Evariste Galois :
Théorie de Galois et Résolubilité polynomiale

Hervé Stève membre du KAFEMATH

herve.steve@hotmail.fr

Kafemath du samedi 21 janvier 2017

Bibliothèque Melville, Paris 13ème

PLAN

1. Biographie de Galois
2. Résolubilité des polynômes
3. Groupe de Galois

Bibliographie

- Caroline Ehrhardt « Evariste Galois ; la fabrication d'une icône mathématique » ed EHESS, 2011

- « Œuvres mathématiques d'Evariste Galois » Journal de math. Pures et appliquées, 1846, t11, p381-444

Évariste Galois

à 15 ans

- Né le 25 oct 1811 à Bourg-la-Reine
- Mort le 31mai 1832 à Paris

- Bourgeoisie moyenne, lettrée
- Famille républicaine

- Collège Royal Louis-Le-Grand
jusqu'en « Maths Spé »
- Échoue 3 fois au concours de Polytechnique
- Rentre à l'École Préparatoire (Norm. Sup)

- Républicain militant (1830) : les Amis du Peuple
- Expulsion de l'École Préparatoire (déc 1830)
- Prison (1831-1832) à Sainte-Pélagie
- Duel le 30 mai 1832 pour « une infâme coquette* »
- Fosse commune au cimetière Montparnasse ou
caveau familial à Bourg-la-Reine ?

(*) Stéphanie Félicité Poterin du Motel

Galois « matheux »

- Découvre les maths à 15 ans (1826)
  - « Éléments de géométrie » de Legendre
  - « Traités d'Algèbre et d'analyse » de Lagrange
  - Lauréat Concours Général en maths en 1827
  - Prépare concours de Polytechnique en solitaire
- En « maths spé » (1828-29) :
  - Publie un théorème sur les fractions continues
  - Envoie à l'académie des Sciences un mémoire sur les équations résolubles par radicaux

(Louis Augustin Cauchy 1789-1857 : mémoires et commentaires perdus)

Galois chercheur

- Échec au Prix de l'Académie des Sciences en 1830 : attribué à Abel et Jacobi

2nd Mémoire perdu par Joseph Fourier qui est mort … Grande déception de Galois

- 3 publications dans le bulletin de Férussac
- Crée un cours privé de mathématiques
- Recherche sur les fonctions elliptiques en 1831

- 3ème soumission à l'Académie des Sciences : S. D. Poisson
- « Testament » de mathématicien (veille du duel)

Mémoire, papiers transmis à Joseph Liouville (École Polytechnique) : publication en 1846 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*

Théorie de Galois

- Qu'est-ce qu'une théorie ?

Grec *theorein* : observer, examiner

Sciences : modèle pour la compréhension de la nature et de l'humain

Maths : ensemble d'affirmations qui sont des axiomes et des théorèmes démontrables selon la logique

- théorie de Galois : étude des *extensions de corps* commutatifs, qui fait appel aux *groupes de Galois*
- Étude des équations algébriques qui se ramène à celle des *équations polynomiales*

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots a_nx^n=0$$

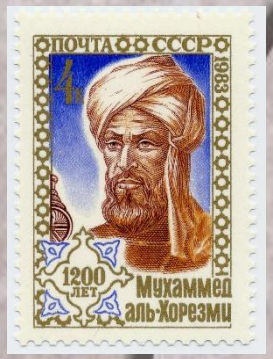
Résolubilité des polynômes

- Degré n : exposant le plus grand
- **Théorème** : au plus n racines (ou solutions)
- Si racines connues (formules) alors p(x) est résolu
- Degré 1 : ax+b=0 => x=-b/a avec a non nul
- Degrés 2 à 4 : résolus depuis le 16ème
- Degré 5 et au delà ? N. H. Abel (1802-1829) démontre en 1824 l'impossibilité de la résolution par radicaux en faisant appel à l'étude des permutations des racines

- E. Galois innove en faisant intervenir une structure que l'on appellera « groupe » par la suite !

Second degré

$ax^2+bx+c=0$ avec a non nul



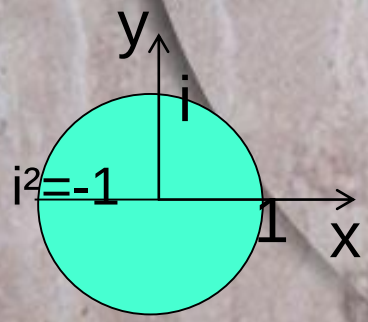
- Tablette babylonienne BM 13901 : 1700 a.j.c.
- Al Khwarizmi ($9^{ème}$ siècle) résolution systématique, formules *al-jabr* (algèbre)
- Soit $x^2-sx+p=0$ avec $s=x_1+x_2=-b/a$ et $p=x_1x_2=c/a$

  Équivalent à $(x-s/2)^2-(s^2/4-p)=0$

  On pose $\Delta=s^2/4-p$ appelé *le discriminant*
  - Si $\Delta=0$ alors $x=x_1=x_2=s/2=-b/2a$: 1 racine double
  - Si $\Delta>0$ alors $x_1=s/2-\sqrt{\Delta}$ et $x_2=s/2+\sqrt{\Delta}$:

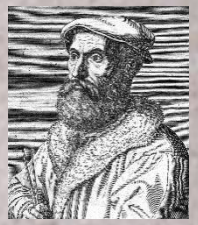
    2 racines réelles si a,b,c réels
  - Si $\Delta<0$ alors $x_1=s/2-i\sqrt{-\Delta}$ et $x_2=s/2+i\sqrt{-\Delta}$:

    2 racines complexes conjuguées si a,b,c réels



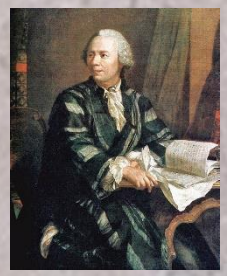
Troisième degré

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ avec a non nul



- 1545 : Méthode de Girolamo Cardano (1501-1576) empruntée à Niccolo Fontana (1499-1557) dit Tartaglia

puis Leonhard Euler (1707-1783) justifiera les solutions



- on pose $x=z-b/3a$, on se ramène à

$$z^3+pz+q=0$$

- soit $z=u+v$, on obtient le système à 2 équations :

$$S=u^3+v^3=-q \text{ et } P=u^3v^3=-p^3/27$$

- alors $X=u^3$ ou v^3 solutions de

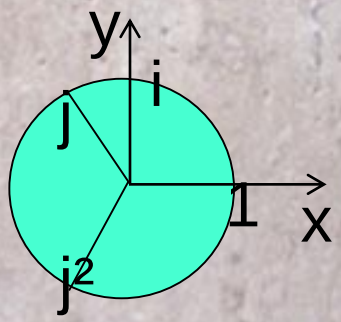
$$\mathbf{X^2+qX-p^3/27=0} \quad \text{(degré 2)}$$

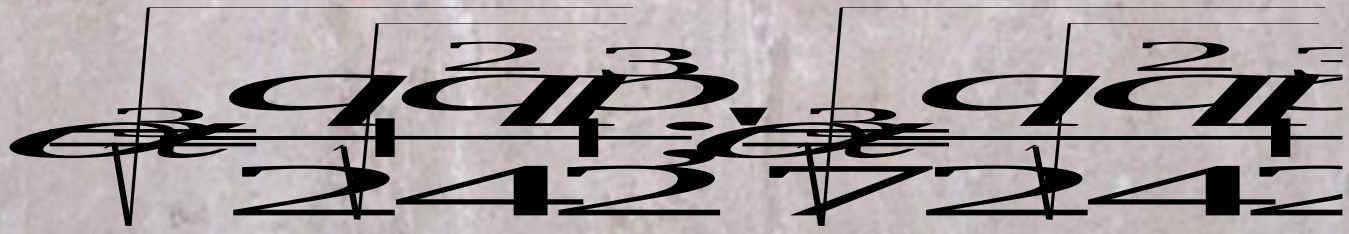
On a perdu un degré

Troisième degré (2)

- u,v racines cubiques de X_1, X_2
- 3 racines cubiques de 1 : $1, j, j^2$

  avec $j=-1/2+i\sqrt{3}/2$; $j^3=1$; $1+j+j^2=0$
- On a $z=u+v$ avec $uv=-p/3$
- On cherche $u=j^{k-1}\alpha$ et $v=j^{k-1}\alpha'$ pour $k=1,2,3$





- Trois solutions $z_1=\alpha+\alpha'$; $z_2=j\alpha+j^2\alpha'$; $z_3=j^2\alpha+j\alpha'$

cyclicité/permutation des racines

Troisième degré (3)

soit le discriminant $\Delta=q^2/4+p^3/27$

- Si $\Delta=0$ alors $X=u^3=v^3=-q/2$ soit $z_1=3q/p$, $z_2=z_3=-3q/2p$

  si p,q réels alors 2 solutions réelles

- Si $\Delta>0$ alors $u^3=-q/2-\sqrt{\Delta}$ et $v^3=-q/2+\sqrt{\Delta}$

  si p,q réels alors 1 solution réelle + 2 complexes conjuguées

- Si $\Delta<0$ alors $u^3=-q/2-i\sqrt{-\Delta}$ et $v^3=-q/2+i\sqrt{-\Delta}$

  si p,q réels alors 3 solutions réelles ! Trigonométrie

Nécessité de passer par les complexes pour trouver des solutions réelles !

quatrième degré

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ avec a non nul

- Résolu par Ludovico Ferrari (1522-1565) élève de Cardan.
- Méthode de Joseph Louis Lagrange (1735-1813) :

Posons $x=y-b/4a$, alors on a $y^4+py^2+qy+r=0$

Soit $y=(u+v+w)/2$; $s=u^2+v^2+w^2$; $t=u^2v^2+u^2w^2+w^2v^2$; $g=u\,v\,w$

on obtient $(y^2-s/4)^2=\ldots=t/4+gy$

et donc $y^4-s/2\,y^2-gy+s^2/16-t/4=0$

avec $p=-s/2$; $q=-g$; $r=s^2/16-t/4$ d'où $t=p^2-4r$

soit $X=[u^2,v^2,w^2]$ solutions de $(X-u^2)(X-v^2)(X-w^2)=X^3-sX^2+tX-g^2=0$

et donc $\mathbf{X^3+2pX^2+(p^2-4r)X-q^2=0}$ 3ème degré => X

Soit $u=\pm\sqrt{X}$ alors v,w tq $uvw=g=-q$, $u^2+v^2+w^2=s=-2p$

on obtient les 4 sol $y_1=(u+v+w)/2$; $y_2=(u-v-w)/2$;

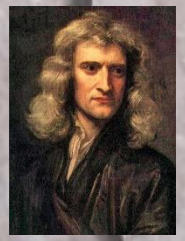
$y_3=(-u+v-w)/2$; $y_4=(-u-v+w)/2$

On a encore perdu un degré !

Degré 5 et plus

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots+a_nx^n$$

- Peut-on perdre encore un degré ? Voir Euler ...
- Les racines sont liées entre-elles par des permutations ? voir Lagrange, Abel et Galois
- Certaines quintites sont résolubles à l'aide de radicaux … ex) $x^5-1=0=(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)$



- Sinon il reste la *résolution numérique* : par exemple avec la méthode itérative de Newton-Raphson

x_0 non nul donné puis $x_{k+1}=x_k - p(x_k)/p'(x_k)$

avec $p'(x)$ la dérivée de $p(x)$:

$$p'(x)= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots na_nx^{n-1}$$

faire des essais avec différents x_0 , $p'(x_0)$ non nul

Groupe

ensemble muni d'une loi de composition interne associative admettant un élément neutre et, pour chaque élément de l'ensemble, un élément symétrique.

Exemple : les entiers relatifs **Z** muni de l'addition +

- si a,b dans **Z** alors a+b dans **Z** donc + loi de composition interne
- si a,b,c dans **Z** , on a (a+b)+c=a+(b+c) : associativité
- si a dans **Z**, a+0=0+a=a dans 0 est l'élément neutre
- Pour tout a dans **Z**, il existe b dans **Z** tq : a+b=b+a=0.

L'élément b est noté –a élément symétrique de a ou opposé de a

(pour la multiplication x dans **R** : 1 est le neutre et 1/a est l'inverse de a : élément symétrique)

Groupe commutatif ou abélien :

si a,b dans **Z** alors a+b=b+a

Groupes finis

- **Groupe cyclique abélien $C_n=Z/nZ=\{0,1,2..,n-1\}$:** ordre n

Tout groupe abélien est produit de groupes cycliques (ex ordre 8 : C_8 ; $C_2 \times C_4$; $C_2 \times C_2 \times C_2$)

- **Groupe symétrique S_n** permutations de n éléments : ordre n!* (G_n Galois), non abélien n>2
- **Groupe dihédral D_n :** ordre 2n, isométrie plane
- **Groupe des quaternions H_8 :** ordre 8, $H_8=C_2 \times D_2$

$\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ avec $I^2=J^2=K^2=-1$, IJ=K, JK=I, KI=J

avec $i^2=-1$

(*) n! = 1 x 2 x 3 x … x n

Groupes de Galois

le **groupe de Galois** d'une extension de corps ***L*** sur un corps ***K*** est le groupe des automorphismes de corps de ***L*** laissant ***K*** invariant

- Corps : c'est un ensemble muni de +, -, x et / : par exemple **R** ensemble des réels.
- Extension de corps : par exemple : **C** l'ensemble des nombres complexes est une extension de corps de **R**
- Un automorphisme est une bijection de **K** dans **K** qui préserve la structure de K (une symétrie). Les automorphismes de **K** forment un groupe.

→ **Il s'agit d'appliquer les groupes de Galois aux polynômes p(x) sur un corps R ou C, avec les permutations de ses racines pour obtenir (ou non) une condition de résolution par radicaux.**

Groupes de Galois

G_n groupe de Galois : permutations à n éléments d'ordre n!. A_n sous groupe de **G_n** des permutations paires* d'ordre n!/2 : **$G_n = A_n \times C_2$**

Groupe résoluble :

G_n est résoluble si A_n est **sous groupe distingué**

i.e $\forall\ y \in G_n, \forall\ x \in A_n$ alors $y\ x\ y^{-1} \in A_n$

+ Tout sous groupe d'un groupe abélien est distingué, en particulier les groupes cycliques.

+ Le produit de groupes distingués est distingué.

(*) permutations paires : nombre pair d'inversions

ex) paires : identité, n-cycles si n impair, …

impaires : n-cycles si n pair, transpositions, …

Groupes de Galois

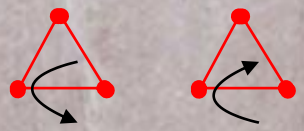
Théorème de Galois : G_n est résoluble pour n<5

Démonstration :

- G_1={identité} groupe trivial

- G_2={id, τ}=C_2 groupe cyclique
  avec τ transposition=c_2 2-cycle

- G_3={id, 3 τ, 2 c_3}=A_3 x C_2, avec c_3 3-cycle
  A_3={id, 2 c_3}=C_3 sous groupe distingué de G_3



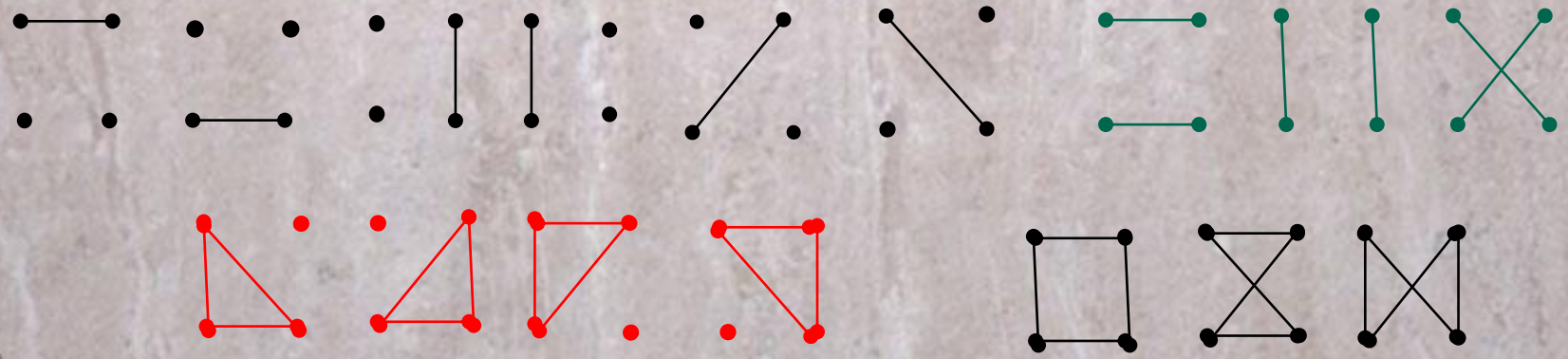
Groupes de Galois

- G_4={id, 6 τ ,3 τ' ,8 c_3, 6 c_4}, ordre 24 avec c_4 4-cycle

  avec τ'= $\tau\tau$ bi transposition à support disjoint

  A_4={id, 3 τ' , 8 c_3} ordre 12 et V_4={id, 3 τ'}=C_2 x C_2 ordre 4

  V_4 groupe de Klein sous groupe distingué de A_4 = V_4 x C_3



Groupes de Galois

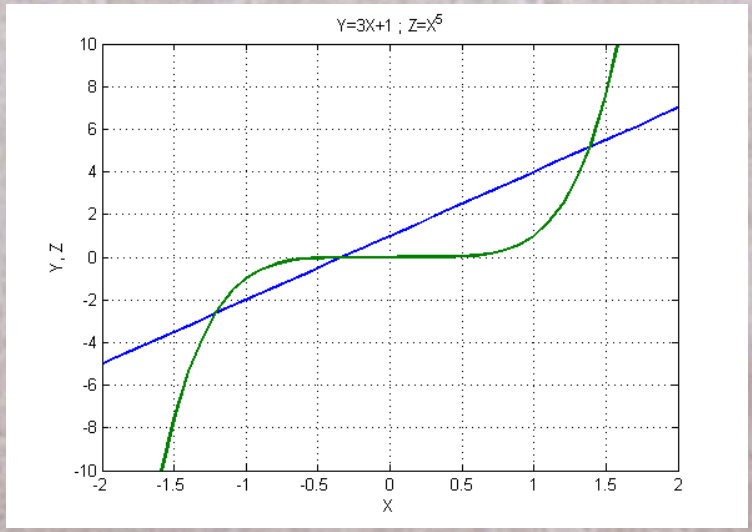
- G_5={id, 10 τ, 15 τ' , 20 c_3, 20 $c_3\tau$, 30 c_4, 24 c_5} ordre 120

  A_5={id, 15 τ' ,20 c_3, 24 c_5} ordre 60 **n'est pas distingué** !

  car 1+15, 1+20, 1+24, 1+15+20, … ne divisent pas 60

Donc G_5 n'est pas résoluble : CQFD

Exemple) le polynôme $p(x)=x^5-3x-1$ a 3 racines réelles et 2 complexes conjuguées, n'est pas décomposable…



Applications

- **Équations algébriques …**
- **Théorie des corps** ou théorie de Galois

  sous-corps Cp = Z/pZ avec p nombre premier
- **Théorie algébrique des nombres**

  nombres constructibles : polygones réguliers constructibles à la règle et au compas (théorème de Gauss-Wantzel) => pas de trisection de l'angle et duplication du cube
- **Géométrie algébrique**

  variétés algébriques : intersections de courbes, surfaces avec des équations polynomiales à plusieurs variables : $x^2+y^2=1$

  => dernier théorème de Pierre de Fermat (16?-1665): $n>2$, $x^n+y^n=z^n$ n'a pas de solutions entières non triviales

Conclusion

1. Génie mathématique de Galois
2. Notion de groupe
3. Théorème de Galois