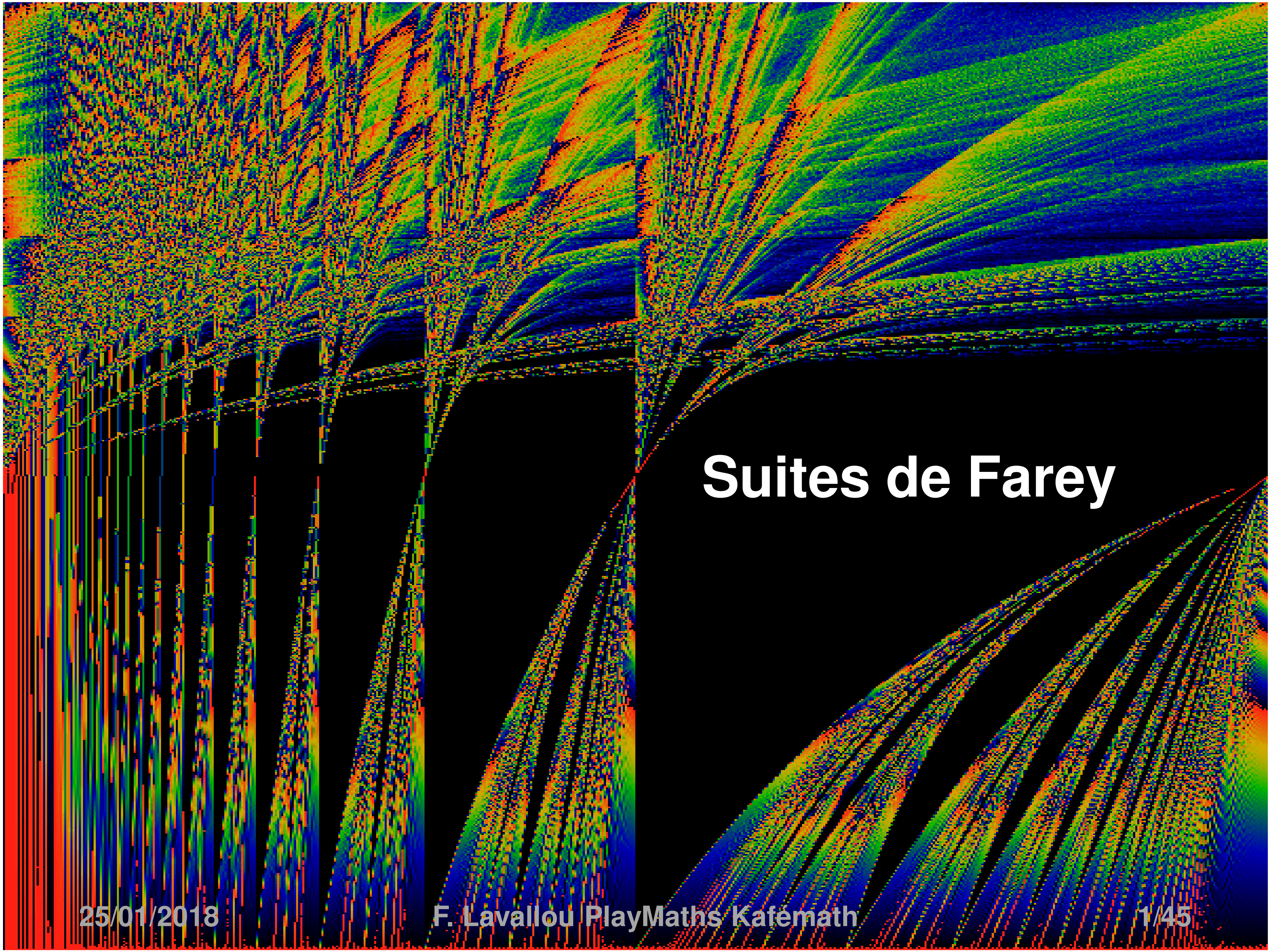


Suites de Farey

La *dission* des cancres

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

3/4 + 1/4 + 9/12 = 13/20

(mauvaise notation!)

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{4}{20} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{4}{20} + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}} \cdot \frac{12}{20} = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{9}{20} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{20}}$$

Nicolas Chuquet (1445-1500)

LE TRIPARTY

EN LA SCIENCE DES NOMBRES

PAR MAISTRE NICOLAS CHUQUET PARISIEN

PUBLIÉ D'APRÈS LE MANUSCRIT *FONDS FRANÇAIS* N° 1346

ℭ La rigle des nombres moyens.

C

Este rigle sert a trouuer tant de nombres moyens entre deux nombres prochains que lon veult. Par le moyen dicelle se peuẽt trouuer plusieurs nombres et faire mains calcules que par la rigle de troys ne par vne posicion ne par deux posicions ne se peuent trouuer. Et pour ceste rigle entendre et scauoir pratiquer lon doit sauoir que $\frac{1}{2}$. est le premier et le cōmancemẽt entre les nombres routz et dicellui sourdent et saillent deux progressions naturelles dont lune progredist en augmentant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. ꝛc. et laultre progredist en diminuant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$ ꝛc. Lesquelles choses entendues senſ la Regle.

ℭ Numerateur auec numerateur se adioustent et denoĩate^{r} auec denoĩateur.

Les suites de Farey Leonhard Euler (1707-1783)

Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum (1784)

§. 3. Hinc igitur iſta quaeſtio naſcitur: vt, propoſito quocunque numero D, multitudo numerorum ipſo minorum, ad eumque ſimul primorum, aſſignetur. Quod quo facilius praeſtari poſſit, denotet character π D multitudinem iſtam numerorum ipſo D minorum, et qui cum eo nullum habeant diuiſorem communem. Ac primo quidem manifeſtum eſt, ſi fuerit D numerus primus, fore $\pi D = D - 1$.

De là nait alors cette question : pour un nombre quelconque donné D*, comment déterminer la multitude des nombres qui lui sont inférieurs et en même temps premiers. Ce qui peut être présenté plus facilement, le symbole* πD *désigne cette multitude de nombres inférieurs à* D*, et qui n'ont avec lui aucun diviseur commun. Et ainsi tout d'abord il est clair que si* D *était un nombre premier, on aurait* $\pi D = D-1$ (trad. FL)*.*

Problema.

Propoſito numero quocunque N inuenire multitudinem omnium numerorum ipſo minorum ad eumque primorum.

Solutio.

§. 16. Quicunque fuerit numerus N, ſemper tali forma repraeſentari poteſt, vt ſit $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. exiſtentibus p, q, r, s numeris primis. Inuenimus autem tum fore

$$\pi N = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} s^{\delta-1} (p-1)(q-1)(r-1)(s-1).$$

Hinc igitur erit

$$\frac{\pi N}{N} = \frac{(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{pqrs},$$

vnde ſequitur fore

$$\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{pqrs};$$

$$N = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

$$\phi(N) = N \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\phi(n) = Card\left\{0 < m < n \; et \; \mathrm{pgcd}(m,n) = 1\right\}$$

L'indicatrice d'Euler $\phi(n)$ est le nombre de nombres premiers strictement inférieurs à n.

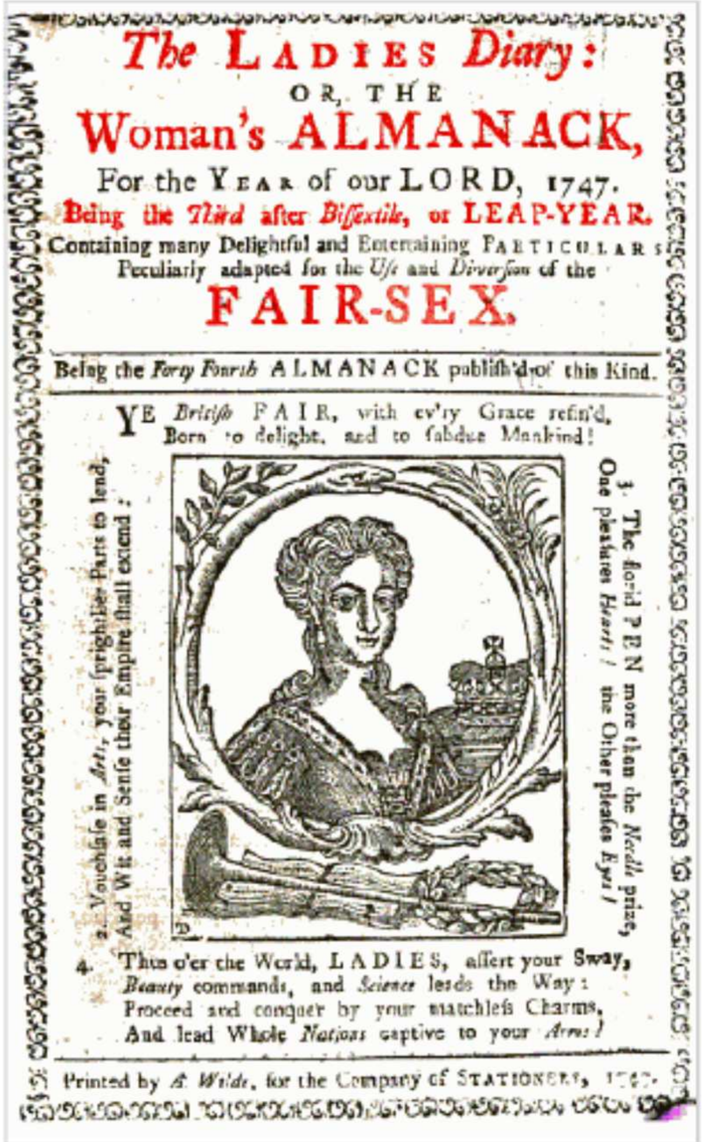
$$\phi(72) = 72 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$\varphi(n)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Les suites de Farey

Imprimé à Londres de 1704 à 1841.

« *Entertaining Particulars Peculiarly adapted for the Use and Diversion of the fair-sex* »


The LADIES Diary:
OR, THE
Woman's ALMANACK,
For the YEAR of our LORD, 1747.
Being the Third after Bissextile, or LEAP-YEAR.
Containing many Delightful and Entertaining PARTICULARS
Peculiarly adapted for the Use and Diversion of the
FAIR-SEX.

Being the Forty Fourth ALMANACK publish'd of this Kind.

YE British FAIR, with ev'ry Grace refin'd,
Born to delight, and to subdue Mankind!

2. Vouchsafe in Arts, your sprightlier Parts to lend,
And Wit and Sense their Empire shall extend:

3. The florid PEN more than the Needle prize,
One pleases Hearts! the Other pleases Eyes!

4. Thus o'er the World, LADIES, assert your Sway,
Beauty commands, and Science leads the Way:
Proceed and conquer by your matchless Charms,
And lead Whole Nations captive to your Arms!

Printed by A. Wilde, for the Company of STATIONERS, 1747.

Edition de 1747

III. QUESTION 281, *by Mr. J. May, jun. of Amsterdam.*

It is required to find (by a general theorem) the number of fractions of different values, each less than unity, so that the greatest denominator be less than 100?

En 1751, Flitcon: **3003**

Les suites de Farey

Flitcon 1751

Each diff. let. in 1st scheme denotes a diff. prime.

	Steps	Denominators	The several quotients arising by dividing any denominator, by: Each single prime / The prod. of each two / Product of each three / Product of each four	Numb. of diff. fract. in each series.
	1	$x - 1$	....	n
$1 \times x$	2	$x^2 - x$	....	xn
$2 \times x$	3	$x^3 - x^2$	....	x^2n
	4	$vx - v - x + 1$	....	n
$4 \times v$	5	$v^2x - v^2 - vx + v$	....	vn
$5 \times x$	6	$v^2 - v^2x - vx^2 + vx$	....	vxn
	7	$vxy - xy - vx + y - yv + x + v - 1$	....	n
	8	$vxyz - vxy - xyz - yzv - zvx + vz + xy + yz + zv + yv + xz - z - v - x - y + 1$	....	n

II.

Denominator	Component primes	Diff. fractions	Denominator	Component primes	Diff. fractions	Denominator	Component primes	Diff. fractions	Denominator	Component primes	Diff. fractions	Denominator	Component primes	Diff. fractions	Denominator	Component primes	Diff. fractions	Denominator	Component primes	Diff. fractions
2	P	1	16	—	8	30	2·35	8	44	—	20	58	2·23	28	72	—	24	86	2·43	42
3	P	2	17	P	16	31	P	30	45	—	24	59	P	58	73	P	72	87	3·29	56
4	—	2	18	—	6	32	—	16	46	2·23	22	60	—	16	74	2·37	36	88	—	40
5	P	4	19	P	18	33	3·11	20	47	P	46	61	P	60	75	—	40	89	P	88
6	2·3	2	20	—	8	34	2·17	16	48	—	16	62	2·31	30	76	—	36	90	—	24
7	P	6	21	3·7	12	35	5·7	24	49	—	42	63	—	36	77	7·11	60	91	7·13	72
8	—	4	22	2·11	10	36	—	12	50	—	20	64	—	32	78	23·13	24	92	—	44
9	—	6	23	P	22	37	P	36	51	3·17	32	65	5·13	48	79	P	78	95	3·31	60
10	2·5	4	24	—	8	38	2·19	18	52	—	24	66	2·3·11	20	80	—	32	94	2·47	46
11	P	10	25	—	20	39	3·13	24	53	P	52	67	P	66	81	—	54	95	5·19	72
12	—	4	26	2·13	12	40	—	16	54	—	18	68	—	32	82	2·41	40	96	—	32
13	P	12	27	—	18	41	P	40	55	5·11	40	69	2·23	44	83	P	82	97	P	9
14	2·7	6	28	—	12	42	2·37	12	56	—	24	70	2·5·7	24	84	—	24	98	—	2
15	3·5	8	29	P	28	43	P	42	57	3·19	36	71	P	70	85	5·17	64	99	—	6
		71			198			314			416			564			666			774

Third columns collected.	
	71
	198
	314
	416
	564
	666
	774
The sum of all the different fractions.	3003

En 1801, **Gaspard de Prony (1755-1839)** utilise, pour établir de nouvelles tables de logarithmes, de récentes théories sur le partage du travail. Il constitue un groupe de mathématiciens qui fournit les formules au groupe de calculateurs, qui transmet lui-même ses feuilles de calcul à une équipe de vérificateurs.

Charles Haros participa aux deux premiers groupes mais fut plus célèbre pour une table de conversion entre fractions et nombres décimaux. Il redécouvre en fait un algorithme de calcul déjà établi par **Nicolas Chuquet (vers 1450-1488)** avec sa règle des nombres moyens.

Sir John Farey (1766-1826), un géographe anglais inconnu, remarqua une propriété des suites de Haros qui fut développée par Cauchy.

Pas de malus pour Farey

Les suites de Farey

Une suite de Farey F_n est l'ensemble des nombres rationnels p/q, avec p et q premiers entre eux et $0 < p < q < n$, ordonnés par taille.

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

L(1) = 2 L(2) = 3

L(3) = 5 L(4) = 7

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

L(99) = ?

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_{99} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{99}, ..., ?, ..., \frac{98}{99}, \frac{1}{1} \right\}$$

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow bc - ad > 0$ (entiers naturels), alors la *médiante* (Haros) ou *médiation* (Lucas) est intermédiaire:

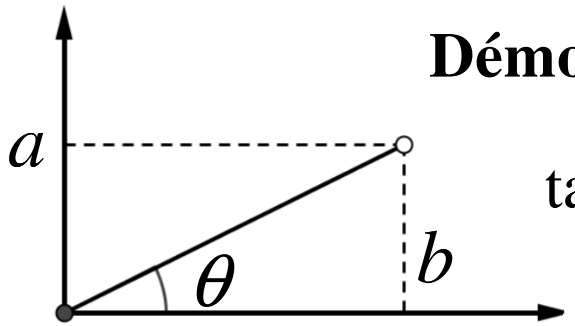
$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{\alpha a + \beta c}{\alpha b + \beta d} < \frac{c}{d}$$

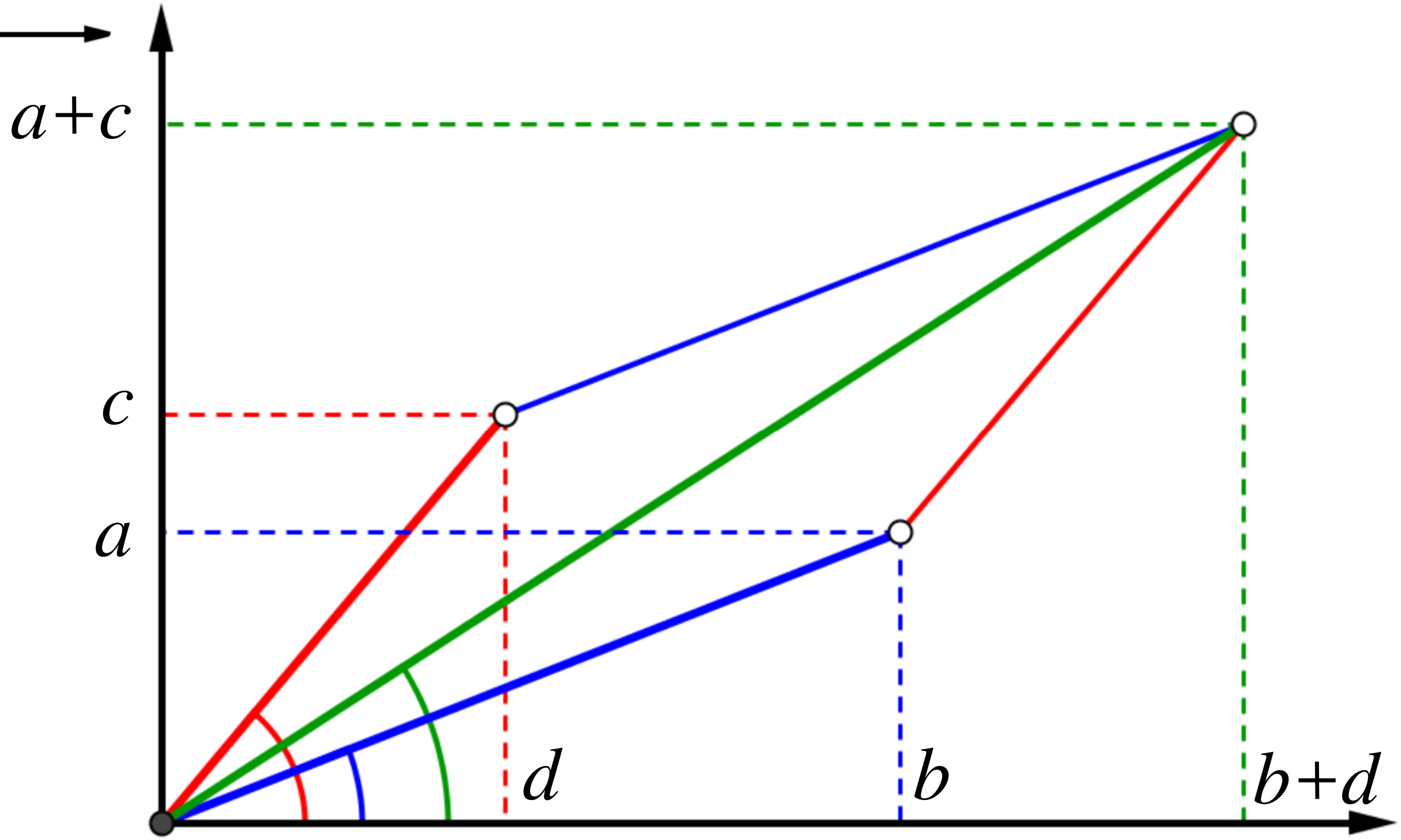
Démonstration algébrique : calcul pur ou barycentrique!

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{b\frac{a}{b} + d\frac{c}{d}}{b+d} = \frac{b}{b+d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{d}{b+d} \cdot \frac{c}{d}$$

Démonstration géométrique : simple!



$\tan(\theta) = \dfrac{a}{b}$ *Pente croissante avec l'angle*



Eléments de $\overline{\mathbb{Q}}_+$

$$x < x \oplus y < y \qquad \frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$$

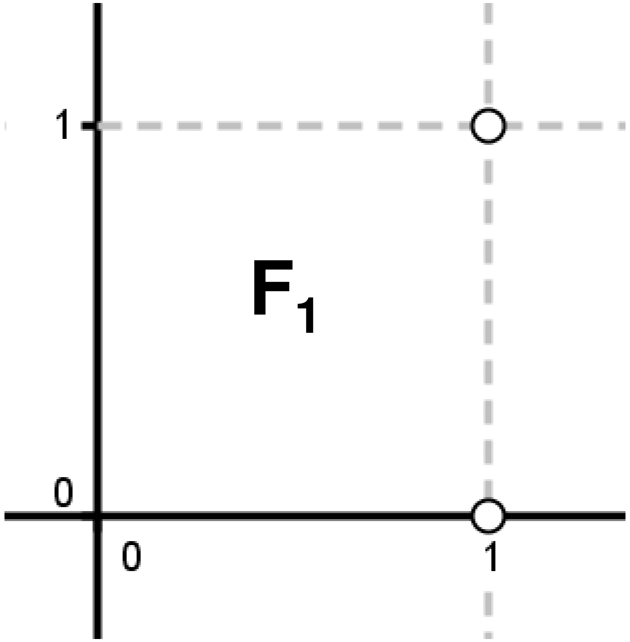
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x, y \leq n \quad \Rightarrow \quad (n-x) \oplus (n-y) = n - (x \oplus y)$$

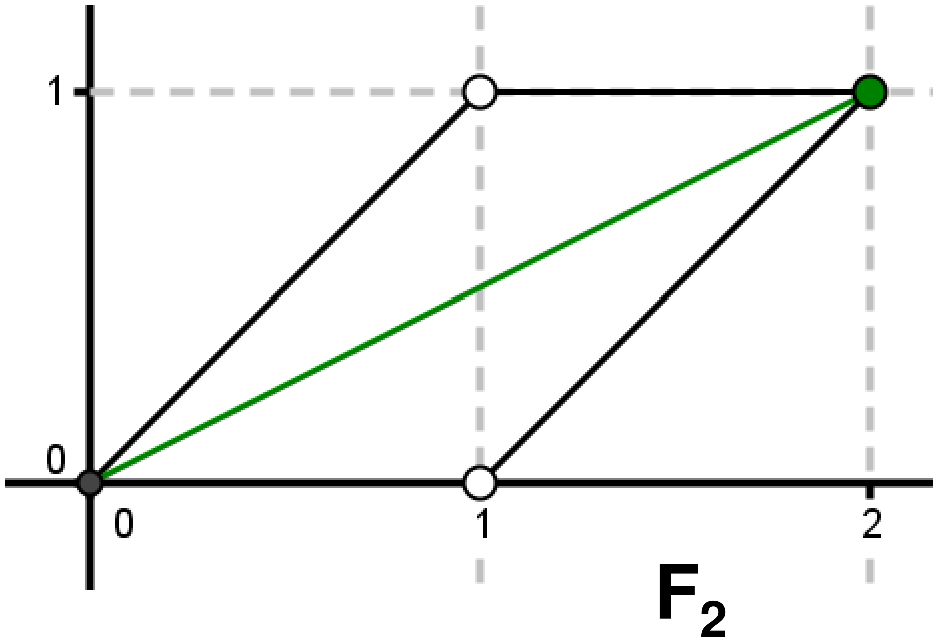
$$0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1 \quad \text{voisins} \quad \Leftrightarrow \quad bc - ad = 1$$

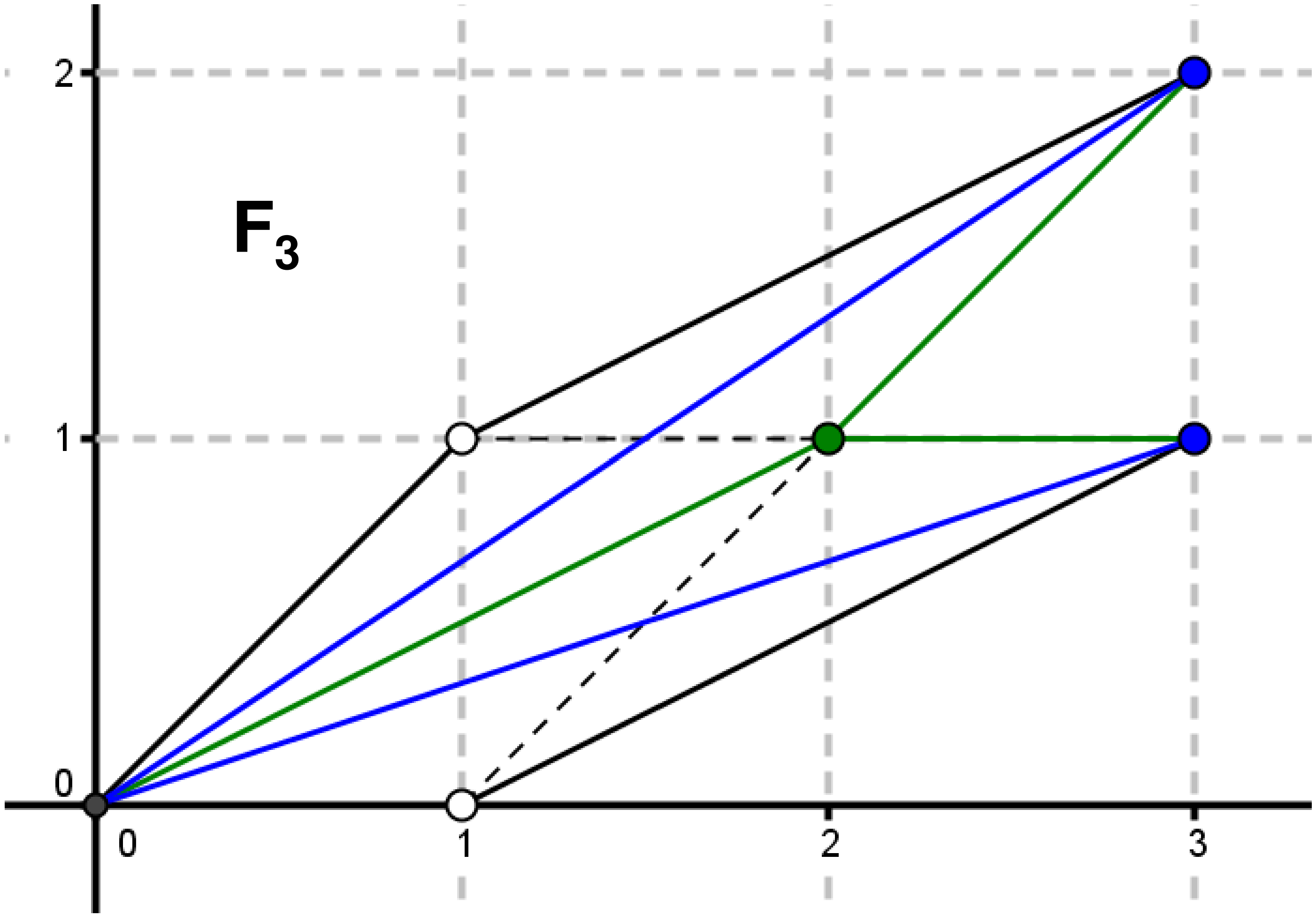
Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+2}}, \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_{n+3}}, \ldots$$



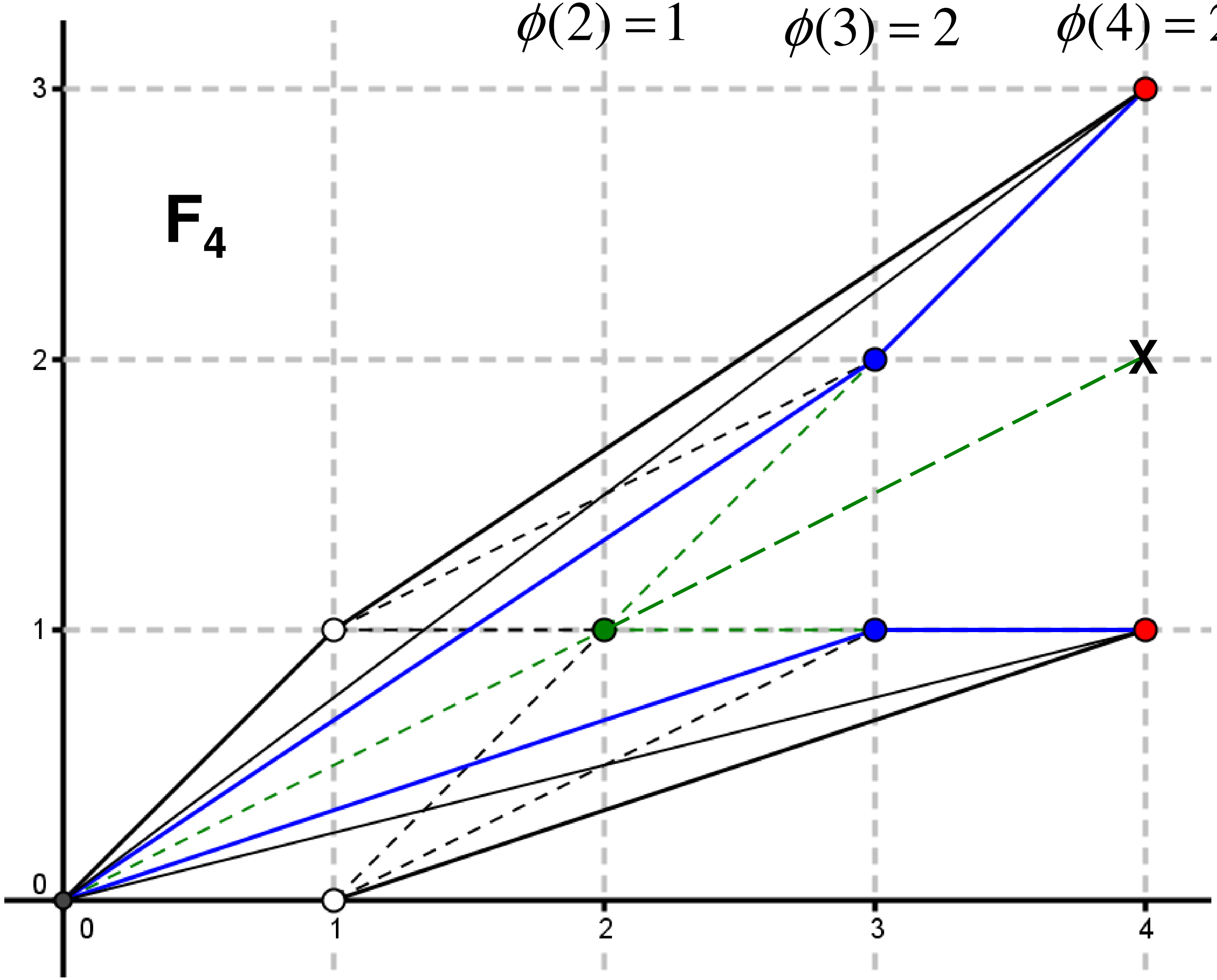
$$\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$



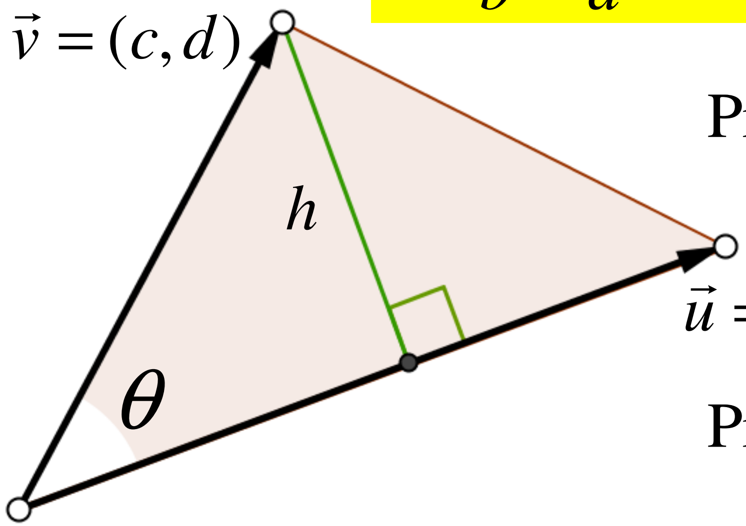


F_3

$\phi(2)=1$ $\phi(3)=2$ $\phi(4)=2$



$$0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1 \quad \text{voisins} \quad \Leftrightarrow \quad bc - ad = 1$$



Produit scalaire:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd = u \cdot v \cdot \cos(\theta)$$

Produit vectoriel:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \vec{k} = (ad - bc)\vec{k} = u \cdot v \cdot \sin(\theta)\vec{k}$$

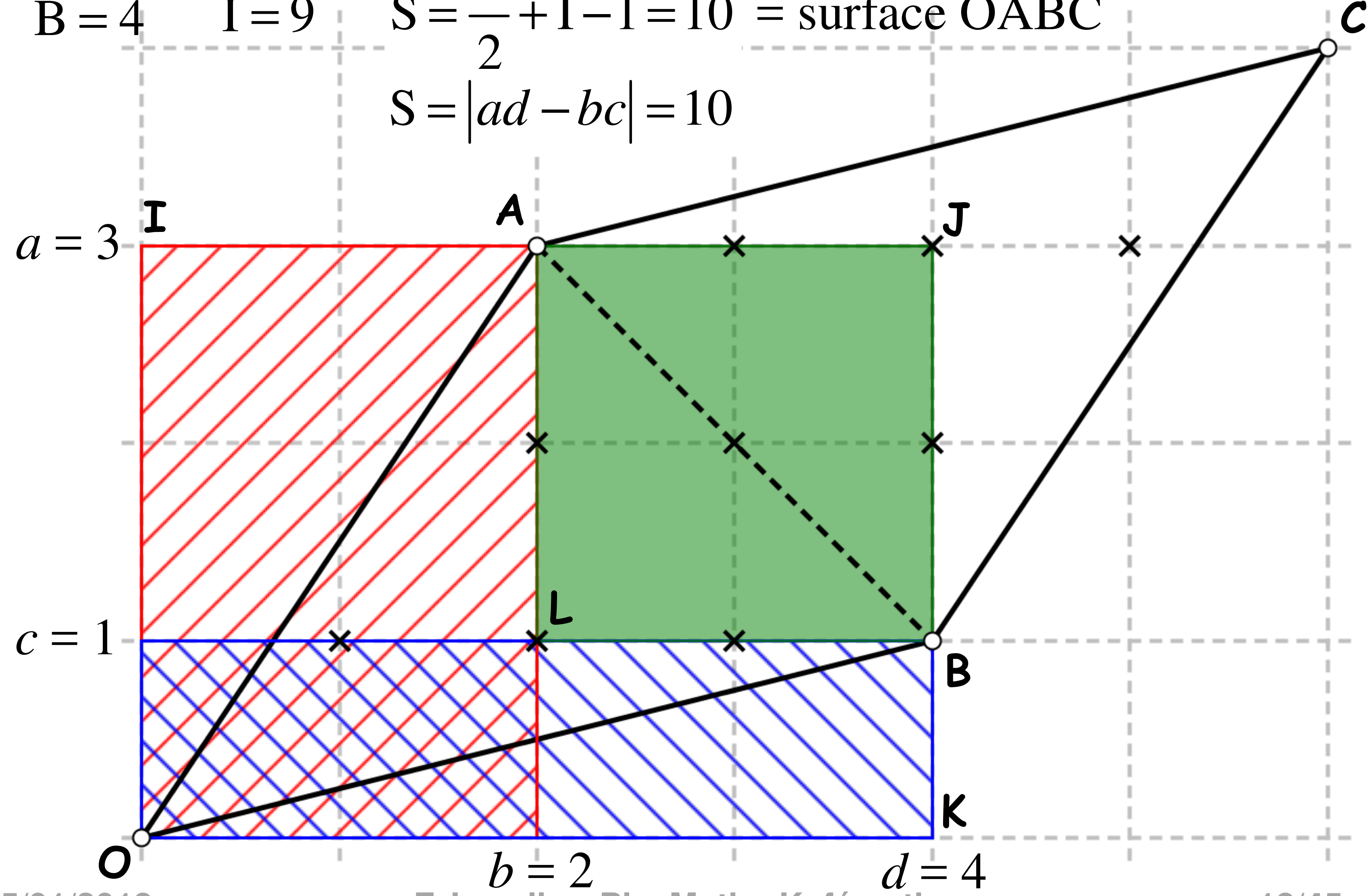
$$S = \frac{1}{2} hu = \frac{1}{2} uv \sin(\theta)$$

Pythagore $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = u^2 \cdot v^2$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$$

$B = 4 \qquad I = 9 \qquad S = \frac{B}{2} + I - 1 = 10$ = surface OABC

$S = |ad - bc| = 10$



$$C = A \oplus B$$

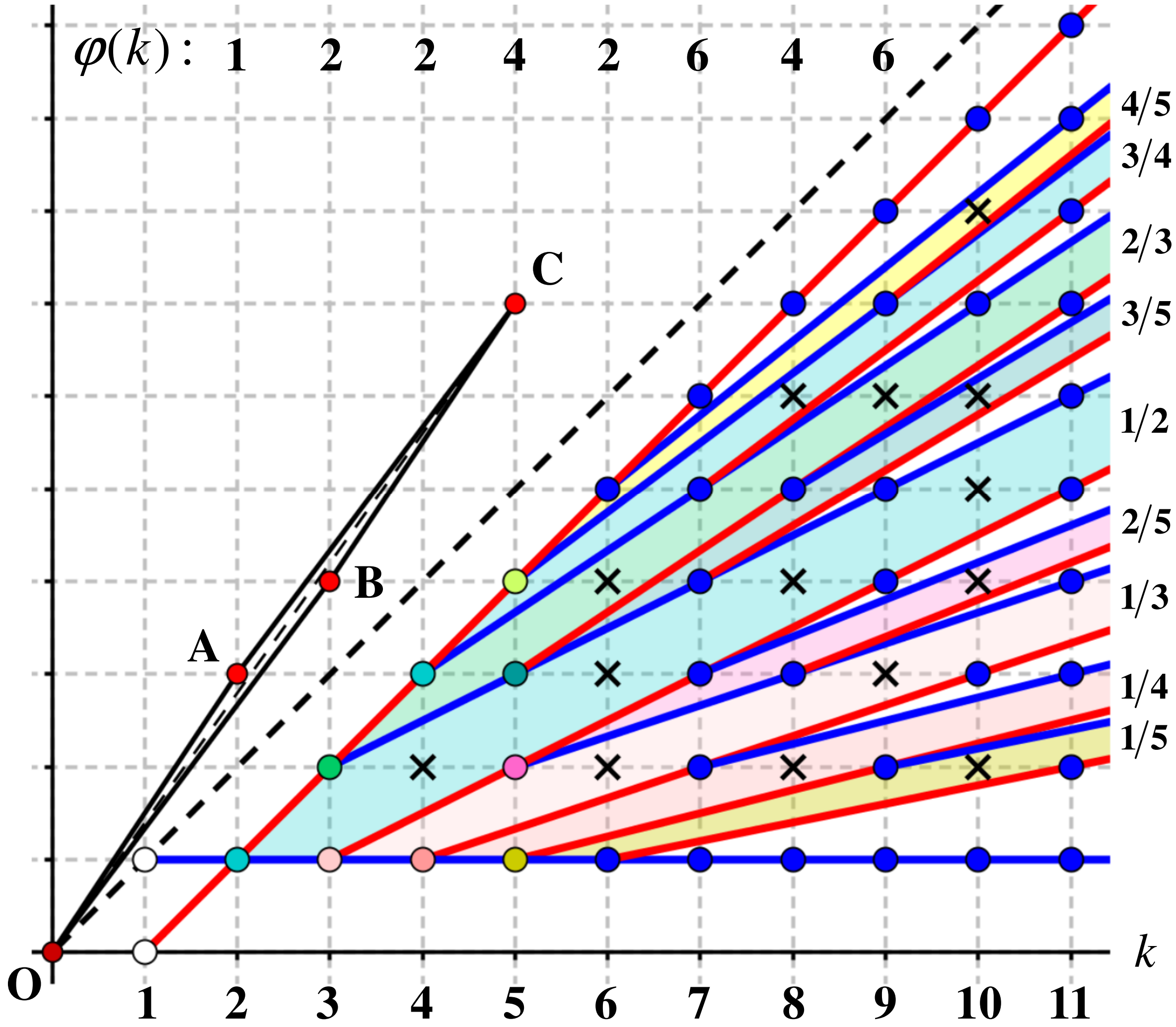
PICK (1899)

$$S = \frac{B}{2} + I - 1$$

$$B = 4$$

$$I = 0$$

$$S = 1$$

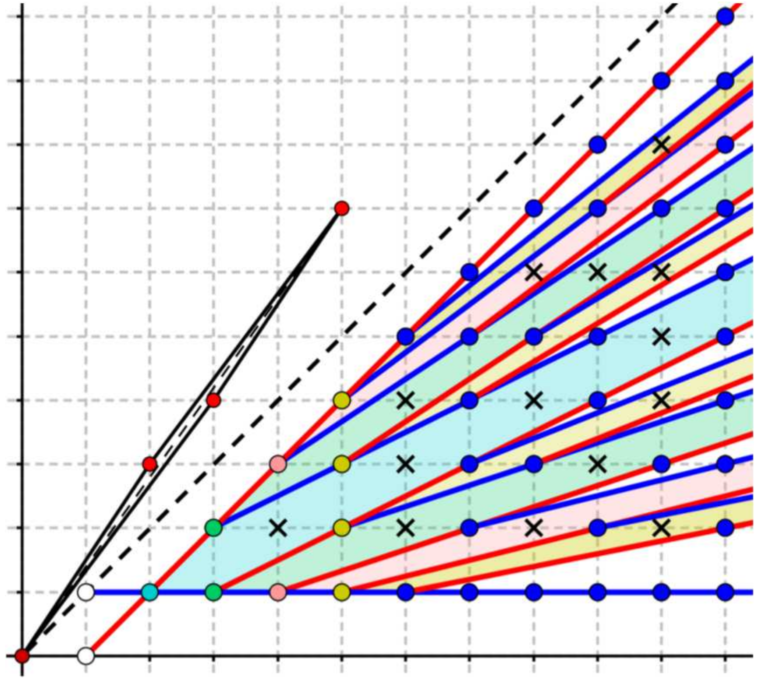


$\mathrm{A} = (b, a) \quad \mathrm{B} = (d, c)$

$\mathrm{A} < \mathrm{C} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{B} < \mathrm{B}$

$\mathrm{A} < \mathrm{A} \oplus \mathrm{C} < \mathrm{C} < \mathrm{C} \oplus \mathrm{B} < \mathrm{B}$

$\mathrm{A}^{\oplus n} \oplus \mathrm{C}^{\oplus m} = (nb + md, na + mc)$



Chaque *brocotier irreductibilis* est le sommet d'une bande délimitée par les droites de Bezout: $px - qy = \pm 1$

droites **rouge** $px - qy = 1$ $\quad \mathrm{A} \oplus \mathrm{B}^{\oplus k} = (kq + b, kp + a)$

droites **bleues** $px - qy = -1$ $\quad \mathrm{B}^{\oplus k} \oplus \mathrm{C} = (kq + d, kp + c)$

$px - qy = 0$ points intérieurs $(kq, kp)_{k \geq 2}$ cachés par « l'arbre » C = (q, p)

La longueur d'une suite de Farey est donnée par la formule:

$$\left|\mathrm{F}_n\right| = \left|\mathrm{F}_{n-1}\right| + \phi(n)$$

$$\left|\mathrm{F}_n\right| = 1 + \sum_{k=1}^{n} \phi(k)$$

Chaque bande fournit donc environ deux tiers de ses points à la brocoteraie. Puisque chaque brocotier appartient à une bande et une seule, et que le nombre de fractions de dénominateur inférieur ou égal à n est asymptotiquement égal à :

$$n(n-1)/2 \approx n^2/2 \quad \Longrightarrow \quad \left|\mathrm{F}_n\right| \approx n^2/3$$

En fait: $\left|\mathrm{F}_n\right| \approx \dfrac{3n^2}{\pi^2}$

Les suites de Farey Achille Brocot (1817-1874)

Célèbre horloger inventeur d'un système d'échappement.

Restauration de pendules astronomiques → reconstituer des vitesses de rotation de mécanisme avec un nombre limité d'engrenages.

Problème semblable à l'approximation d'un réel par une fraction.

Les ensembles de Brocot sont obtenus par médiations itératives en partant des fractions 0/1 et 1/1.

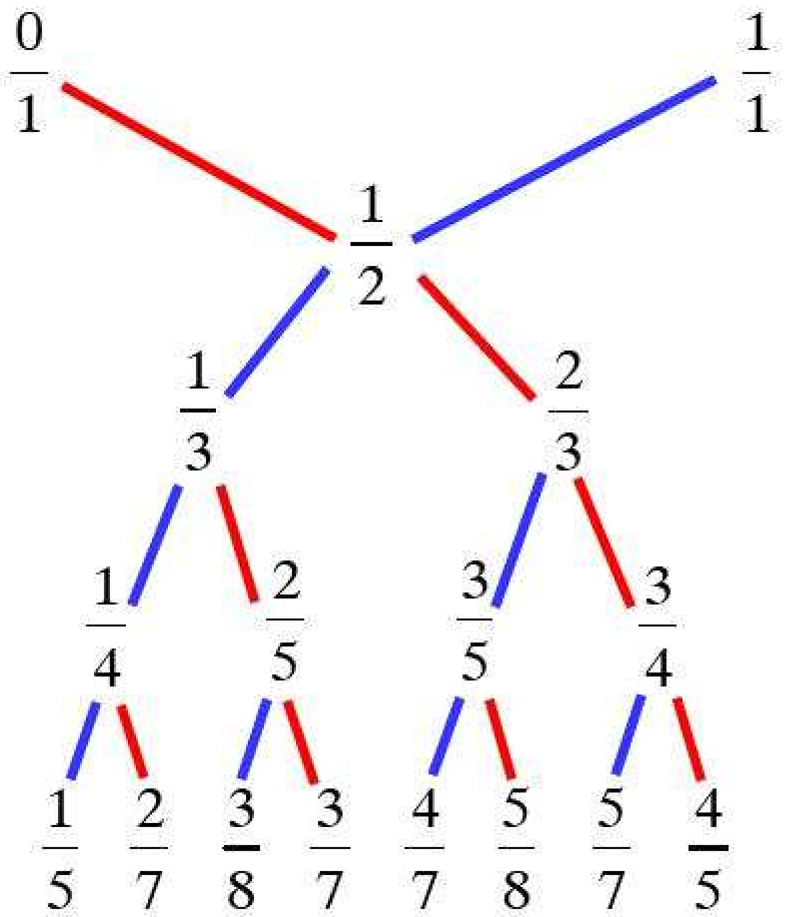
Itération comme pour les suites de Farey : $2^n + 1$ fractions à la n-i^{ème} itération.

Ensemble de Farey = fractions de dénominateur $\leq n$.

Pas de Farey sans Brocot.

Itérations représentées par l'arbre binaire suivant.

1858



$$\frac{5}{7} = \mathrm{BRRB} = \mathrm{GDDG}$$

B : Bleu
R : Rouge
G : Gauche
D : Droite

Tout rationnel apparait dans une suite de Farey.

Théorème de Lucas

Le rationnel $$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

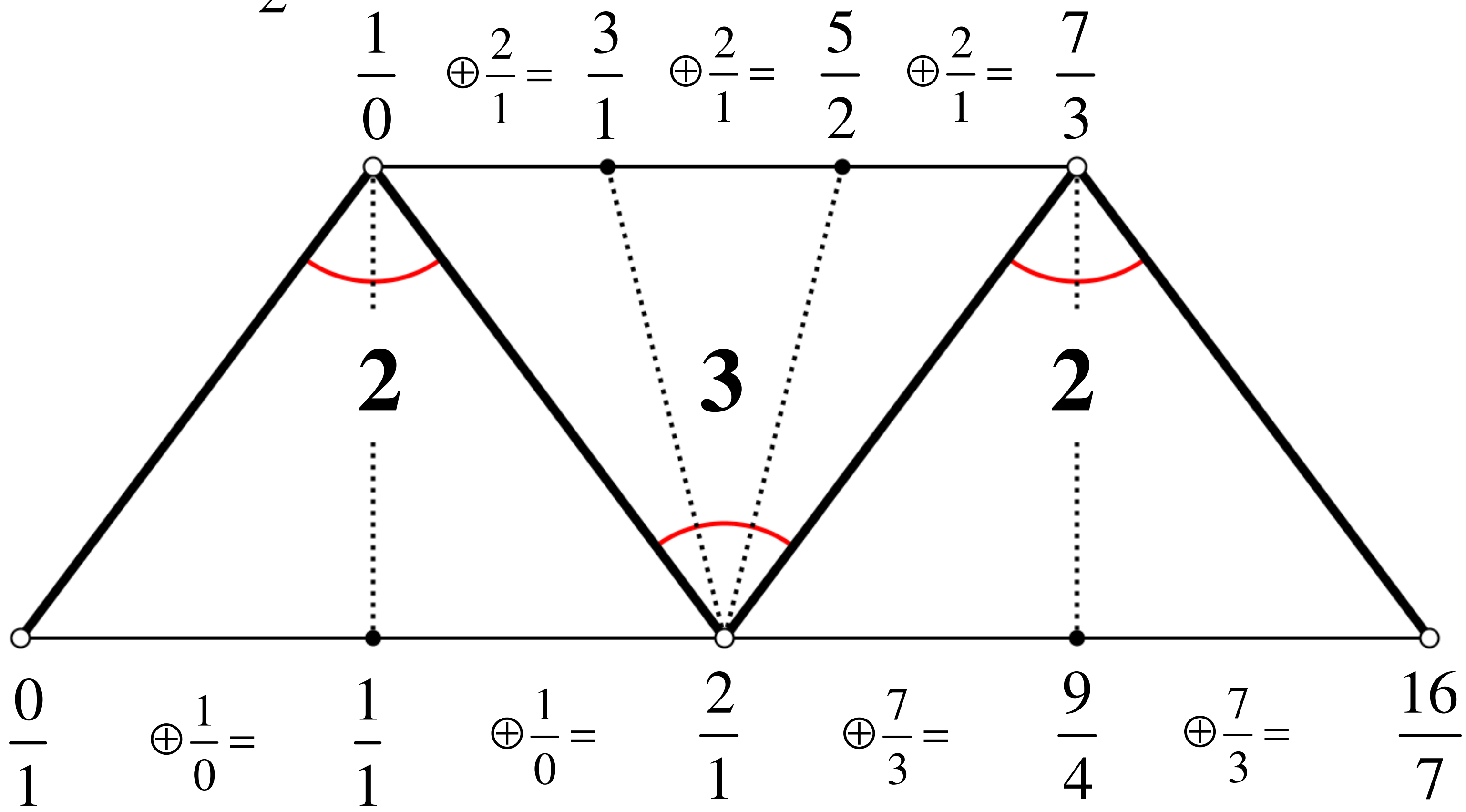
apparait pour la première fois dans la suite de Farey d'indice :

$$n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

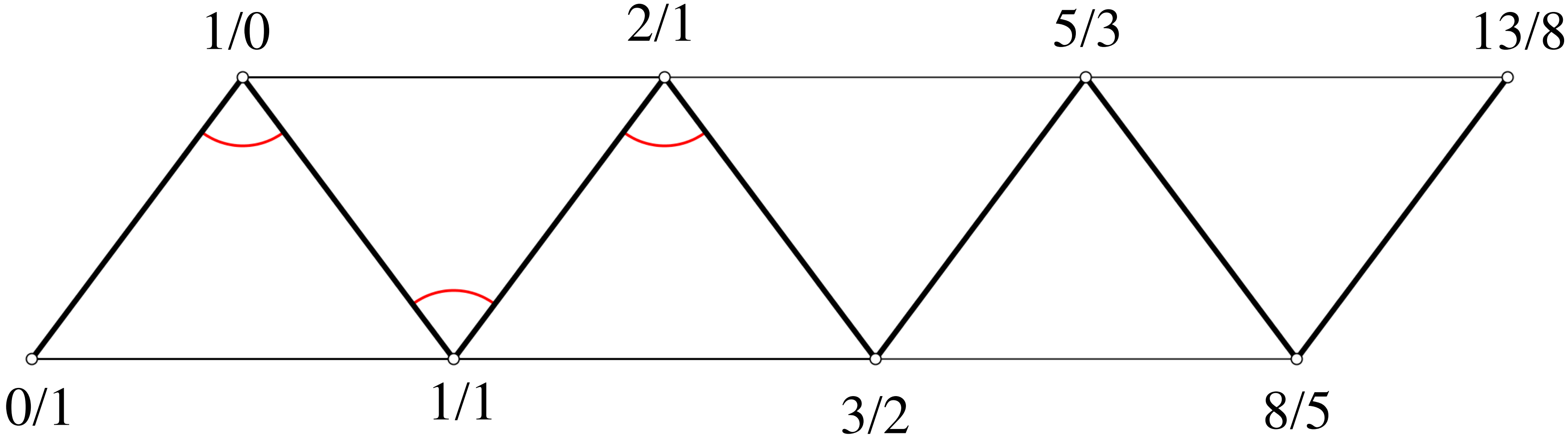
$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n + x'}}} \qquad y = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n + y'}}}$$

$$x \oplus y = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n + x' \oplus y'}}}$$

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = \frac{16}{7}$$



Nombre d'or $\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = [\overline{1}]$



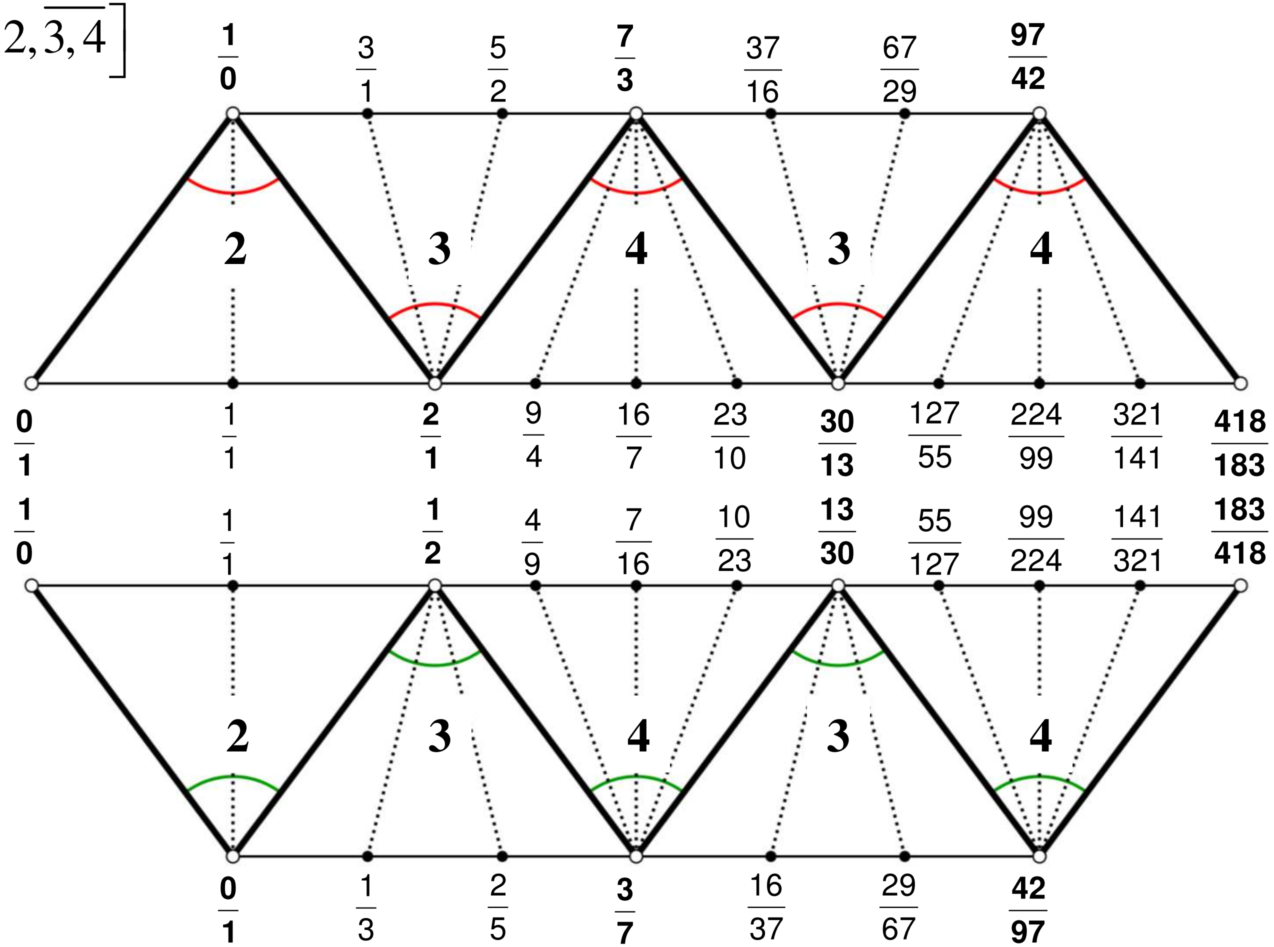
Fractions continues

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}} = \left[2, \overline{3, 4}\right]$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{418}{183} = \text{Approximation de } x \text{ à } 1\% \text{ près}$$

$$y = \frac{1}{x} = 0 + \frac{1}{x} = \left[0, 2, \overline{3, 4}\right]$$



$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\wedge 1}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

Fonction dzêta de Riemann

$$\zeta(1-n)=-\frac{B_n}{n} \qquad B_{2n+1}=0 \qquad \zeta(-2n)=0$$

B_n *: nombre de Bernoulli*

Hypothèse de Riemann

$$\zeta(s)=0 \Rightarrow \mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2} \qquad (\text{pour } s\notin\mathbb{Z})$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

$$\mu(n = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} 0 & si \quad \exists \alpha_i > 1 \\ (-1)^k & si \quad \forall i \, \alpha_i = 1 \end{cases}$$

μ : fonction de Möbius

$$\mathrm{M}(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \qquad M(6) = 1 + (-1) + (-1) + 0 + (-1) + 1 = -1$$

M : fonction de Mertens

Hypothèse de Riemann $\Leftrightarrow$ $M(n) \le C n^{(1/2+\varepsilon)}$

Suite de Farey F_n de longueur $L(n)$ et de terme général f_k.

Différence: $d_k = f_k - \dfrac{k}{L(n)}$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

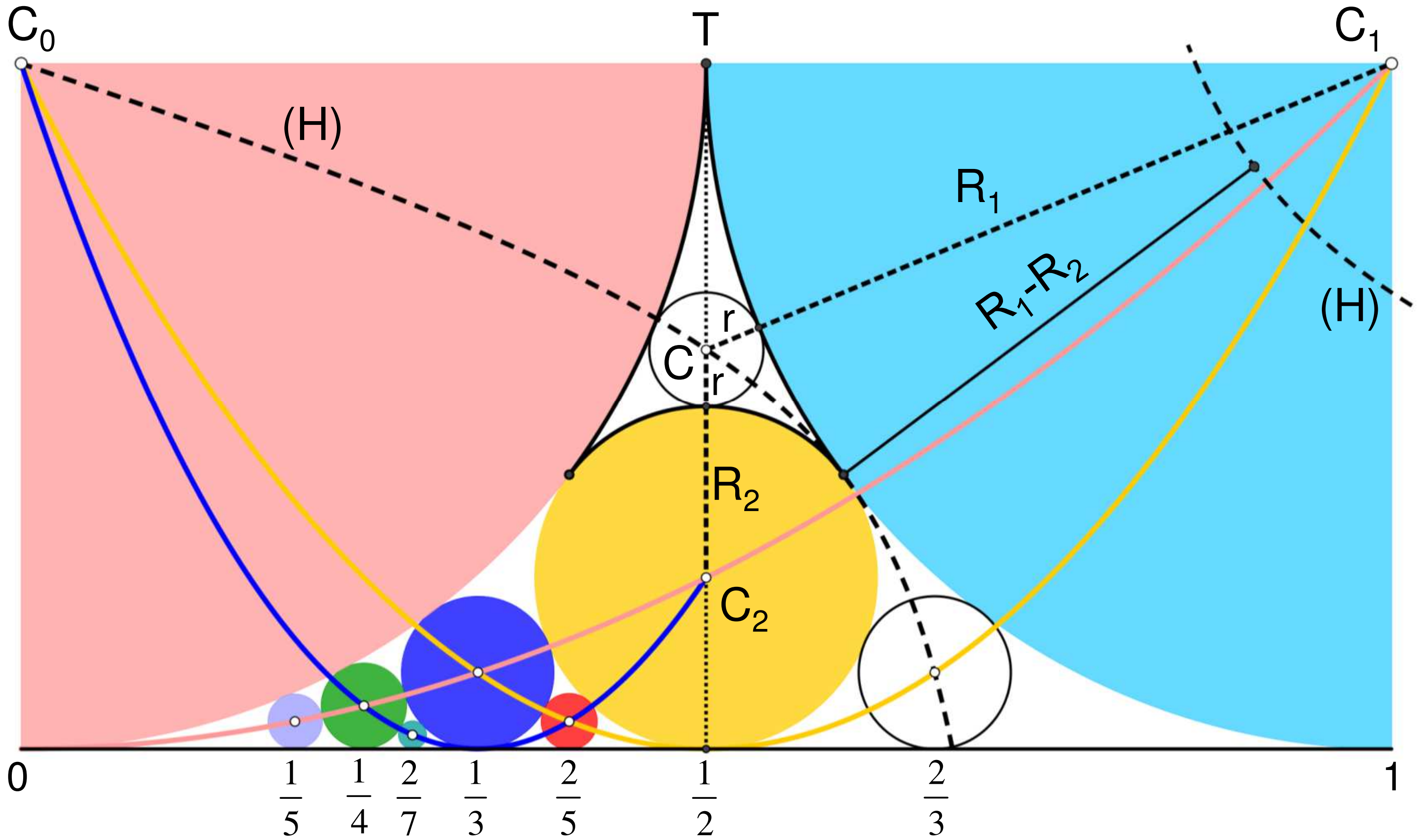
$$L(4) = 7$$

$$\sum_{k=1}^{L(n)} |d_k| \leq C_L n^{(1/2+\varepsilon)} \Leftrightarrow M(n) \leq C_M n^{(1/2+\varepsilon)} \Leftrightarrow Riemann$$

Lieu des centres des cercles tangents à C_1 et C_2?

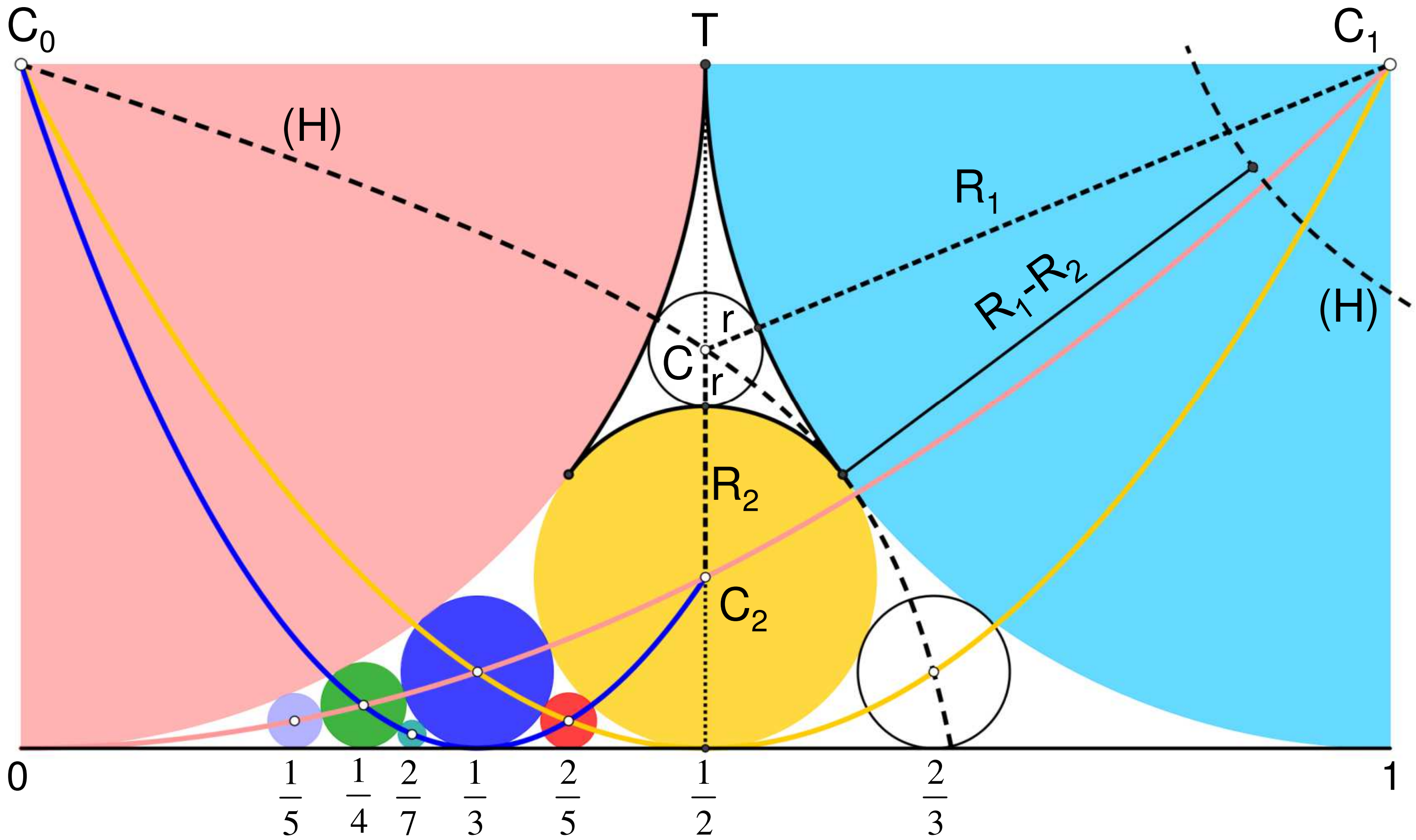
$$d_1 - d_2 \equiv CC_1 - CC_2 = \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 = cste \Longrightarrow$$ Hyperbole (H)

(bissectrice d'un secteur angulaire)



$R \rightarrow \infty$ cercle → droite hyperbole → parabole

centre → foyer



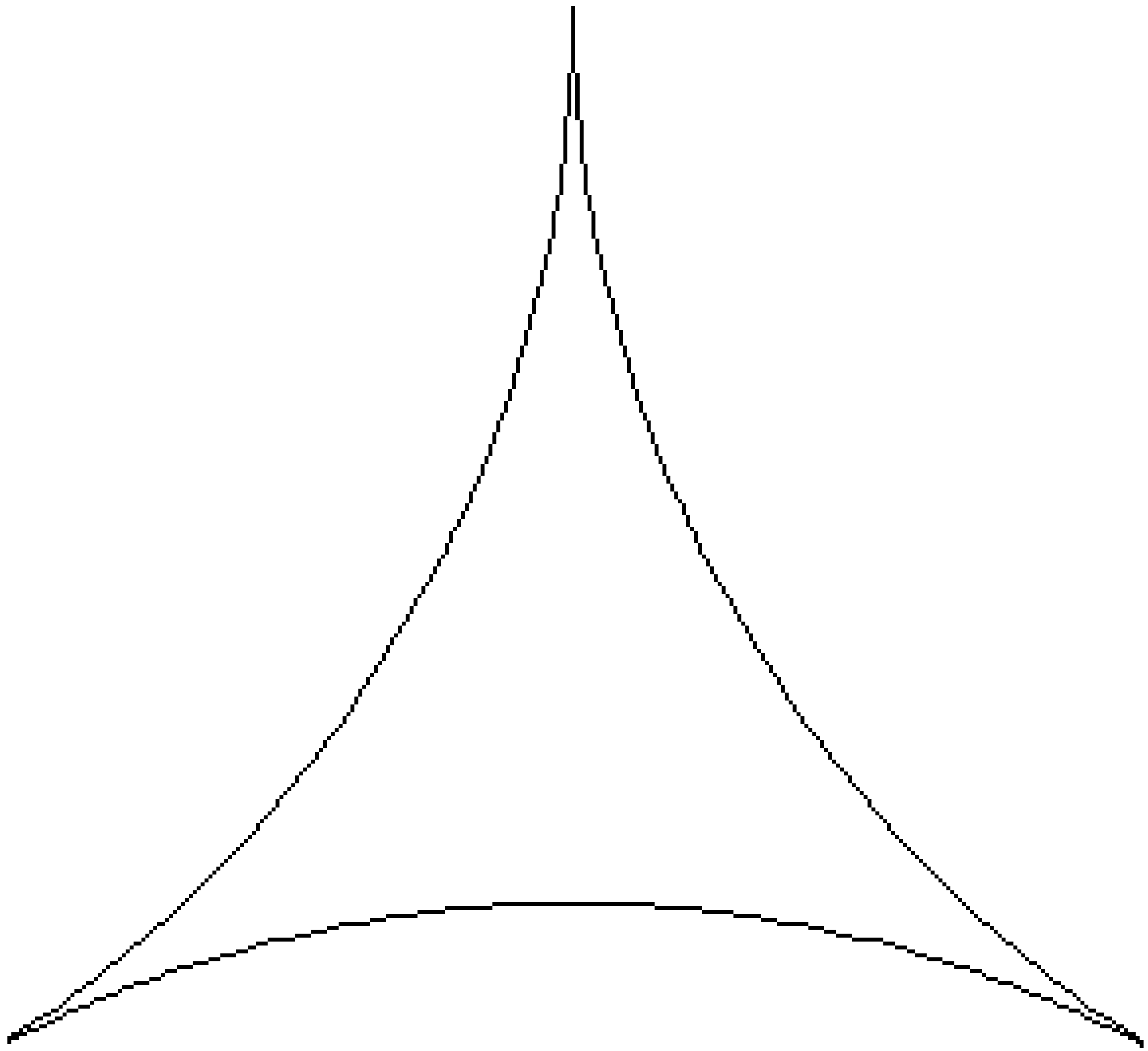
Pour la fraction a/b, cercle tangent à la droite $y = 0$ de centre $\mathbf{(a/b,\ 1/2b^2)}$

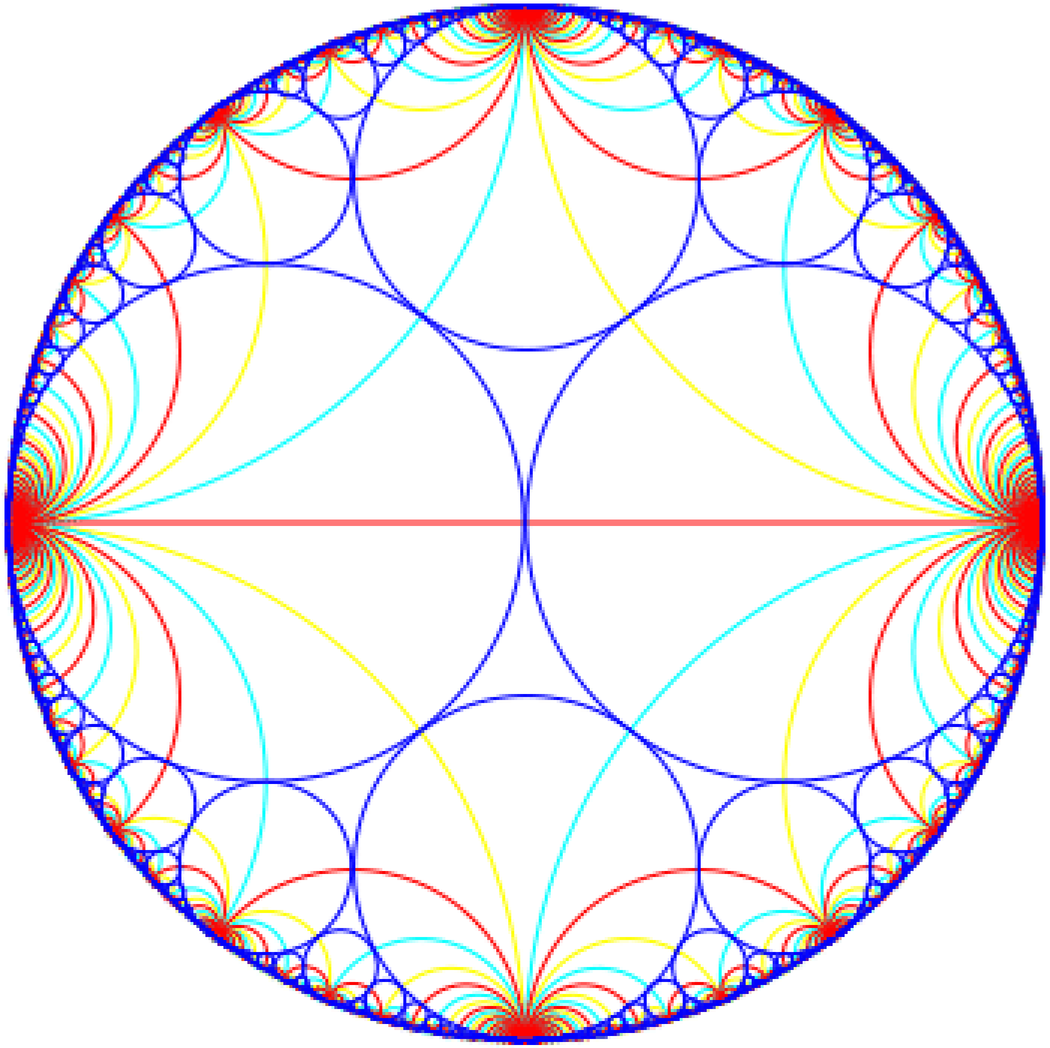
Si la fraction c/d est voisine de a/b $(bc - ad = 1)$,
alors la parabole passe par le point $\mathbf{(c/d,\ 1/2d^2)}$

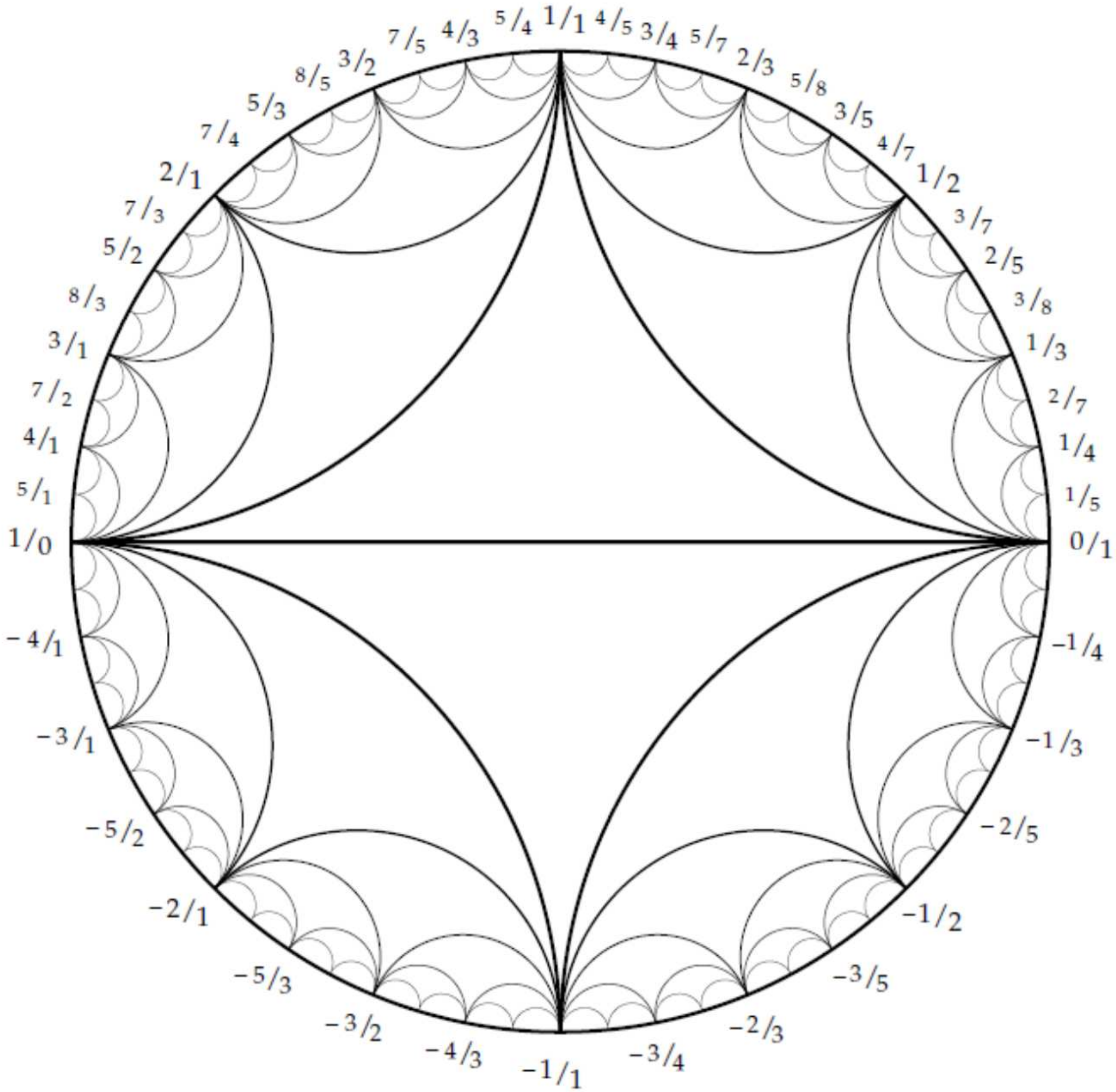
⇨ Les cercles de Ford associés à des fractions de Farey consécutives sont tangents entre eux et à la droite des abscisses.

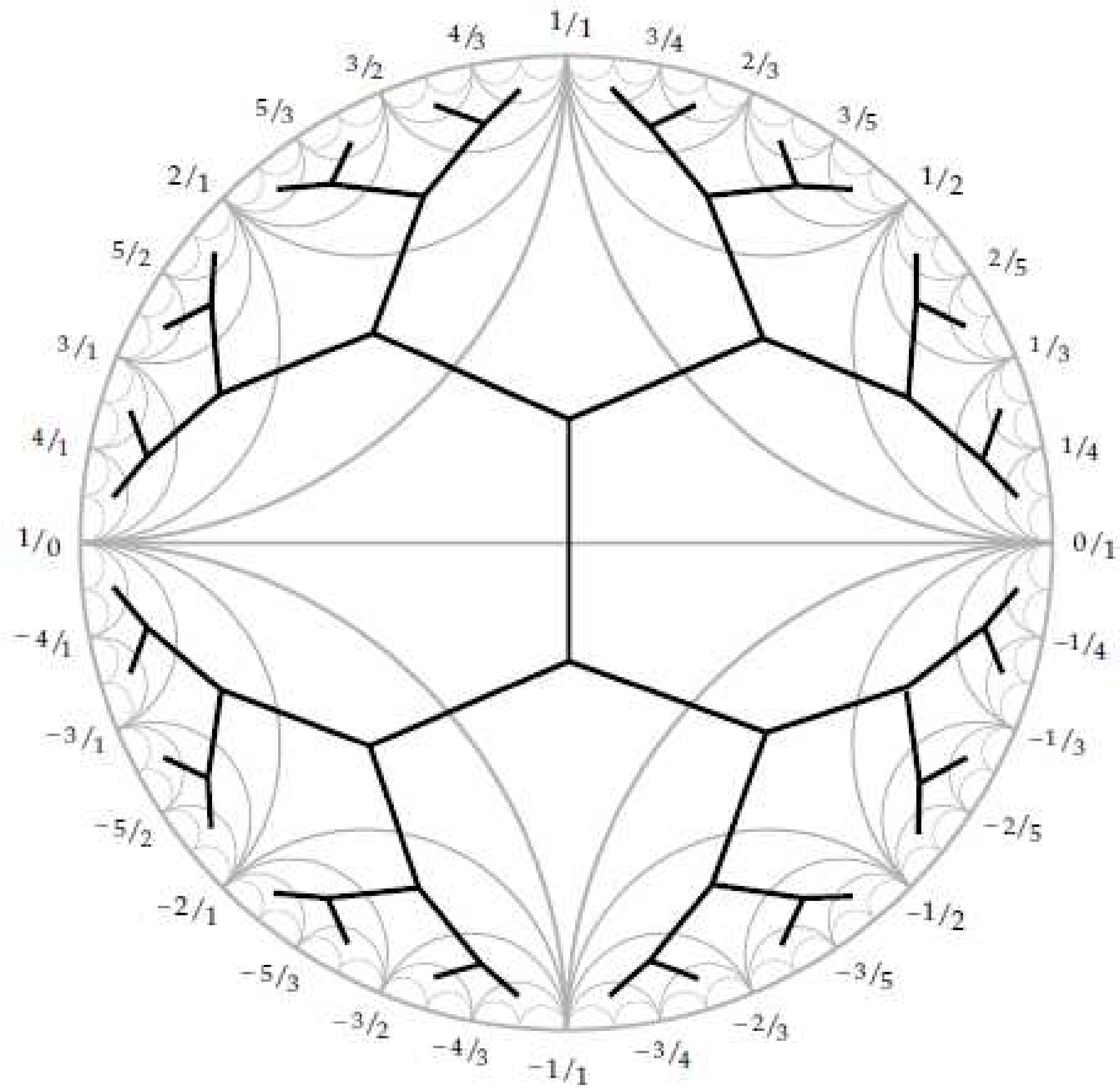
Tri des ensembles de Farey par les rayons!

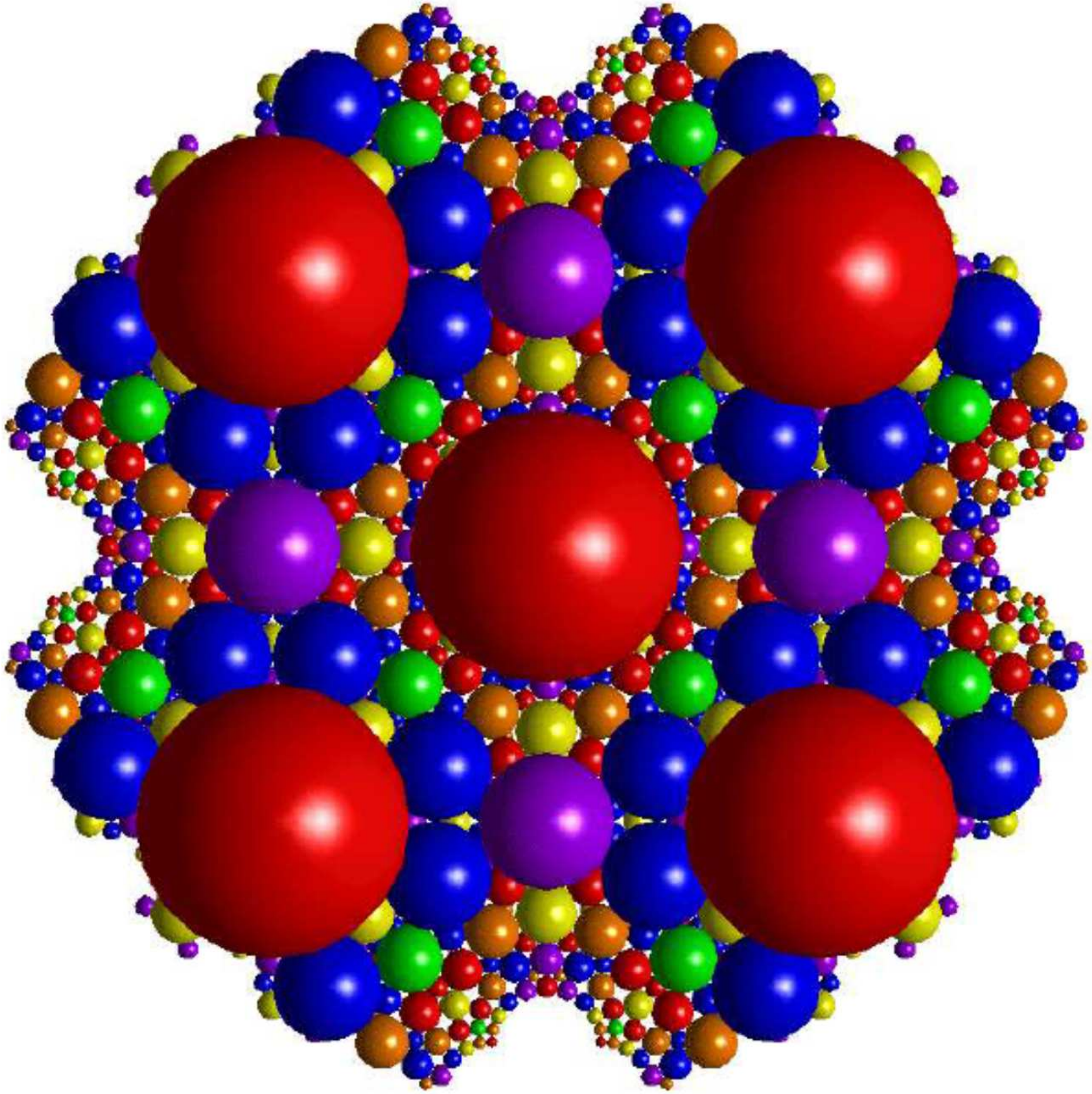
A deux centres situés sur une parabole de part et d'autre de son point de tangence (p, q) à l'axe des x correspondent deux fractions de somme de Farey égale à (p, q).

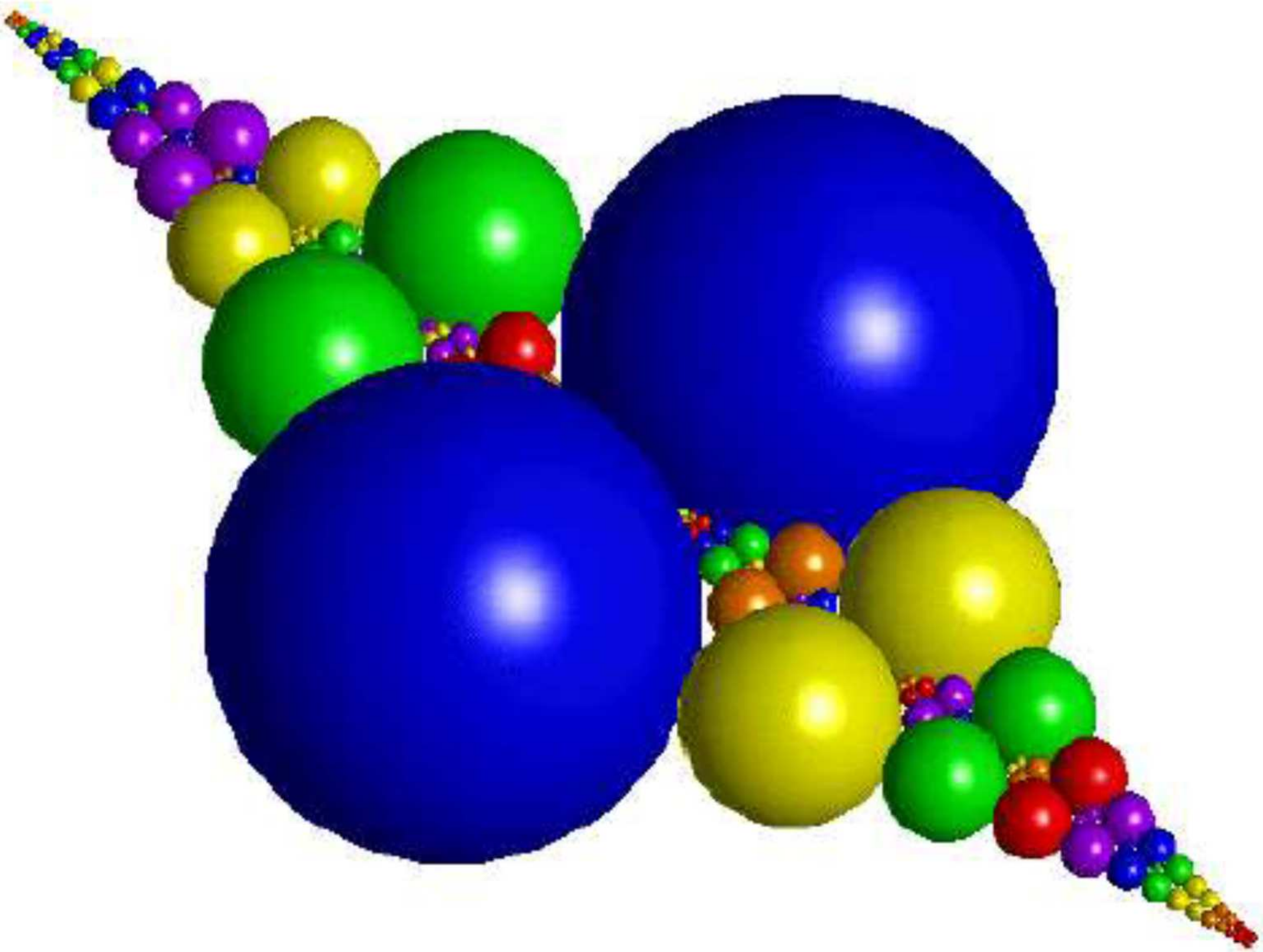


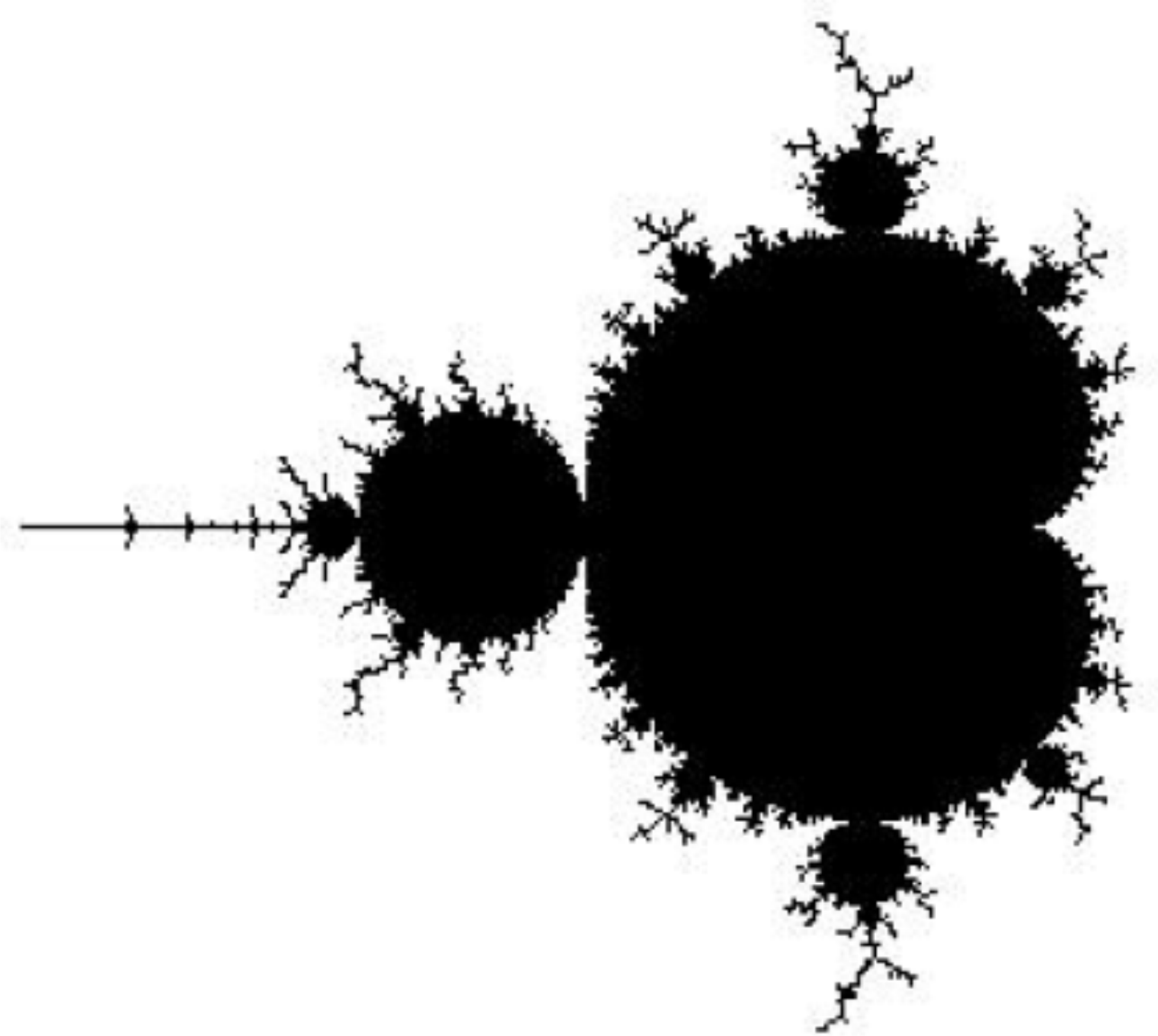



1/1
4/5
3/4
5/7
2/3
5/8
3/5
4/7
1/2
3/7
2/5
3/8
1/3
2/7
1/4
1/5
0/1
−1/4
−1/3
−2/5
−1/2
−3/5
−2/3
−3/4
−1/1
−4/3
−3/2
−5/3
−2/1
−5/2
−3/1
−4/1
1/0
5/1
4/1
7/2
3/1
8/3
5/2
7/3
2/1
7/4
5/3
8/5
3/2
7/5
4/3
5/4

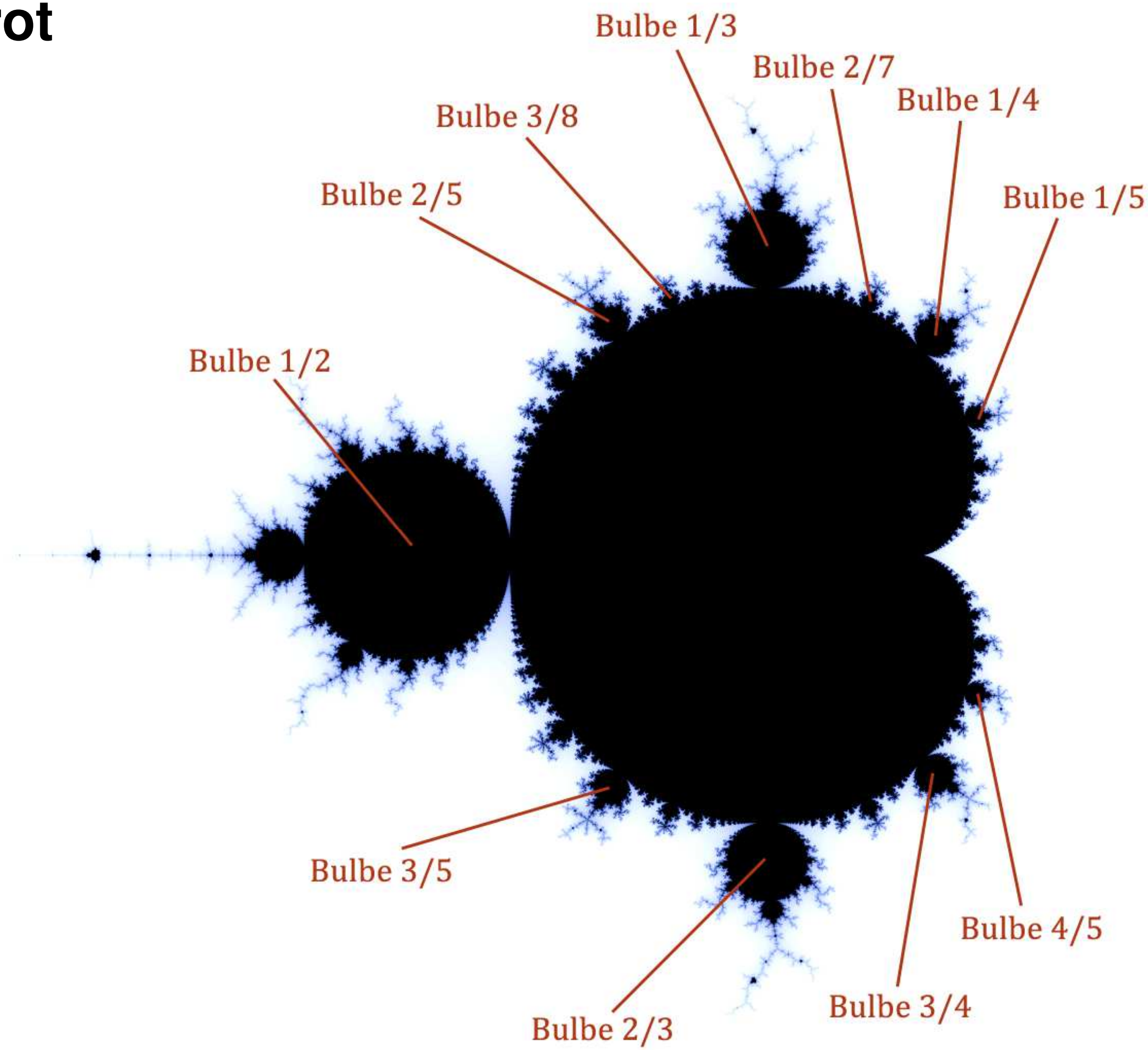

1/1
3/4
2/3
3/5
1/2
2/5
1/3
1/4
0/1
−1/4
−1/3
−2/5
−1/2
−3/5
−2/3
−3/4
−1/1
−4/3
−3/2
−5/3
−2/1
−5/2
−3/1
−4/1
1/0
4/1
3/1
5/2
2/1
5/3
3/2
4/3





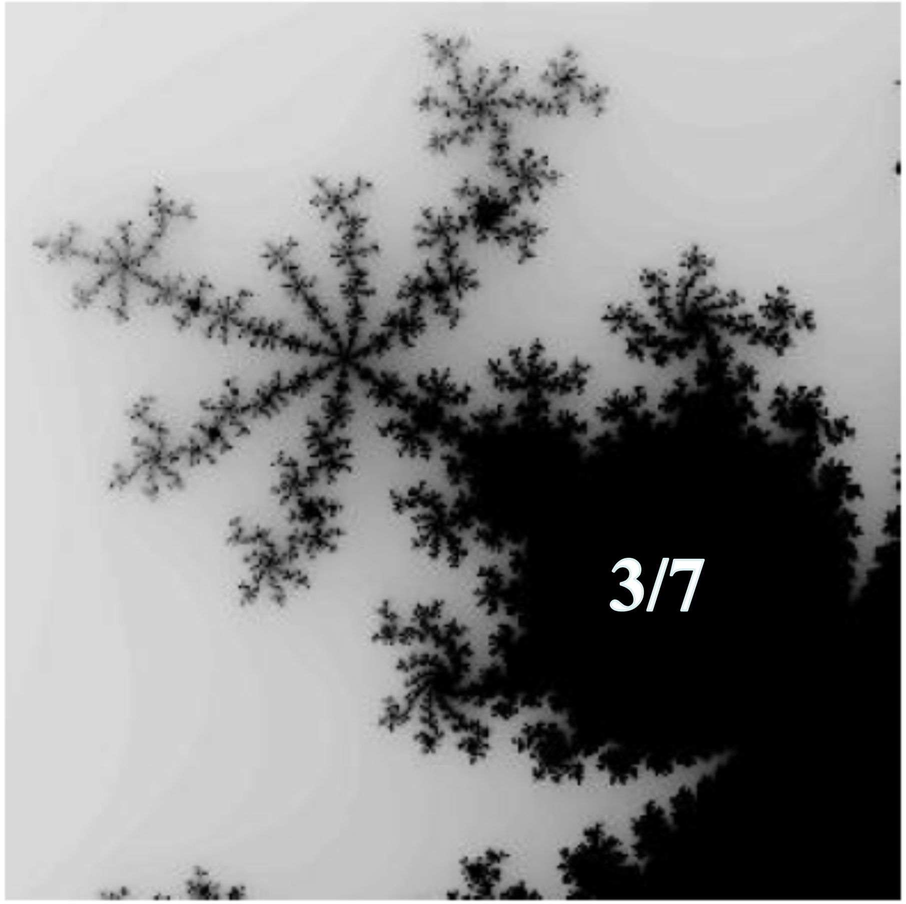


Mandelbrot

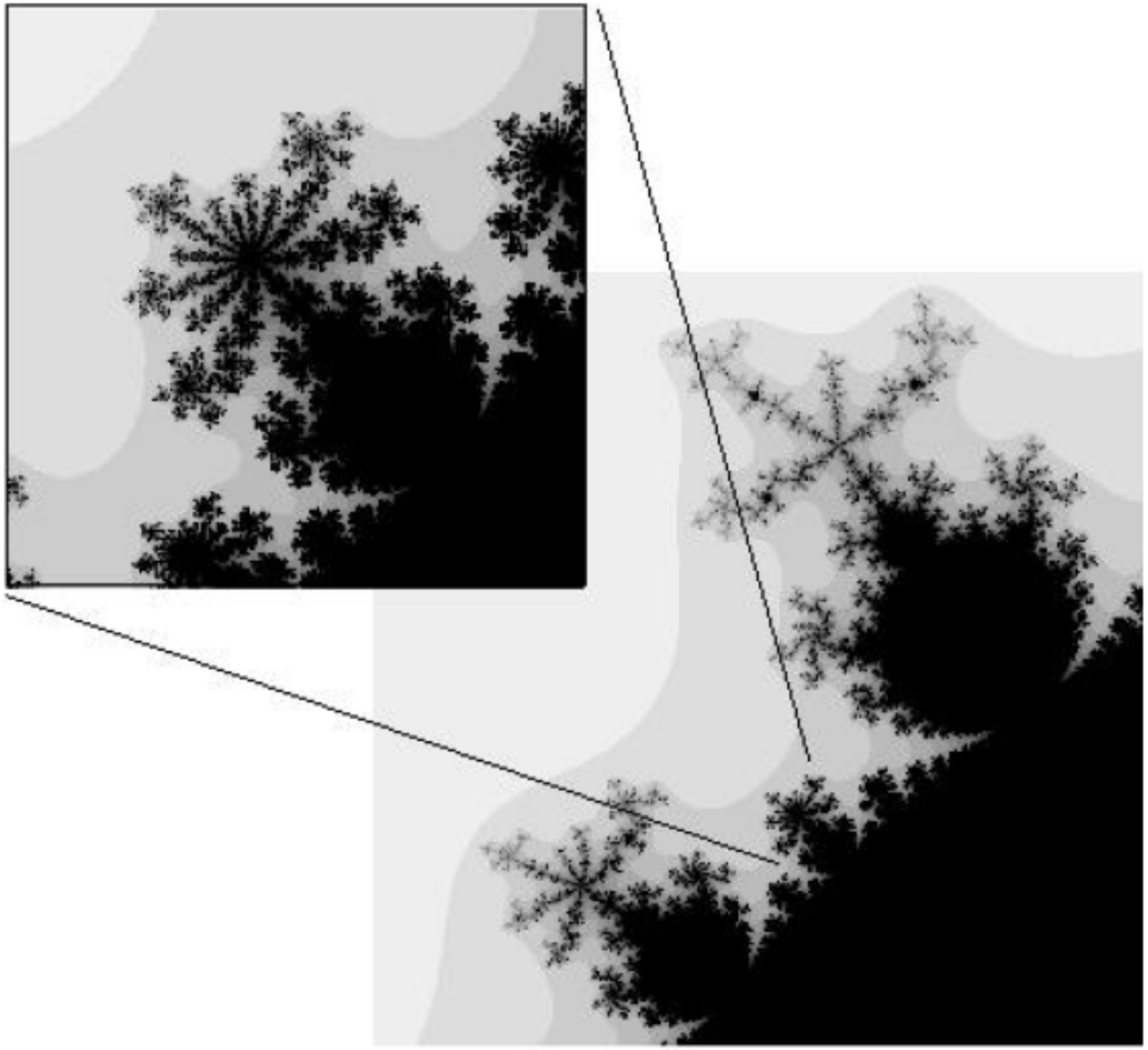


Bulbe 1/3
Bulbe 2/7
Bulbe 1/4
Bulbe 3/8
Bulbe 2/5
Bulbe 1/5
Bulbe 1/2
Bulbe 3/5
Bulbe 4/5
Bulbe 3/4
Bulbe 2/3

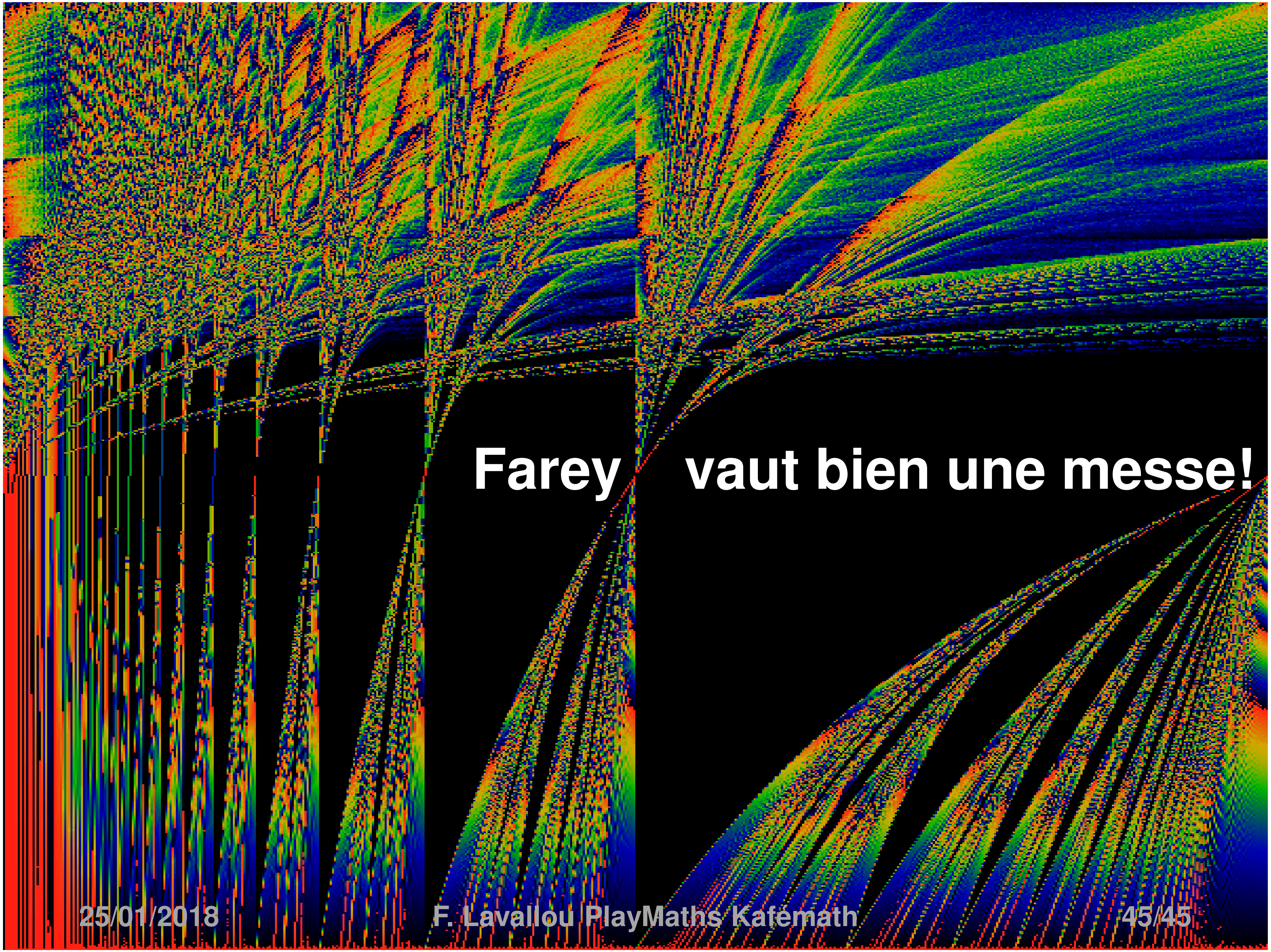
Mandelbrot



Mandelbrot



$$\frac{2}{5} \oplus \frac{3}{7} = \frac{5}{12}$$


Farey vaut bien une messe!