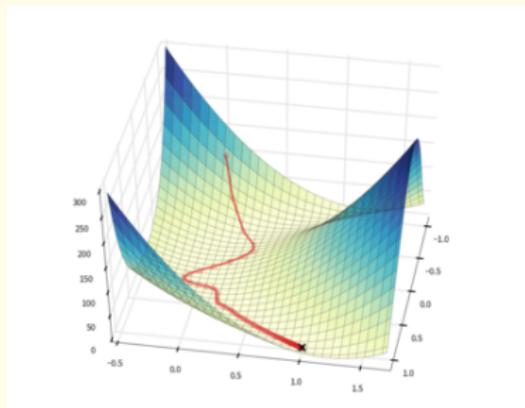
thewire.in

le problème précédent n'a **pas de solution**

**Kenneth Arrow** a reçu le prix Nobel d'économie en 1972

# Algorithme de Arrow-Hurwicz

On the Stability  
of the Competitive Equilibrium, I  
Kenneth J. Arrow and Leonid Hurwicz  
Econometrica, vol. 26, pp. 522-552  
octobre 1958



mrmint.fr

Utilisation de la [dualité pour l'optimisation sous contraintes](#)  
variante de l'algorithme de Hirofumi Uzawa (1958).

“Iterative methods for concave programming”  
in Arrow, Hurwicz, Uzawa (eds.).

Studies in linear and nonlinear programming,  
Stanford University Press, p 155-165

# Kenneth Arrow (1921- 2017)



# Jugement majoritaire de Balinski et Laraki (2006)

étape préliminaire :

se donner une grille **commune** de notation, par exemple  
 à rejeter < insuffisant < passable < assez bien < bien < très bien

vote proprement dit

**chaque électeur** donne un jugement et un seul sur **chaque candidat**

classement entre les candidats par extraction de médianes successives

“mention majoritaire” : **plus de 50 % des voix**

en additionnant les mentions qui lui sont supérieures

exemple d'un candidat qui reçoit les évaluations suivantes

à rejeter < insuffisant < passable < assez bien < bien < très bien  
 10%            10 %            20 %            20 %            30 %            10 %

40 % de votes égaux ou supérieurs à la mention “bien”

60 % égaux ou supérieurs à la mention “assez bien”

mention majoritaire : “assez bien”

# Michel Balinski (1933 - 2019) et Rida Laraki (né en 1974)



[sudouest.fr](http://sudouest.fr)



[sites.google.com/site/ridalaraki](https://sites.google.com/site/ridalaraki)

# Le goût du vin

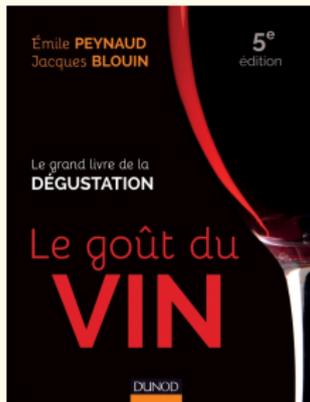
Classer des vins lors d'une compétition viticole

peu de juges et beaucoup de candidats !

avoir une grille d'analyse assez fine :

médiocre, passable, bon, très bon, excellent

le jugement majoritaire est bien adapté !



voir le livre de Emile Peynaud et Jacques Blouin

(édition 2006, première édition en 1991)

# Primaire populaire de janvier 2022

chaque “électeur” se prononce sur chaque candidat  
 mentions proposées :

très bien, bien, assez-bien, passable, insuffisant

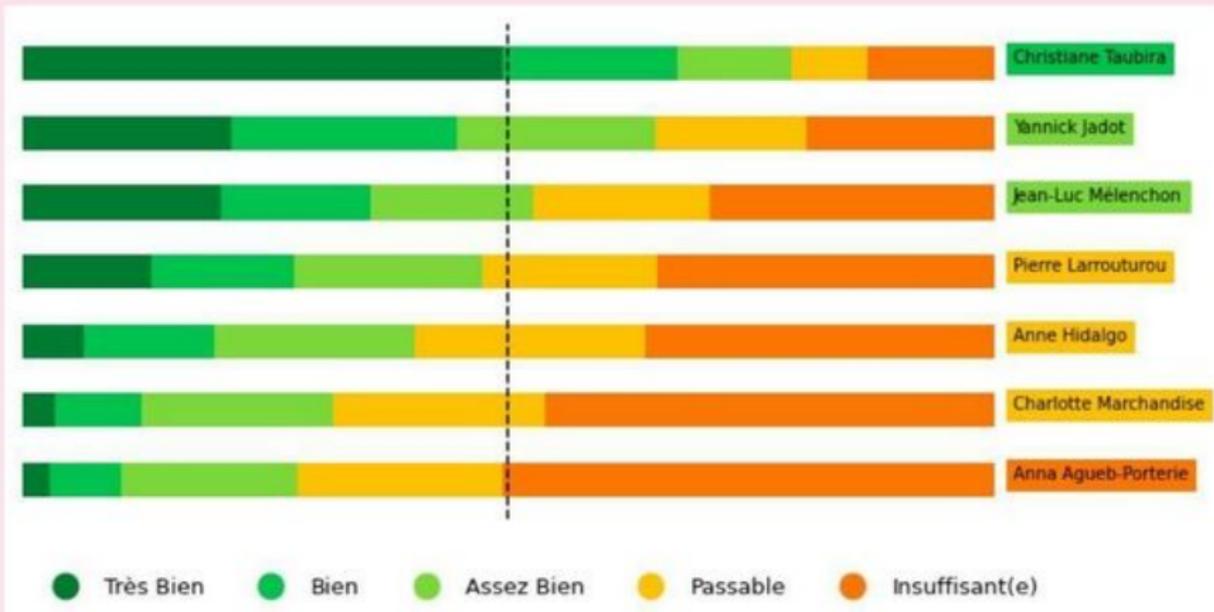
nom	TB	B	AB	P	I	médiane
C. T.	49	18	12	8	13	B+
Y. J.	22	23	20	16	19	AB+
J.-L. M.	21	15	17	18	29	AB-
P. L.	13	15	19	18	35	P+
A .H.	6	13	21	24	36	P+
C. M.	3	9	20	22	46	P-
A. A.-P.	3	7	18	21	51	I

choix pour l'électeur

5 mentions et 7 candidats :  $5^7 = 78125$

395 738 votants

# Extraction de la médiane



# Vote par assentiment ou par approbation (approval voting)



as.nyu.edu



cdn.lifestorynet.com

Steve Brams (né en 1940) et Peter Fishburn (1936-2021)

*Approval Voting*, *American Political Science Review*, 1978

l'électeur s'exprime sur **chaque candidat** en indiquant  
s'il le soutient ou non

le candidat soutenu par le plus grand nombre de votants est élu  
dépouillement relativement simple !

## Vote par assentiment (ii)



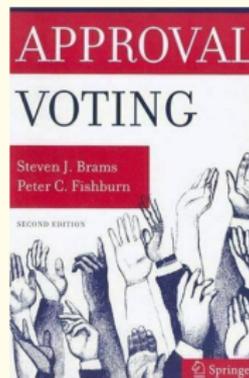
[www2.assemblee-nationale.fr](http://www2.assemblee-nationale.fr)

vote par assentiment : au lieu de prendre un seul bulletin,  
l'électeur vote pour les candidates et les candidats qu'il juge  
apte à le représenter

résultat de chaque candidat *a priori* inchangé lors d'un nouveau  
vote si chaque électeur émet une **opinion** relativement  
au programme de chaque candidat.

résultat du vote : compter l'ensemble des bulletins exprimés  
si Monsieur X, Madame Y ou Monsieur Z ont obtenu  
35%, 55% et 51% des voix des votants, le total est supérieur à 1 ;  
le corps électoral a placé clairement en tête Madame Y.  
pas de second tour *a priori* pour cet exemple

## Vote par assentiment (iii)



[link.springer.com](https://link.springer.com)

favorise l'élection de **candidats consensuels**

depuis 1987 pour des élections à la Mathematical Association  
of America

expériences de recherche en France lors d'élections présidentielles

# Jugement majoritaire ou vote par assentiment ?

Jugement majoritaire bien adapté

lorsqu'il y a **beaucoup de candidats et peu de juges !**

dégustation des vins

épreuve de patinage artistique aux jeux olympiques



Gabriella Papadakis  
Guillaume Cizeron  
Pékin, 2022

# Jugement majoritaire ou vote par assentiment ? (ii)

## Vote par assentiment

c'est le jugement majoritaire pour deux opinions possibles  
seulement : à **retenir** ou à **rejeter**

bien adapté pour **peu de candidats et beaucoup de juges !**

opinion frustrée : acceptation ou rejet

modulée avec précision par le grand nombre d'électeurs  
devant le petit nombre de candidats

peut être mis en œuvre avec le matériel existant !

dépouillement un tout petit peu plus compliqué...



[www.lapresse.ca](http://www.lapresse.ca)

**Possible demain ?**

L'article 7 de la constitution de 1958  
prévoit que le président de la République  
est élu au scrutin uninominal à deux tours

# Le 10 avril 2022

12 candidats

N. A.

N. D.-A.

A. H.

Y. J.

J. L.

M. L.-P.

E. M.

J.-L. M.

V. P.

P. P.

F. R.

E. Z.



[www.paris-normandie.fr](http://www.paris-normandie.fr)

premier tour classique :  $12+1=13$  choix possibles pour les votants

vote par assentiment :  $2^{12} = 4096$  choix pour chaque électeur !

## Pour en savoir plus

Gilles-Gaston Granger. *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet*, Presses Universitaires de France, Paris, 1956.

Jean-François Laslier, Karine Van-der-Straeten. Vote par assentiment pendant la présidentielle de 2002 : analyse d'une expérience, *Revue Française de Science Politique*, février 2004.

Michel Balinski, Rida Laraki. Le Jugement Majoritaire : l'Expérience d'Orsay, *Commentaire*, vol. 30, 2007.

Antoinette Baujard, Herrade Igersheim. Expérimentation du vote par note et du vote par approbation lors de l'élection présidentielle française du 22 avril 2007, rapport au Centre d'Analyse Stratégique, décembre 2007.

Michel Balinski, Rida Laraki. Ne votez pas, jugez !  
*Pour la Science*, avril 2012.

Karel Janeček. Mathématiques électorales : vers plus de démocratie, *Maths Société Express*, CIJM, p. 87-92, 2016

# Ballottage !



Gosciny et Uderzo, 1966 ; [www.expressio.fr](http://www.expressio.fr)