# FAISONS TOURNER LES VECTEURS

# AVEC FRESNEL

**Augustin FRESNEL**
**1788 - 1827**

**Kafémath**
**21 avril 2016**

**Patrick FARFAL**

# Objet

- Avec les vecteurs de Fresnel, tout est simple (ou presque)

  - Donc (?) nous allons parler des complexes

## Pour un Electricien :

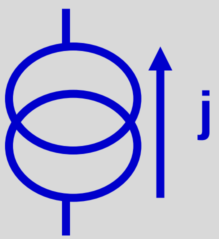
$$i \neq \sqrt{-1}$$

**i, c'est l'*intensité* du courant !**

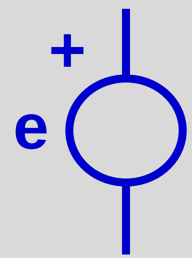
$$\sqrt{-1} = j$$

**Si un Electricien veut noter j (ce qui n'arrive jamais), il écrit : $-1/2 + j\sqrt{3}/2$**

**Mais les Electriciens se sont piégés eux-mêmes quand ils ont introduit le courant électromoteur, noté j** ***bof…!***




**source de courant (duale de la source de tension)**



# Notation complexe

- **Signal (co)sinusoïdal**

$$s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$$

**s(t) : valeur (ou amplitude) instantanée**

**S : amplitude crête ou maximale**

**$\omega t + \varphi = \varphi_i(t)$ : phase (instantanée) = état vibratoire**

**$\varphi$ : phase à l'origine**

**$\omega$ : pulsation (ou fréquence angulaire) = $2\pi f$**

$$s(t) = \Re e\left[S\, e^{j(\omega t + \varphi)}\right]$$

**Séparation $\varphi$, t :**

$$s(t) = \Re e\left[S\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}\right]$$

$$s(t) = \Re e\left[\mathcal{S}\, e^{j\omega t}\right]$$

$\mathcal{S} = S\, e^{j\varphi}$ **: Amplitude complexe**

# Notation complexe

- **Plusieurs signaux (co)sinusoïdaux**

$$s(t) = S\cos(\omega t + \varphi) = \Re e\,[S\,e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

**signaux synchrones**

$$s1(t) = S1\cos(\omega t + \varphi 1) = \Re e\,[S1\,e^{j(\omega t + \varphi 1)}]$$

$$k\,s(t) + k1\,s1(t) = k\,\Re e\,[S\,e^{j(\omega t + \varphi)}] + k1\,\Re e\,[S1\,e^{j(\omega t + \varphi 1)}]$$

**k fois le machin du truc est égal au truc de k fois le machin**

$$= \Re e\,[(k\,S\,e^{j\varphi} + k1\,S1\,e^{j\varphi 1})\,e^{j\omega t}]$$

$$\boxed{k\,s(t) + k1\,s1(t) = \Re e\,[(k\,\mathcal{S} + k1\,\mathcal{S}1)\,e^{j\omega t}]}$$

***Combinaison des signaux réels*** ***Combinaison des amplitudes complexes***

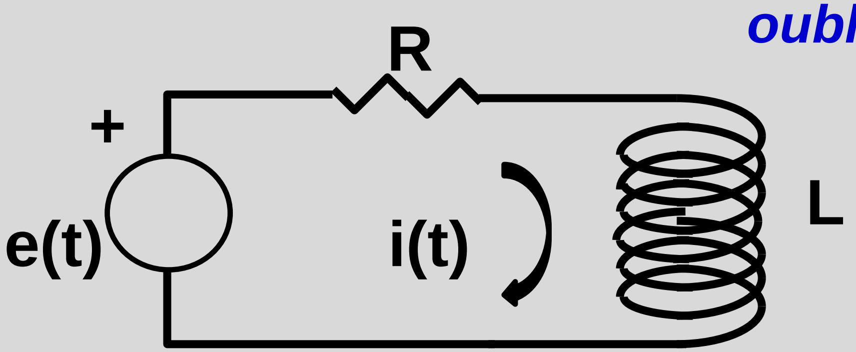
***En régime sinusoïdal pur, toutes les lois linéaires (donc pas celles qui font intervenir des puissances) - de l'électrocinétique ou autres : électromagnétisme, mécanique… - peuvent être exprimées en utilisant les amplitudes complexes - en oubliant (provisoirement) le facteur temps***

# Notation complexe

- **Plusieurs signaux (co)sinusoïdaux synchrones**

***En régime sinusoïdal pur, toutes les lois linéaires (donc pas celles qui font intervenir des puissances) - de l'électrocinétique ou autres : électromagnétisme, mécanique… - peuvent être exprimées en utilisant les amplitudes complexes - en oubliant (provisoirement) le facteur temps***

***Sommation pondérée***
***Dérivation***
***Intégration***




$$e(t) = R\, i(t) + L\, di/dt$$

**On démontre qu'en régime permanent sinusoïdal, tous les signaux ont même pulsation**

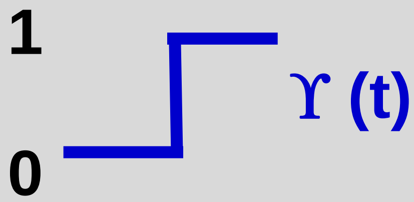
$$\Re e\,[E\, e^{j(\omega t + \varphi)}] = \Re e\,[R\, I\, e^{j(\omega t + \varphi)}] + \Re e\,\Big[\underbrace{L\, d/dt\,[I\, e^{j(\omega t + \varphi)}]}_{L\ j\omega\ I\, e^{j(\omega t + \varphi)}}\Big]$$

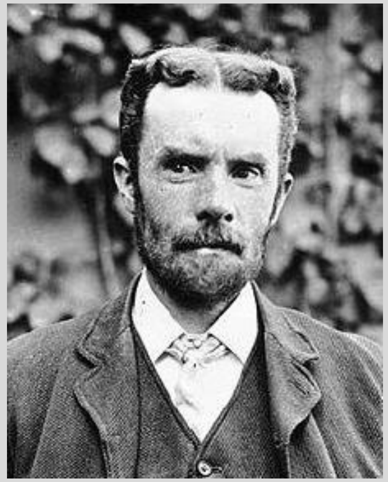
$$\Re e\,[\mathcal{E}\, e^{j\omega t}] = \Re e\,[R\mathcal{I}\, e^{j\omega t}] + \Re e\,[j\omega L\mathcal{I}\, e^{j\omega t}]$$

$\Re e\,[\mathcal{E}\, e^{j\omega t}] = \Re e\,[R\mathcal{I}\, e^{j\omega t} + j\omega L\mathcal{I}\, e^{j\omega t}]$ **puis on fige le temps : t = 0 :**

$\mathcal{E} = (R + j\,L\omega)\mathcal{I}$ **(loi d'Ohm) … Etc.**

## Notation complexe



Oliver Heaviside
1850-1925

- **Applications**
- **Calcul opérationnel (Leibniz, Heaviside, Carson…)**

$$s(t) = \Re e\,[S\, e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

$$ds/dt = \Re e\,[j\omega\, S\, e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

**Amplitude complexe du signal dérivé =**

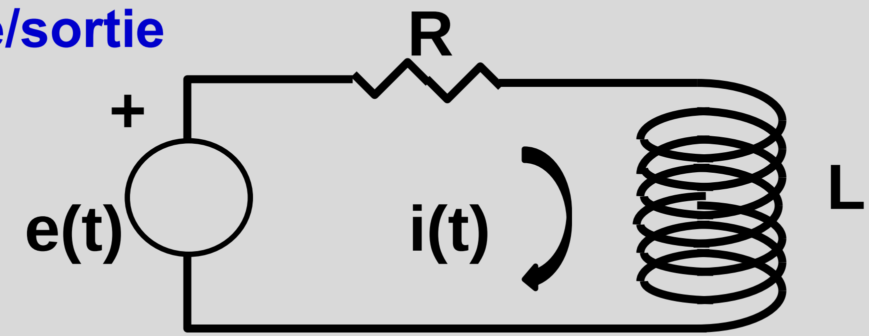
**$j\omega$ x amplitude complexe du signal de départ**

**Amplitude complexe du signal intégré =**

**$1/(j\omega)$ x amplitude complexe du signal de départ**

**⇨Généralisé aux signaux qcques par la transformation de Laplace (en p ou en s)**

- **Fonctions de transfert**
  - **= Quotient d'amplitudes complexes entrée/sortie**
  - $\mathcal{I}/\mathcal{E} = \mathcal{H}(j\omega) = 1/(R + jL\omega) = 1/\mathcal{Z}$
  - **Généralisable aux signaux qcques : H(p) à partir des lois physiques (linéaires) décrivant les systèmes**



## Notation complexe

- **Pulsations négatives**

$$s(t) = \Re e\,[S\, e^{j(\omega t + \varphi)}] = \frac{1}{2}[S\, e^{j(\omega t + \varphi)} + S\, e^{-j(\omega t + \varphi)}]$$

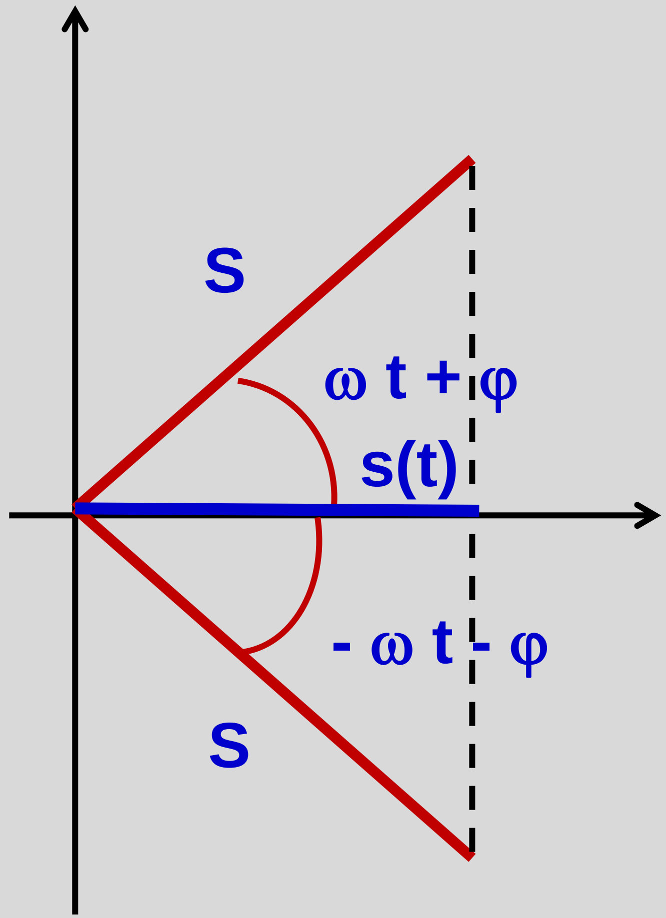
$$= \frac{1}{2}[S\, e^{j(\omega t + \varphi)} + S\, e^{j(-\omega t - \varphi)}]$$

**Série de Fourier élémentaire**

- **Série et intégrale de Fourier**

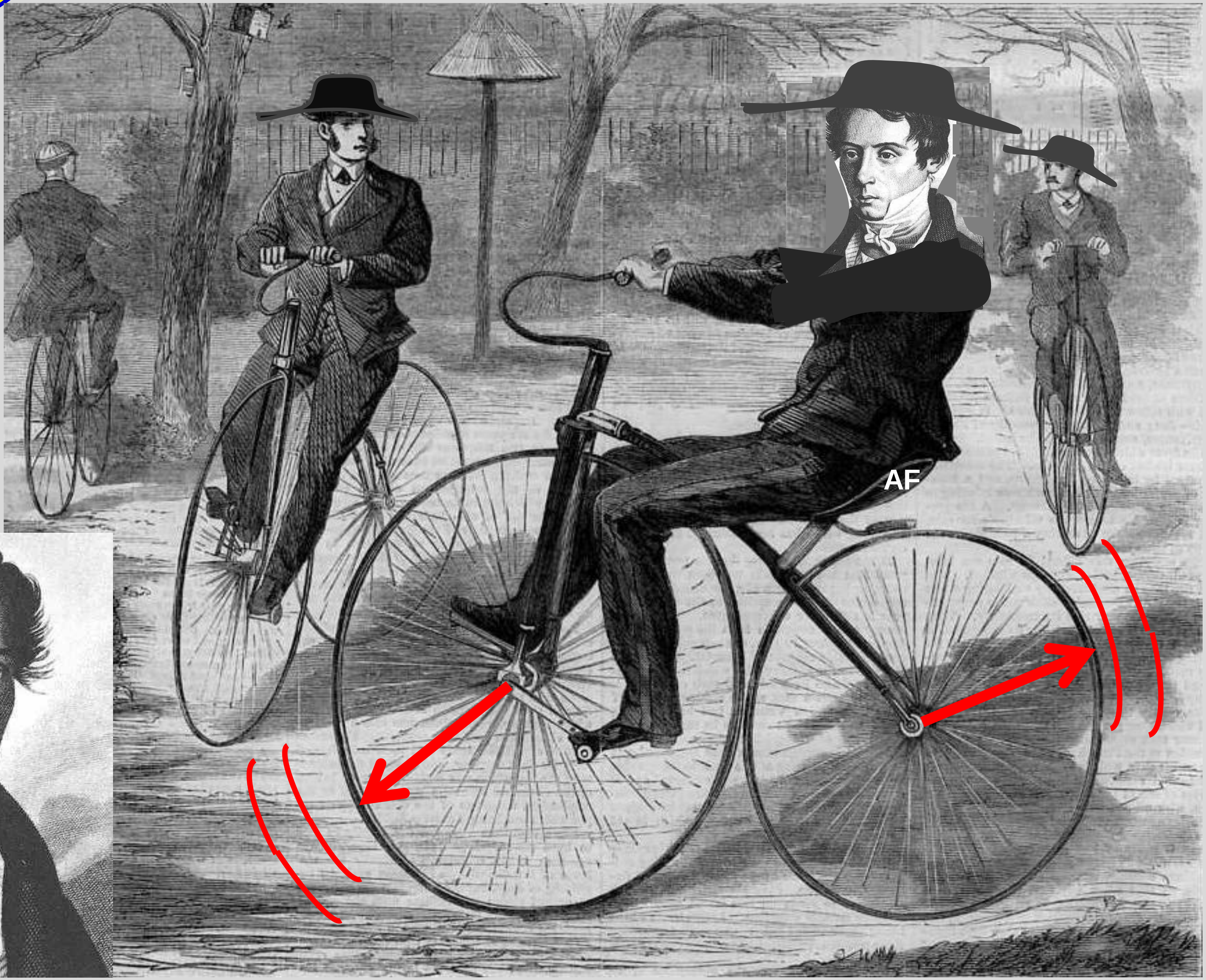
**utilisent des fréquences négatives**

**(nécessaires pour reconstituer un signal réel)**



# Et Fresnel dans tout ça ?

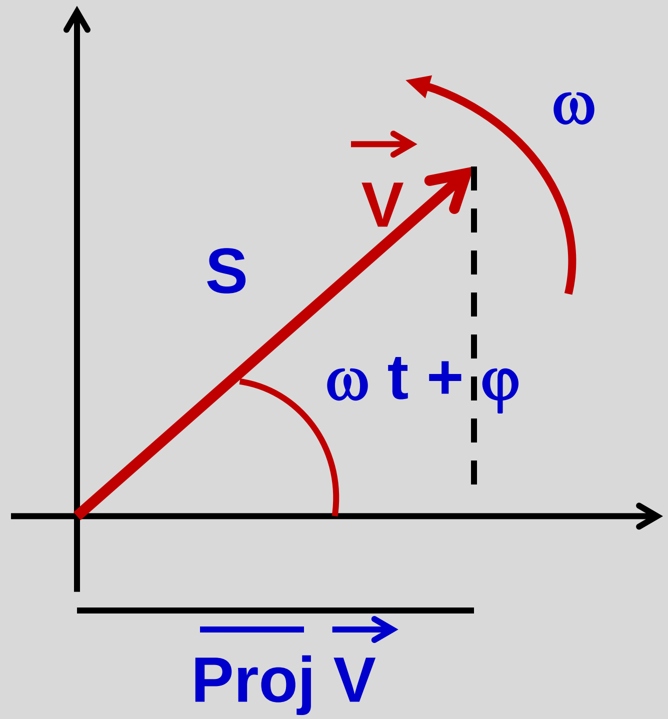
# Et Fresnel se mit à faire tourner les vecteurs…




1788 - 1827

## Vecteurs tournants de Fresnel

**$s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$**

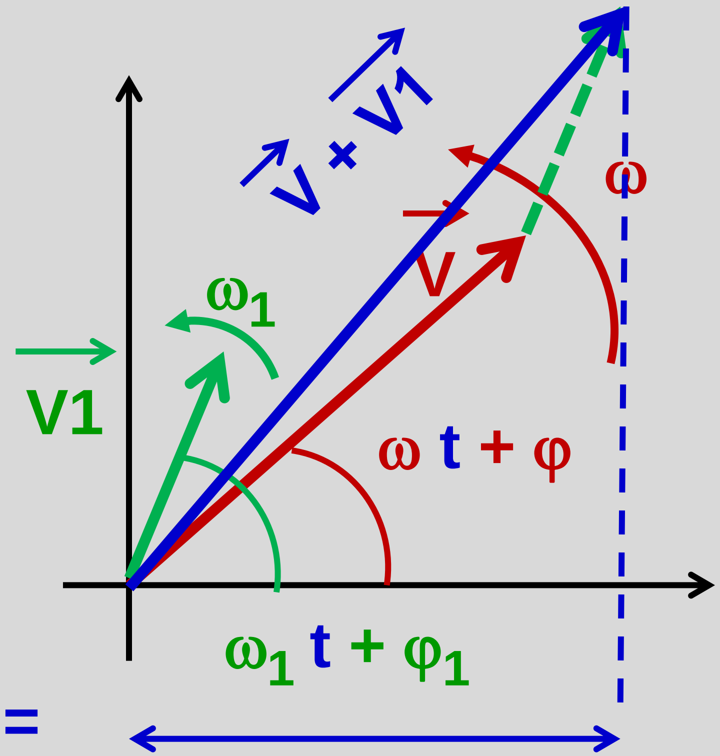



**$= \overline{\text{Proj}}\ \vec{V}(S, \omega t + \varphi)$**

- **Plusieurs signaux : Opérations linéaires**
  - **Addition**

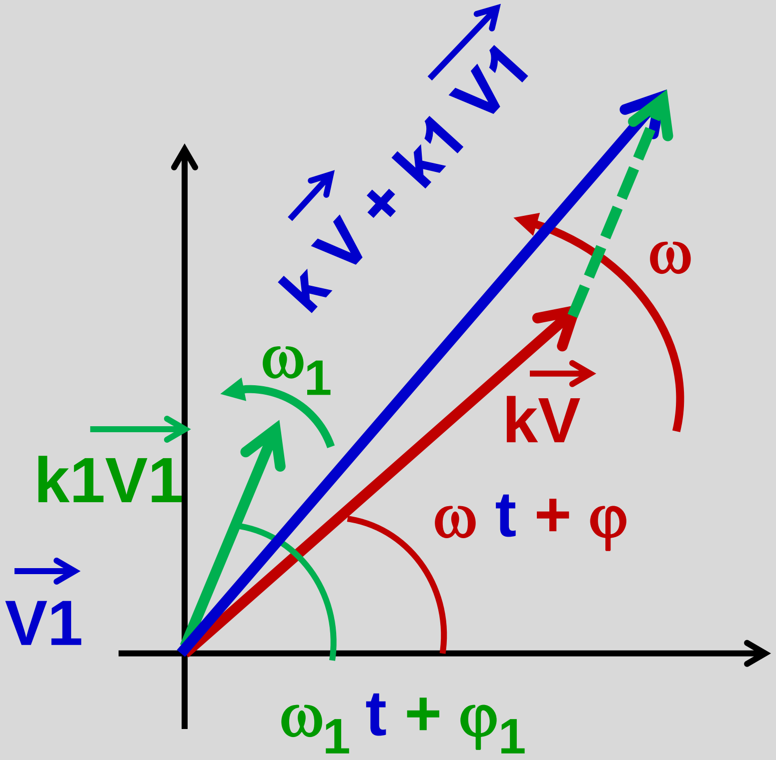
**$s(t) + s1(t) = ?$**

☞ **Mais à quelle vitesse tourne le vecteur somme ?**




**$s(t) + s1(t) =$**

# Vecteurs tournants de Fresnel




- Plusieurs signaux : Opérations linéaires (suite)
  - Sommation pondérée
    - $\overline{\text{Proj}}\,(k\,\vec{V} + k1\,\vec{V1}) = k\,\overline{\text{Proj}}\,\vec{V} + k1\,\overline{\text{Proj}}\,\vec{V1}$

    ☞ Mais à quelle vitesse tourne le vecteur somme ?

  - Dérivation

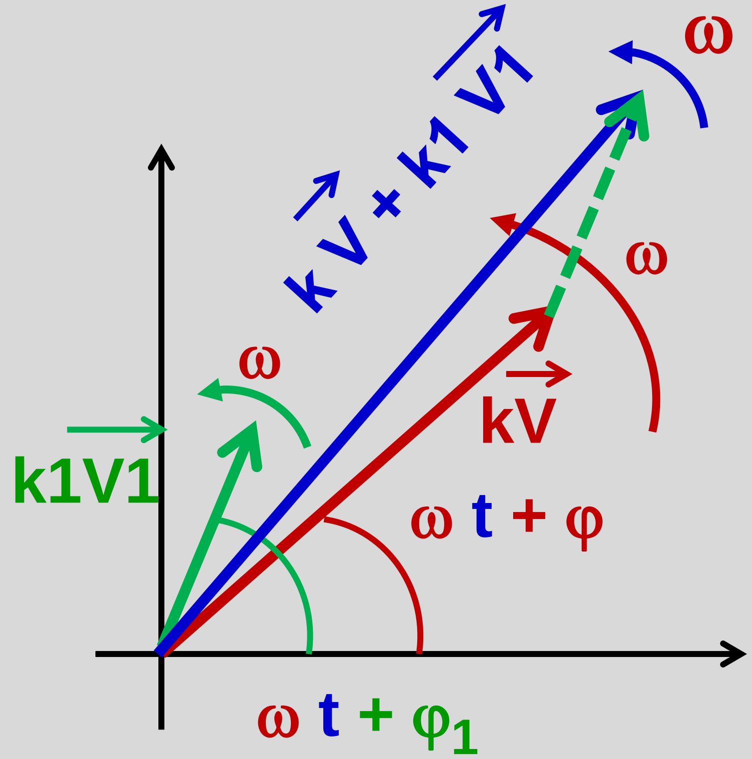
$$ds(t)/dt = \overline{\text{Proj}}\,\vec{V'}\,(\omega\, S, \omega\, t + \varphi + \pi/2)$$

  - Intégration

$$\overline{\text{Proj}}\,\vec{Vi}\,(S/\omega, \omega\, t + \varphi - \pi/2)$$

# Vecteurs tournants de Fresnel

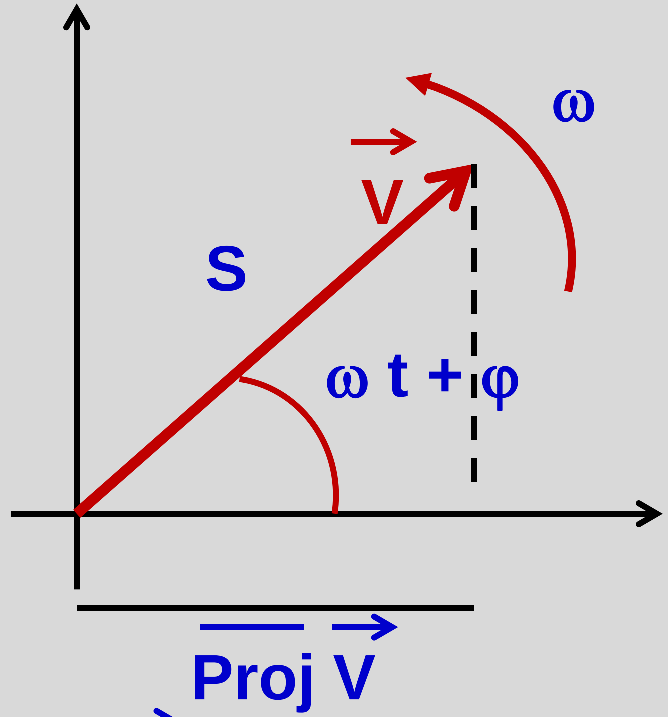
- Plusieurs signaux : Opérations linéaires (suite)
  - Signaux synchrones : $\omega_1 = \omega$
    - $k\,s(t) + k1\,s1(t) = ?$
    - $k\,\overline{\text{Proj}}\,\overrightarrow{V} + k1\,\overrightarrow{\text{Proj}\,V1} = \overline{\text{Proj}}\,(k\,\overrightarrow{V} + k1\,\overrightarrow{V1})$
    - Le vecteur somme tourne à la vitesse $\omega$




    - Le diagramme ne se déforme pas au cours du temps
    - Il est inutile d'imaginer que le diagramme résultant tourne alors qu'on le construit

      = On fige le temps (t = 0)
    - Puis quand la construction est terminée, on « relance » le mouvement (pour étudier l'évolution de la projection résultante, donc celle du signal sinusoïdal résultant, de même pulsation que les signaux sommés
    - Condition : synchronisme des signaux ; sauf cas particuliers : modulation

# Notation complexe et Vecteurs tournants




$$s(t) = S \cos(\omega\, t + \varphi)$$

**Notation complexe**

$$s(t) = \Re e\,[S\, e^{\,j(\omega\, t\, +\, \varphi)}]$$

$$s(t) = \overline{\text{Proj}}\ \vec{V}(S, \omega\, t + \varphi)$$

$$s(t) = \Re e\,[S\, e^{\,j\varphi}\, e^{\,j\omega t}]$$

$$s(t) = \Re e\,[\mathcal{S}\, e^{\,j\omega t}]$$

$\mathcal{S} = S\, e^{\,j\varphi}$ **: Amplitude complexe**

**Vecteur V(S, φ )**

**(vecteur de Fresnel figé à t = 0)**

**représentent le signal de façon équivalente**

$\Re e$ $\qquad\qquad$ $\overline{\text{Proj}}$

# Notation complexe et Vecteurs tournants

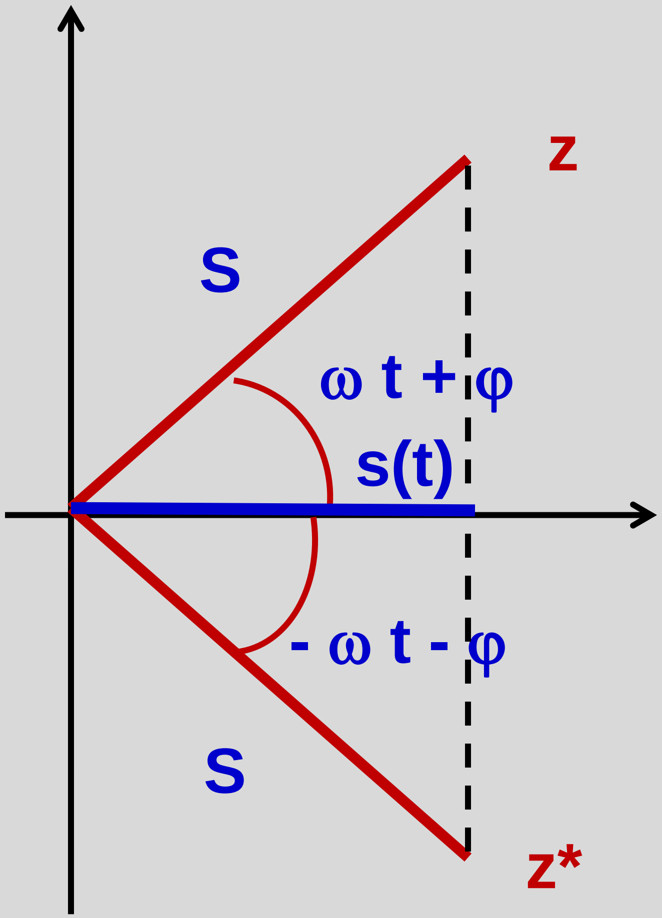
***En régime sinusoïdal pur, toutes les lois*** **linéaires** ***(donc pas celles qui font intervenir des puissances) - de l'électrocinétique ou autres : électromagnétisme, mécanique… - peuvent être exprimées en utilisant les*** **amplitudes complexes** ***– en oubliant (provisoirement) le facteur temps***

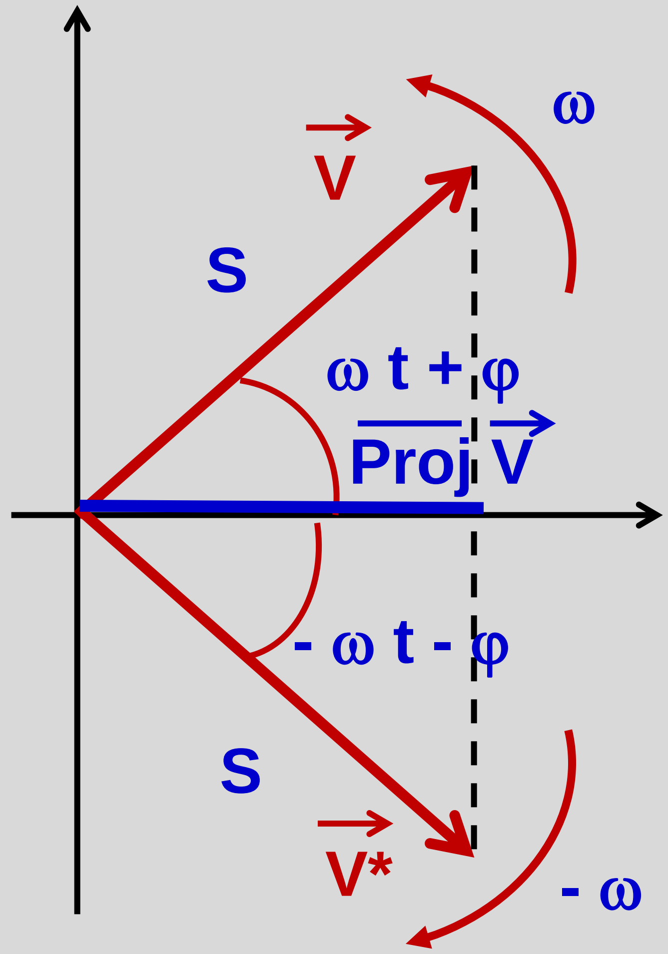
***ou***

***en utilisant les*** **vecteurs tournants de Fresnel** ***– figés = en oubliant (provisoirement) le facteur temps***

# Notation complexe et Vecteurs tournants

- Fréquences négatives

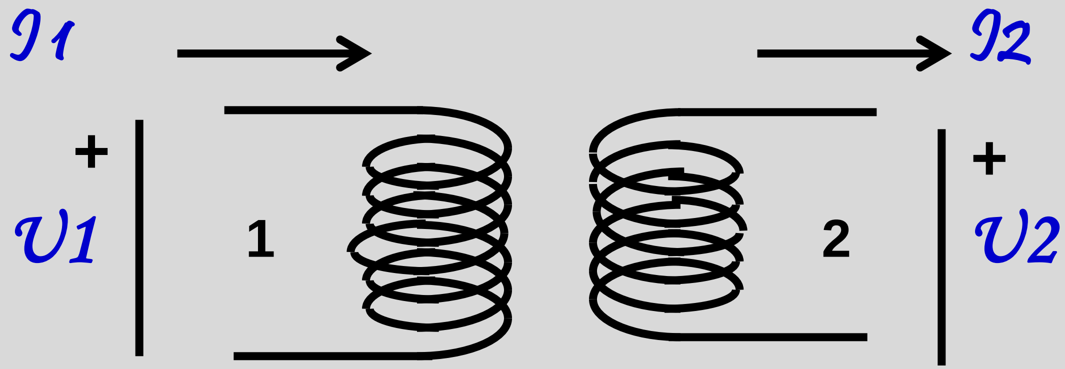



$$\Re e\,(z) = 1/2\,(z + z^*)$$

$$\overline{\text{Proj}}\,\vec{V} = 1/2\,[\,\vec{V} + \vec{V}^*\,]$$

# Vecteurs tournants




- **Application**
- **Transformateur électrique**

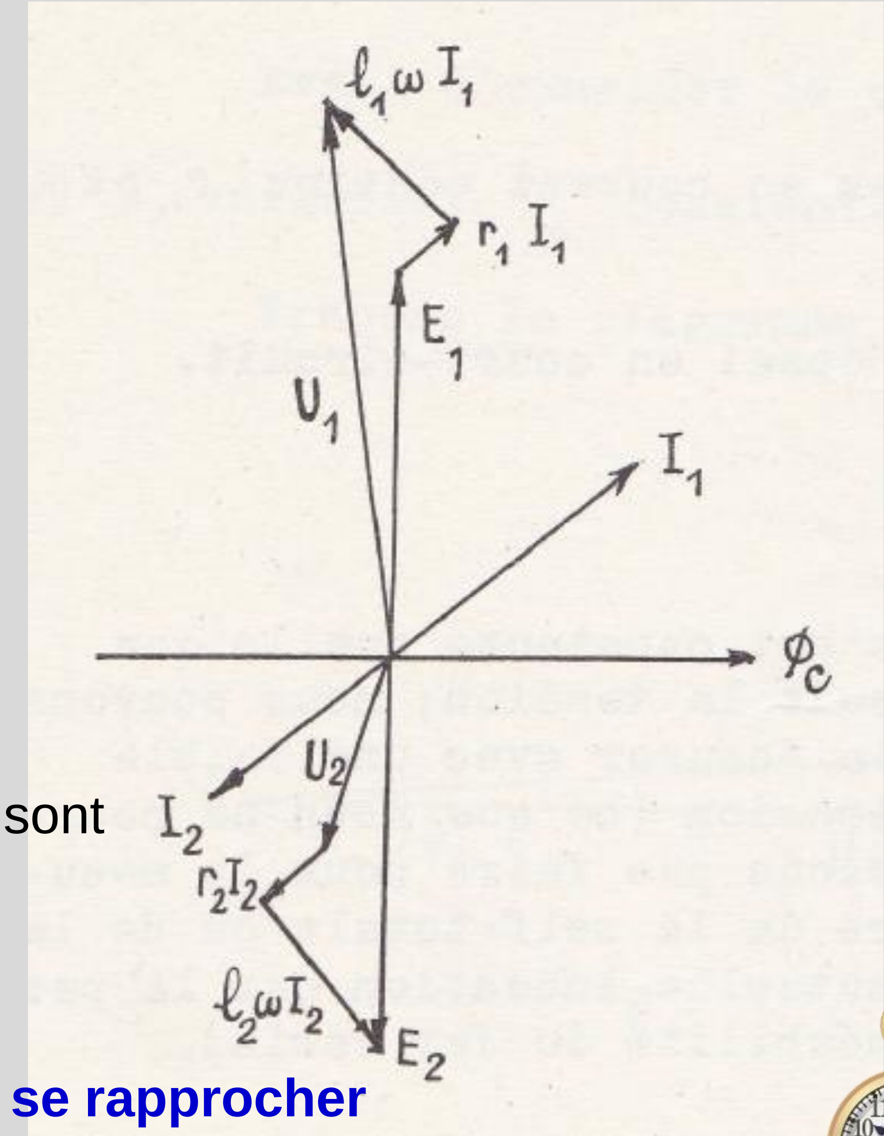
$\mathcal{U}1 = \mathcal{E}1 + R1\,\mathcal{I}1 + j\,L1\,\omega\,\mathcal{I}1$

$\mathcal{U}2 = \mathcal{E}2 - R2\,\mathcal{I}2 - j\,L2\,\omega\,\mathcal{I}2$

$\mathcal{E}1 = n1\, j\omega\, \varphi_c$

$\mathcal{E}2 = -\, n2\, j\omega\, \varphi_c$

$\varphi_c$ **= flux commun**




Les amplitudes complexes sont
notées sur le schéma
par des lettres droites

- **⇨ guide facilement les efforts à faire pour se rapprocher du transformateur idéal**

# Vecteurs tournants

- **Application**
- **Modulation**

$$s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$$

**est un signal porteur d'information mais pauvre (dès lors qu'on sait qu'il est périodique…) - Information = il existe**

$$s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$$

**Information à transmettre en :**

**proportionnalité à l'amplitude de l'information :**

| | |
|---|---|
| **Modulation d'amplitude (MdA ou AM)** | **excursion d'amplitude** |
| **Modulation de fréquence (MdF ou FM)** | **excursion de fréquence** |
| **Modulation de phase (MdΦ)** | **excursion de phase** |

# La modulation

$$s(t) = S \cos(\omega_p t + \varphi)$$

**Signal modulé ou porteur**

**Signal modulant (= information à transmettre) :**

**Ensemble de signaux de la forme $u(t) = U \cos(\Omega t + \Phi)$**

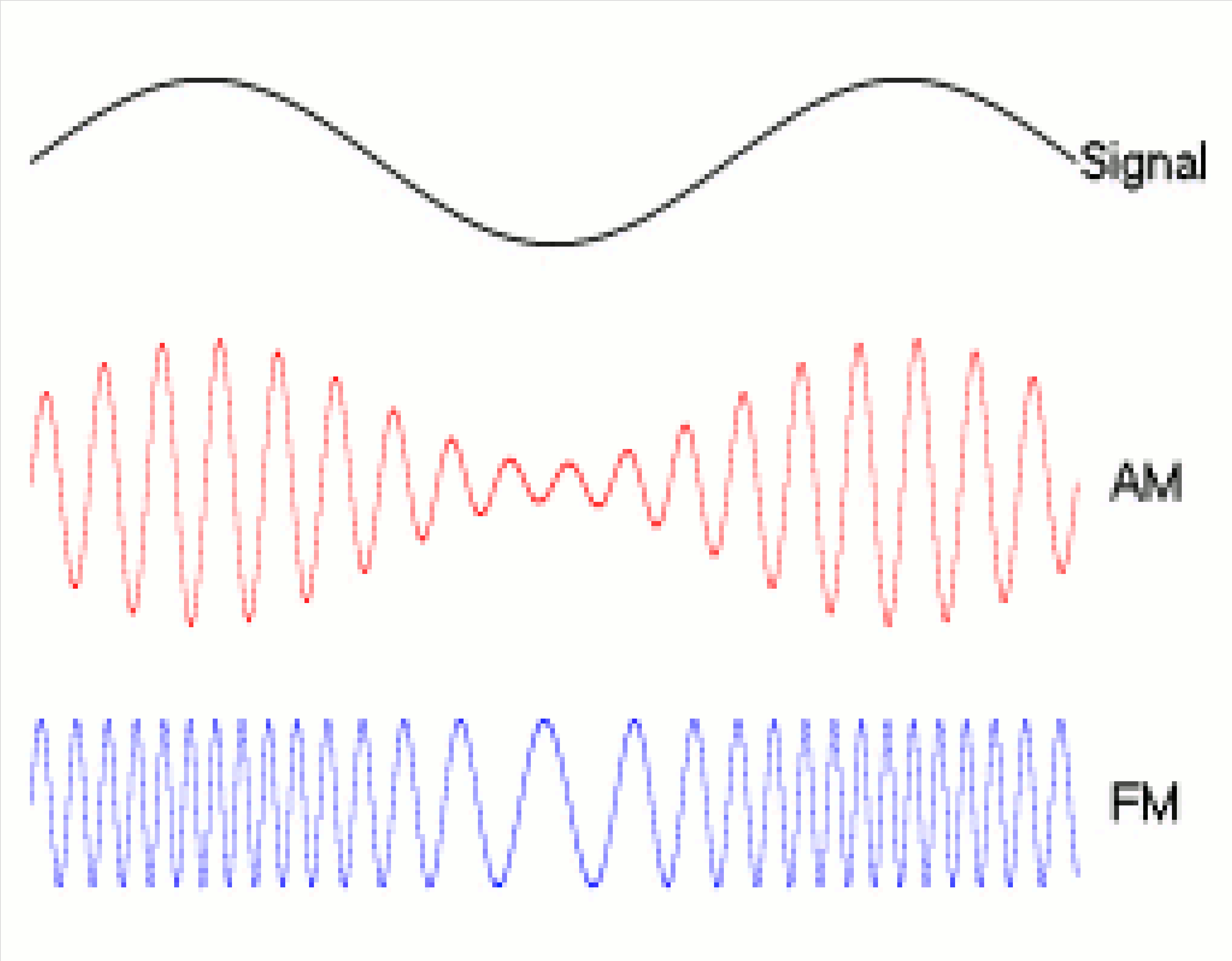
| | | | |
|---|---|---|---|
| **Modulation d'amplitude** | **(MdA ou AM)** | **excursion de S** | **prop.$^{lle}$ à U** |
| **Modulation de fréquence** | **(MdF ou FM)** | **excursion de $\omega$** | **prop.$^{lle}$ à U** |
| **Modulation de phase** | **(Md$\Phi$ ou PM)** | **excursion de $\varphi$** | **prop.$^{lle}$ à U** |

**Pourquoi signal « porteur » ?**

**$\Omega$ = basse fréquence (ex. fréquences audio)**

**$\omega_p$ doit être > $\Omega$ (voir spectres) ⇨ ça tombe bien : plus facile de rayonner à haute fréquence (dimensions antennes ~$\lambda$)**

# La modulation




**Signal modulant (Information à transmettre)**

**Signal porteur modulé en amplitude**

**Signal porteur modulé angulairement (en fréquence ou en phase)**

# La modulation d'amplitude

Signal porteur : $s(t) = S \cos (\omega_p t + \varphi)$

Signal modulant ( = information à transmettre) : $u(t) = U \cos \Omega t$

(phase à l'origine nulle par un choix convenable de l'origine des temps)

Signal modulé = $(S + U \cos \Omega t) \cos (\omega_p t + \varphi)$

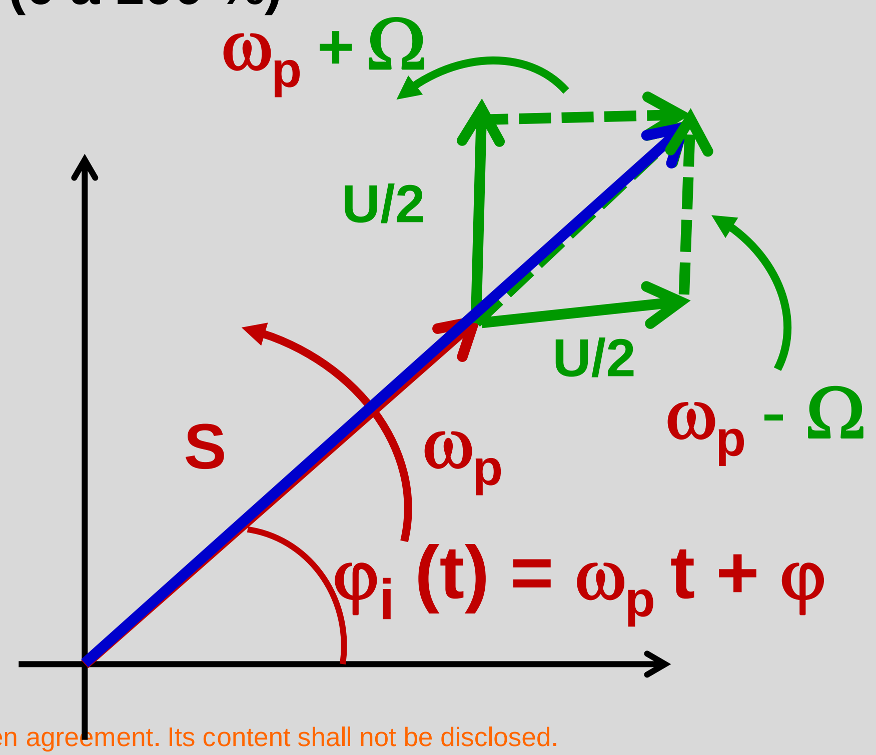
$S (1 + U/S \cos \Omega t) \cos (\omega_p t + \varphi)$

Indice de modulation : m = U/S (0 à 100 %)

$= S \cos (\omega_p t + \varphi)$

$+ U/2 \cos [(\omega_p + \Omega) t + \varphi]$

$+ U/2 \cos [(\omega_p - \Omega) t + \varphi]$




Si S = 1 (arbitrairement) et m = 1

Signal modulé = $\cos (\omega_p t + \varphi)$

$+ 1/2 \cos [(\omega_p + \Omega) t + \varphi]$

$+ 1/2 \cos [(\omega_p - \Omega) t + \varphi]$

# La modulation angulaire

- **Le signal $S \cos \varphi_i(t)$ n'est pas en général (co)sinusoïdal**
  - ⇨**Fresnel ?**

# La modulation angulaire

- Le signal $S \cos \varphi_i\,(t)$ n’est pas en général (co)sinusoïdal

  ⇨Fresnel ?

- Exploitation possible du vecteur de Fresnel !

## La modulation angulaire

- Le signal $S \cos \varphi_i (t)$ n'est pas en général (co)sinusoïdal

  ⇨Fresnel ?

- Exploitation possible du vecteur de Fresnel !
- $\varphi_i (t)$ variable ⇨ sa dérivée est non nulle : $\omega_i (t) = d\, \varphi_i (t) / dt$

  = pulsation instantanée (notion délicate) [*]

[*] la fréquence (la pulsation) est un paramètre par définition non localisé dans le temps

# La modulation angulaire

- **Le signal S cos $\varphi_i$ (t) n'est pas en général (co)sinusoïdal**

  **⇨Fresnel ?**

- **Exploitation possible du vecteur de Fresnel !**

- **$\varphi_i$ (t) variable ⇨ sa dérivée est non nulle : $\omega_i (t) = d\, \varphi_i (t) / dt$**

  **= pulsation instantanée**

**N'a d'intérêt que si $\varphi_i (t) = \omega_0 t + \varphi (t)$**

**où $\varphi$ (t) varie *lentement* par rapport à $\omega_0 t$**

# La modulation angulaire

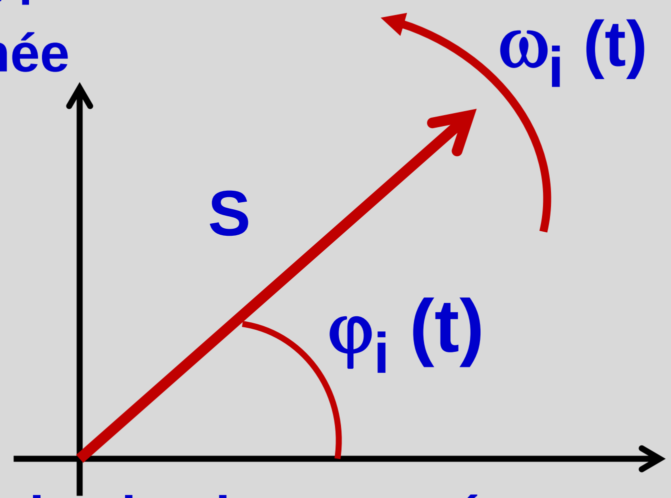
- **Le signal $S \cos \varphi_i$ (t) n'est pas en général (co)sinusoïdal**

  **⇨Fresnel ?**

- **Exploitation possible du vecteur de Fresnel !**

- **$\varphi_i$ (t) variable ⇨ sa dérivée est non nulle : $\omega_i (t) = d\, \varphi_i (t) / dt$**

  **= pulsation instantanée**




**N'a d'intérêt que si $\varphi_i (t) = \omega_0 t + \varphi (t)$**

**où $\varphi$ (t) varie *lentement* par rapport à $\omega_0 t$**

**Alors, pendant des durées brèves**

$$s(t) = S \cos (\omega_0 t + \varphi (t))$$

**ressemble à un signal sinusoïdal ordinaire, de pulsation instantanée**

$$\omega_i (t) = \omega_0 t + d\, \varphi (t) / dt$$

**Le vecteur de Fresnel tourne à la vitesse $\omega_0$ affectée de fluctuations « lentes »**

**La pulsation instantanée (notion délicate) se justifie par la vitesse instantanée du vecteur de Fresnel**

## La modulation angulaire

**Signal modulant**
$u(t) = U \cos \Omega t$

- $\omega_i (t) = d\, \varphi_i (t) / dt$ = pulsation instantanée

  Intérêt si $\varphi_i (t) = \omega_0 t + \varphi (t)$ où $\varphi (t)$ varie *lentement* par rapport à $\omega_0 t$

- **Modulation de phase**

$$\varphi_i (t) = \omega_0 t + \Delta\varphi \cos \Omega t \; (+ \varphi_0) \qquad \Delta\varphi = k\, U$$

$$\omega_i (t) = \omega_0 - \Omega\, \Delta\varphi \sin \Omega t$$

Excursion de phase

- **Modulation de fréquence**

$$\omega_i (t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t \qquad \Delta\omega = k\, U$$

Excursion de fréquence (de pulsation)

$$\varphi_i (t) = \int_0^t \omega_i (t)\, dt = \omega_0 t + (\Delta\omega / \Omega) \sin \Omega t + \varphi_0$$

Et non : $\omega_0 t + \Delta\omega\, t \cos \Omega t$ !

- Si signal modulant monoraie (= monochromatique), rien ne distingue une MdΦ d'une MdF si l'on ne précise pas que, respectivement, $\Delta\varphi$ ou $\Delta\omega \sim U$ et ne dépend pas de la fréquence modulante

45

## La modulation angulaire

- $\omega_0$ sera dorénavant $\omega_p$ (porteuse)

- **Modulation de fréquence**

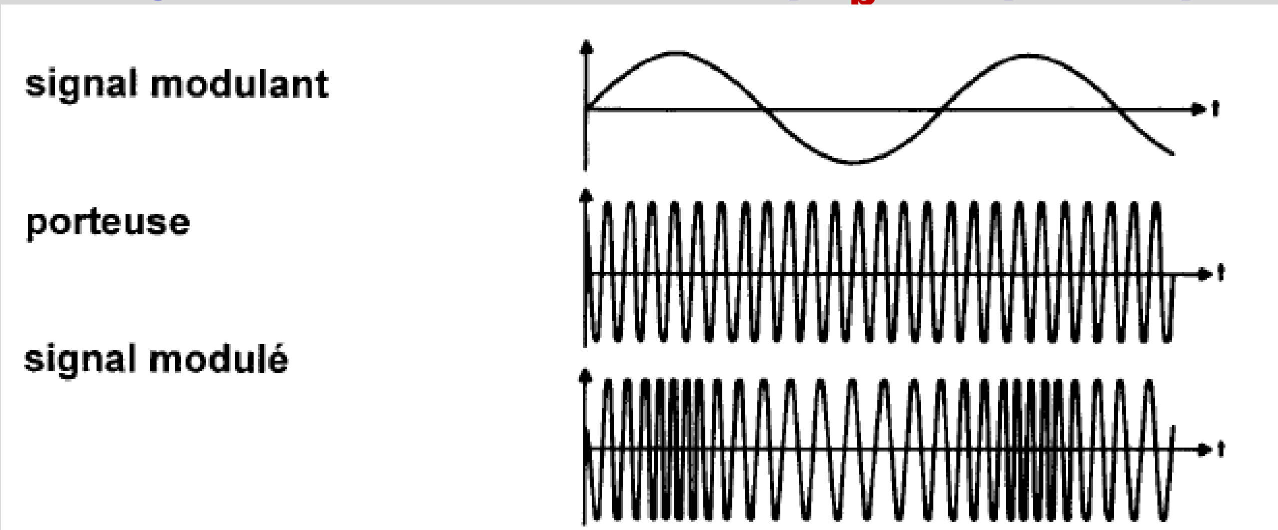
$\Delta\omega$ = excursion de fréquence (de pulsation)

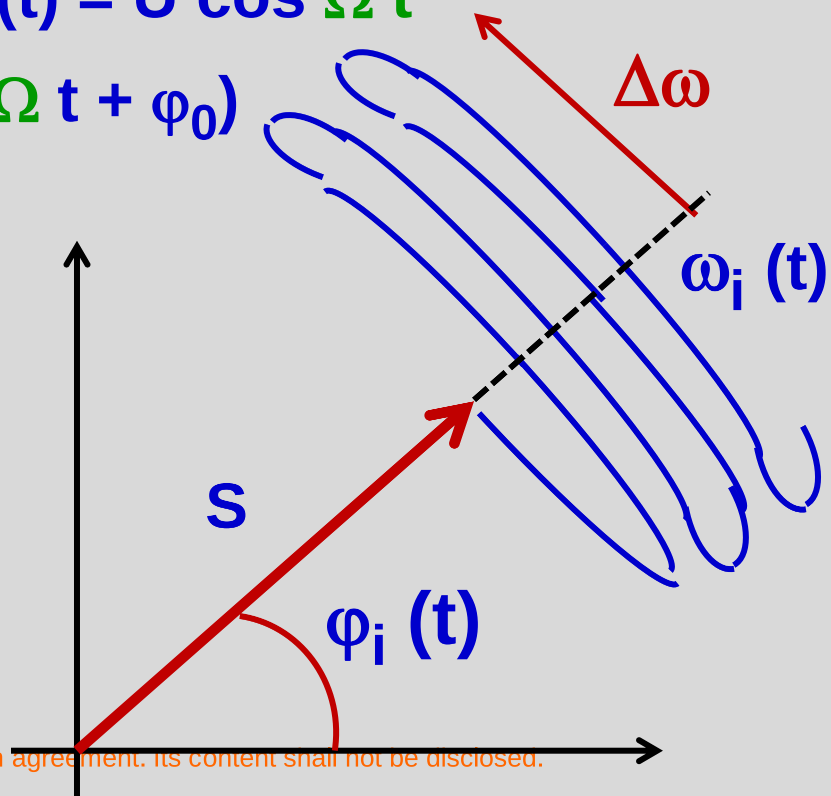
$$\omega_i(t) = \omega_p + \Delta\omega \cos \Omega t \qquad \Delta\omega = k\,U$$

Signal porteur : $s(t) = S \cos(\omega_p t + \varphi(t))$

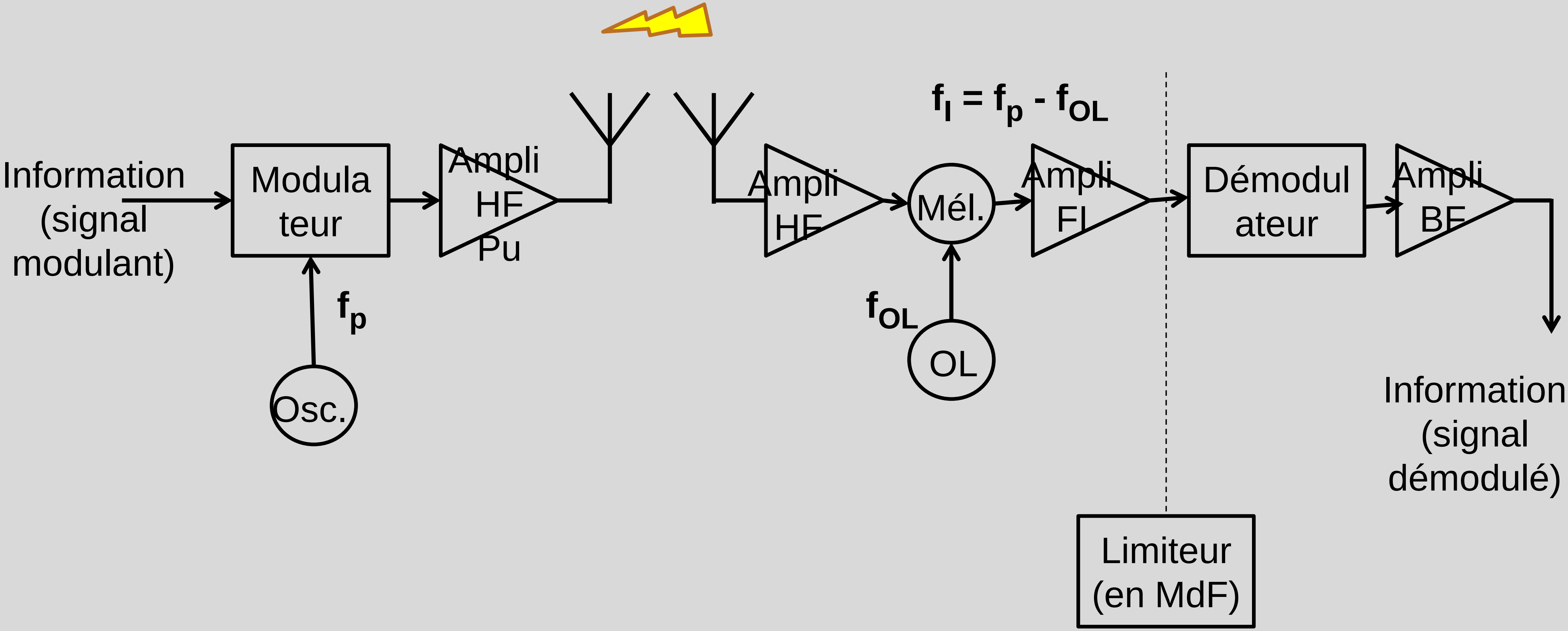
Signal modulant ( = information à transmettre) : $u(t) = U \cos \Omega t$

Signal modulé = $S \cos(\omega_p t + (\Delta\omega/\Omega) \sin \Omega t + \varphi_0)$



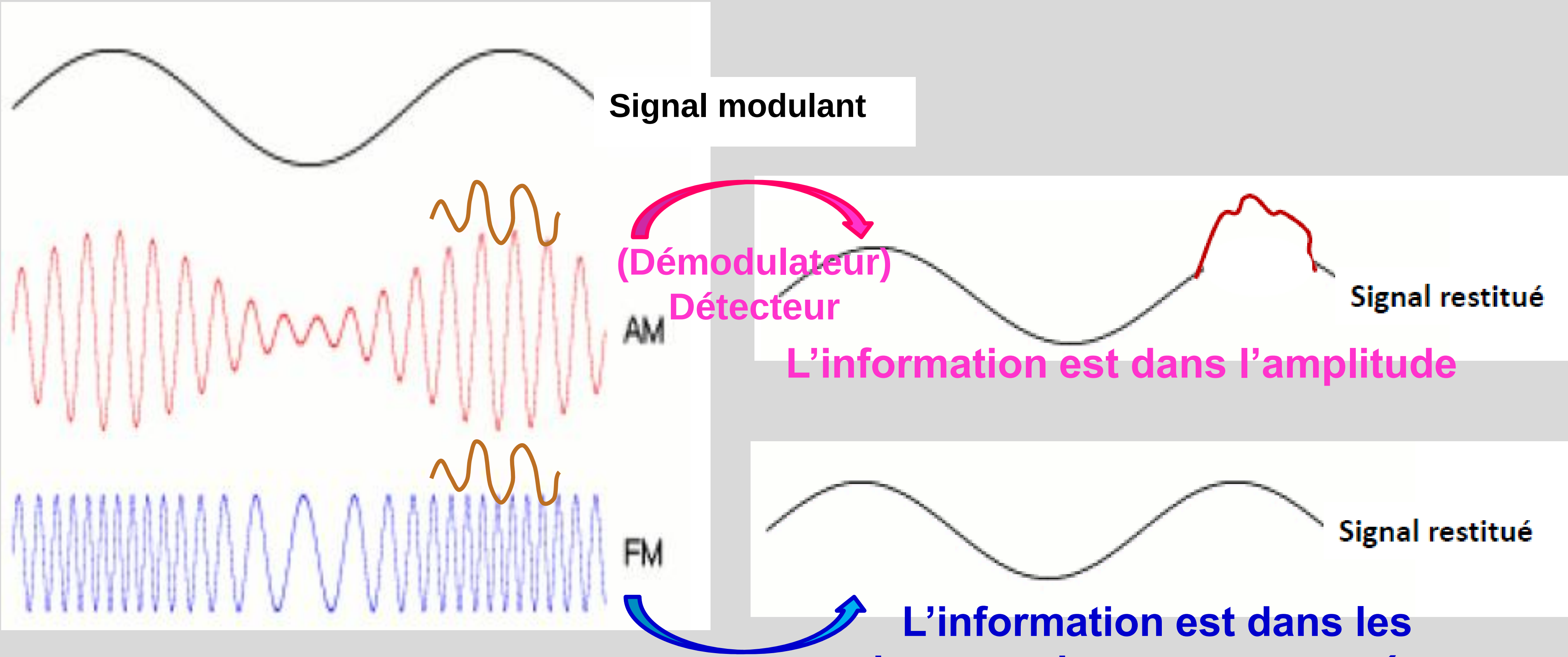

$m = \Delta\omega/\Omega$ = indice de modulation




Modulateur, mélangeur et démodulateur sont des dispositifs non-linéaires, mais les relations entrée-sortie sont linéaires

# La modulation : comparaison des qualités de transmission

- **Aspects intuitifs**
  - **Vision temporelle (« signal »)**




**L'information est dans l'amplitude**

**L'information est dans les instants de passage par zéro**

**(Démodulateur)**
**Discriminateur**

# La modulation : comparaison des qualités de transmission

- **Aspects intuitifs (moins ?)**
  - **Vision spectrale**
    - ***Plus un signal (sa densité spectrale énergétique) occupe la bande, moins un brouilleur (supposé à bande limitée) sera nuisible (cf.* Spread spectrum systems*)***
    - **MdA (m = 1)** **MdF**

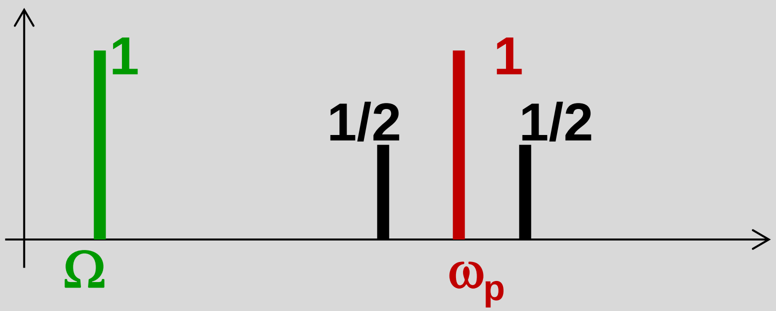
**Signal modulé**

$$s(t) = \begin{cases} \cos(\omega_p t + \varphi) \\ + 1/2 \cos[(\omega_p + \Omega)\, t + \varphi] \\ + 1/2 \cos[(\omega_p - \Omega)\, t + \varphi] \end{cases}$$

**somme ∞ de fctns de Bessel**

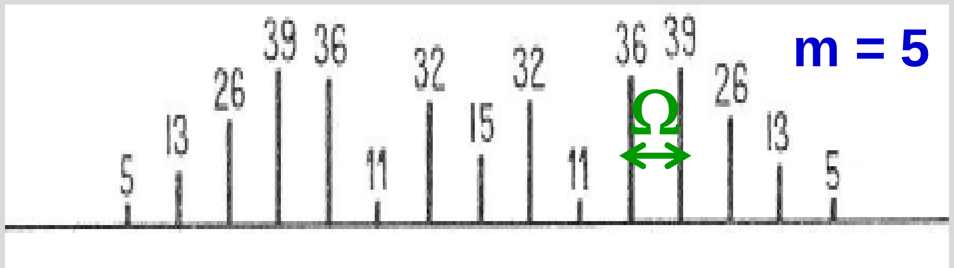
$$s(t) = S. \begin{cases} J0(m) \cos \omega_p t + J1(m) [\cos(\omega_p - \Omega)t - \cos(\omega_p + \Omega)t] \\ + J2(m) [\cos(\omega_p - 2\Omega)t + \cos(\omega_p + 2\Omega)t] \\ + J3(m) [\cos(\omega_p - 3\Omega)t - \cos(\omega_p + 3\Omega)t] \\ + \ldots \end{cases}$$

**Spectre**




$\omega_p - \Omega$ $\omega_p + \Omega$

**largeur de bande**



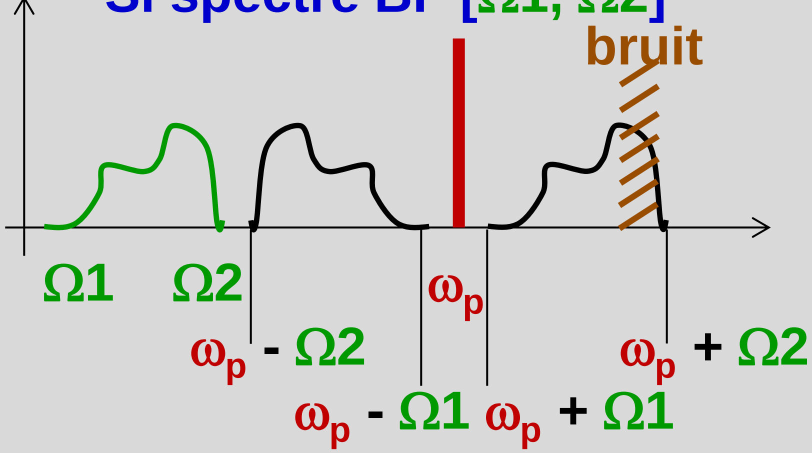

**largeur de bande infinie**

**et pas 2 $\Delta\omega$ ! sauf si $\Omega$ très petit**

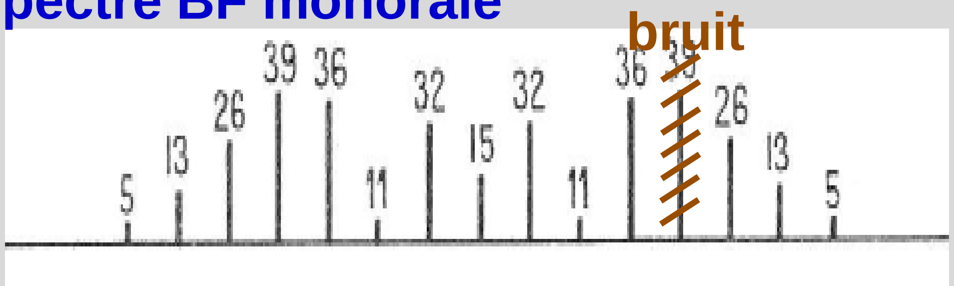
# La modulation : comparaison des qualités de transmission

- **Aspects intuitifs (moins ?)**
  - **Vision spectrale**
    - ***Plus un signal (sa densité spectrale énergétique) occupe la bande, moins un brouilleur (supposé à bande limitée) sera nuisible***
    - **MdA** — **MdF**

**Si spectre BF [$\Omega 1$, $\Omega 2$]**




**spectre BF monoraie**




- **Largeur de bande** — **infinie (et pas $2\,\Delta\omega$ !)**

**$B = [\omega_p + \Omega_{max}, \omega_p - \Omega_{max}] = 2\,\Omega_{max}$**

**B pratique : 98% de puiss. totale (Carson, 1922, AT&T)**

**$\sim 2\,(m + 1)\,\Omega_{max} = 2\,(\Delta\omega + \Omega_{max})$**

- **On voit pourquoi $\omega_p > \Omega$**

***indices faibles = B MdF = B MdA***

# La modulation : comparaison des qualités de transmission

- Aspects beaucoup moins intuitifs
  - Vision « calculatoire »
    - Au prix de ~4 pages de calculs (et quelques prérequis), on montre que le rapport signal sur bruit en MdF est amélioré d'un rapport 3 $m^2$ par rapport à la MdA d'indice 100%
    - D'où l'intérêt d'indices de modulation $\Delta\omega/\Omega$ élevés (donc $\Delta\omega$ élevées)

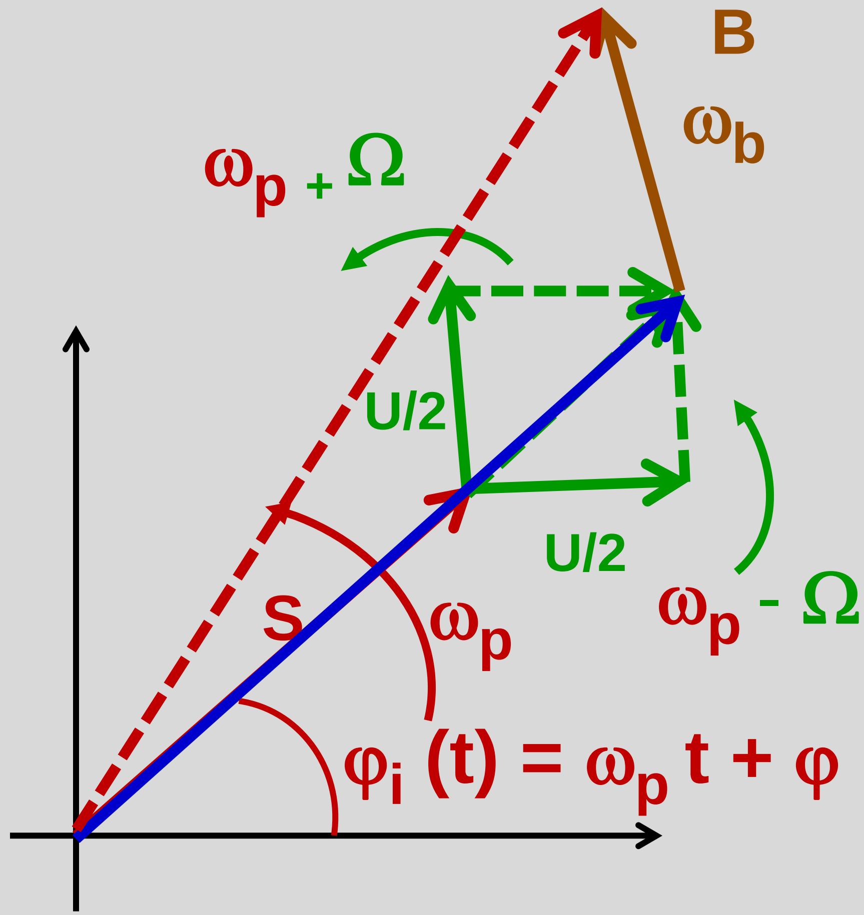
      ⇨pb pour les hautes fréquences de modulation

      ⇨ préaccentuation des aiguës

# Et Fresnel dans tout ça ?

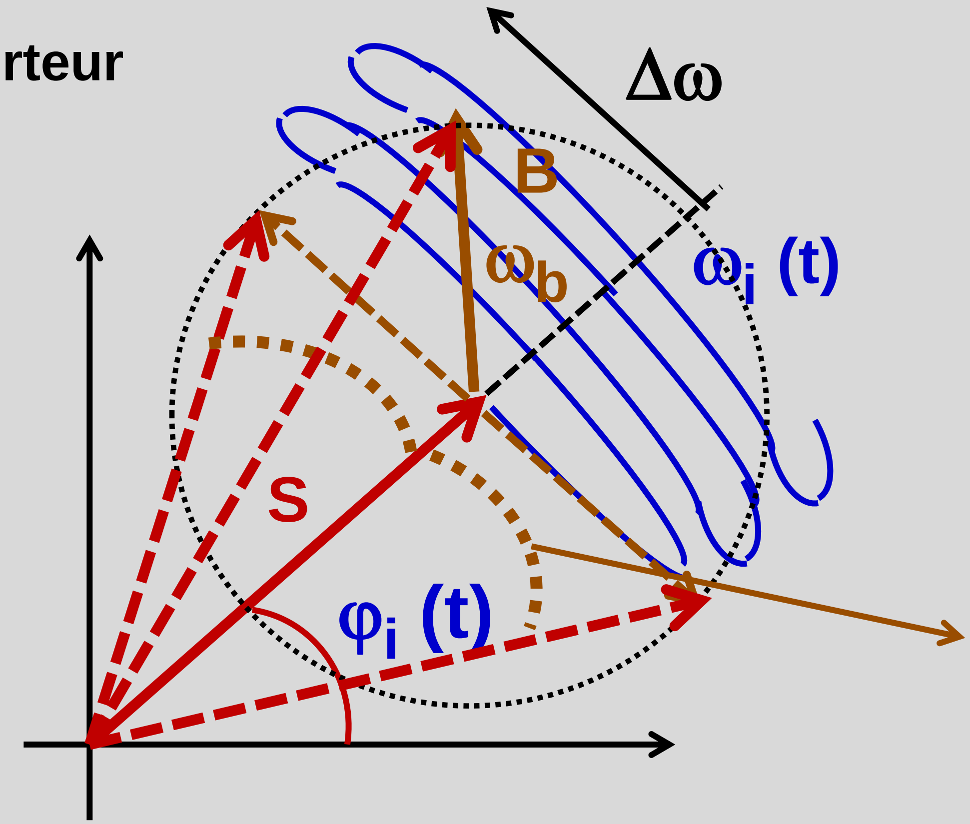
# La modulation : comparaison des qualités de transmission

- Emploi des vecteurs de Fresnel
  - MdA



# La modulation : comparaison des qualités de transmission

- Emploi des vecteurs de Fresnel
  - MdF
  - bruit (HF) < signal porteur



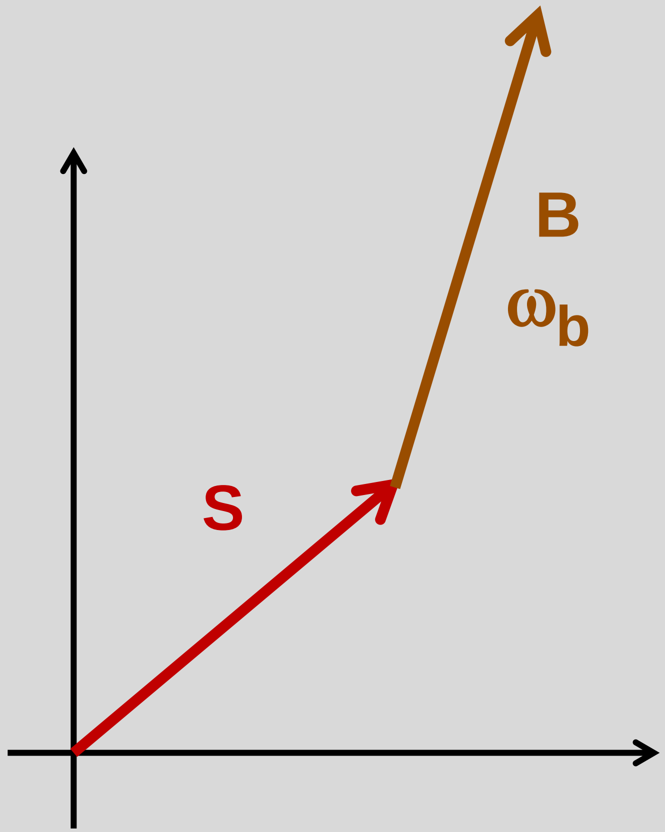

modulation de phase par le bruit (négligeable par rapport à l'excursion de phase utile)

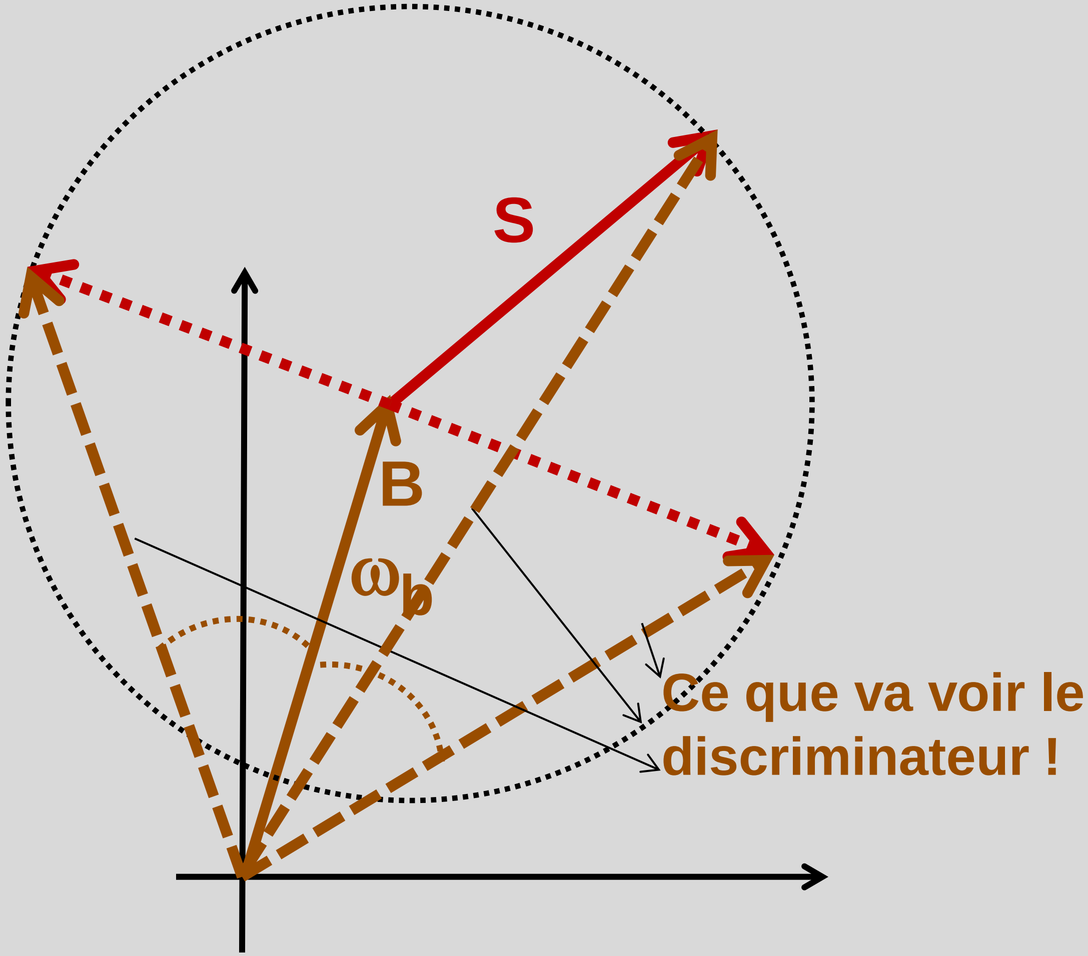
$$\varphi_i\,(t) = \int_0^t \omega_i\,(t)\,dt = \omega_p\, t + (\Delta\omega / \,\Omega\,)\,\sin \Omega\, t + \varphi_0$$

**Si m = 5, excursion de phase utile (informative) $\Delta\omega / \,\Omega$ = 5 radians**

# La modulation : comparaison des qualités de transmission

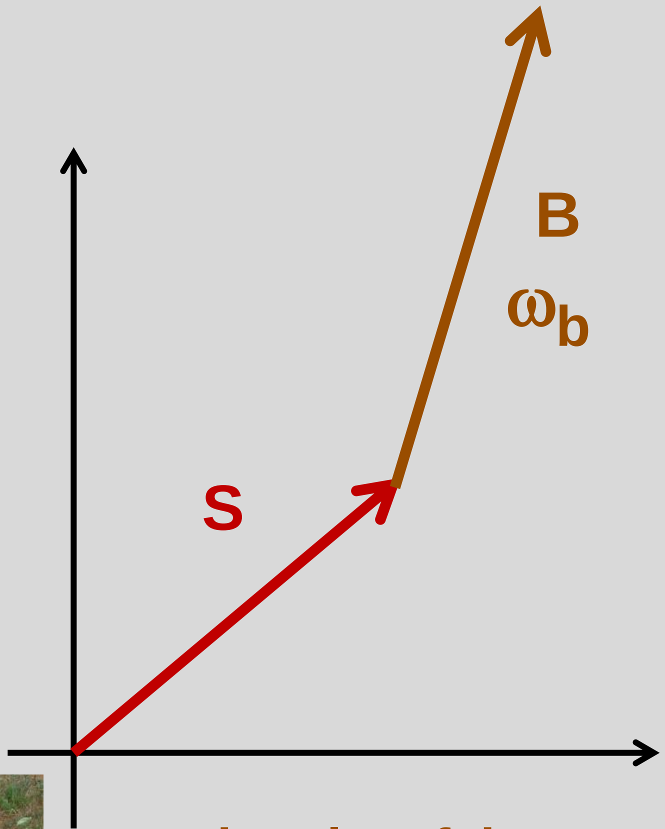
- **Emploi des vecteurs de Fresnel**
  - **MdF**
  - **bruit (HF) ~ ou > signal porteur**

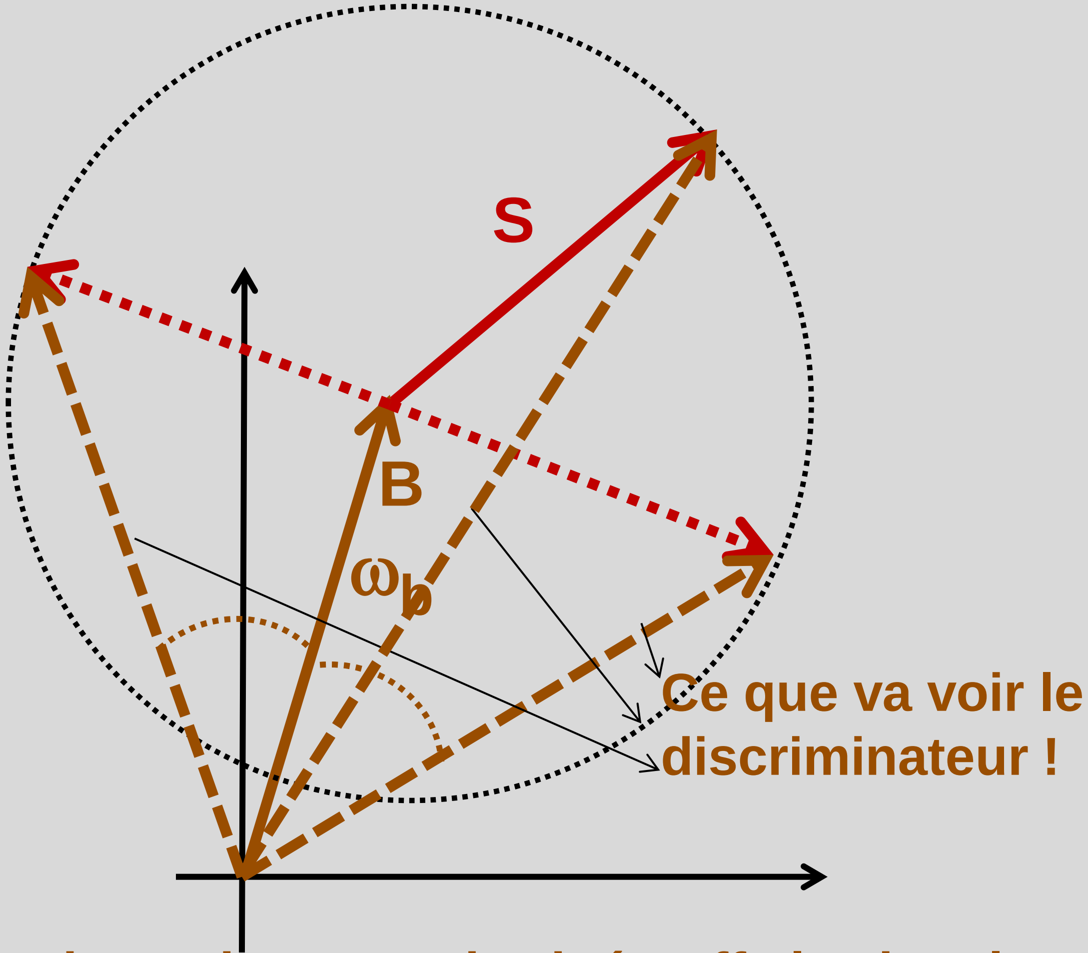


# La modulation : comparaison des qualités de transmission

- Emploi des vecteurs de Fresnel
  - MdF
  - bruit (HF) ~ ou > signal porteur



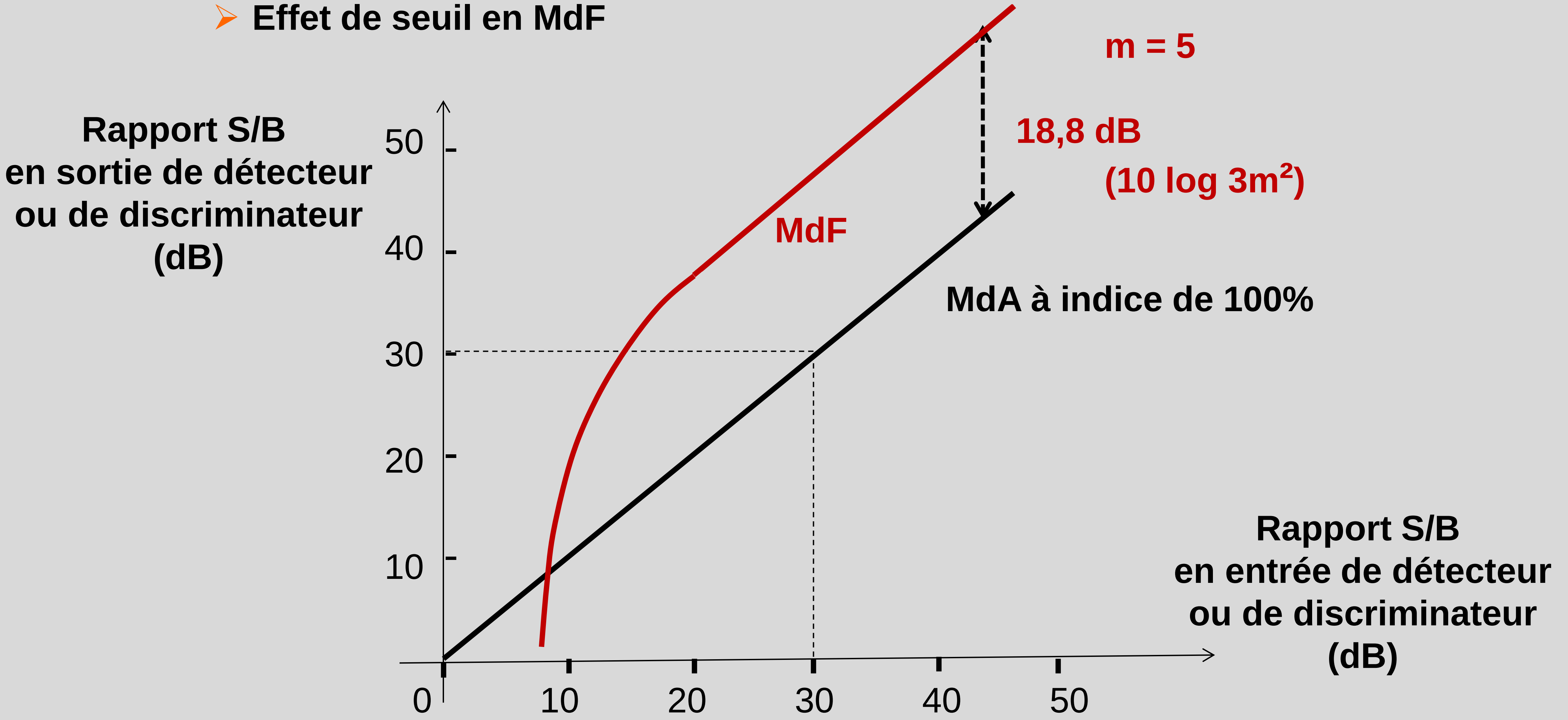




- Le signal ne fait que moduler le bruit en phase ! Le bruit étouffe le signal
- Les 2 modes se succèdent pratiquement sans transition (effet de « seuil »)

☞C'EST LE PLUS FORT QUI ÉTOUFFE L'AUTRE

# La modulation : comparaison des qualités de transmission

- **Retour au « calculatoire » (sans lequel on ne va pas loin)**
  - **Effet de seuil en MdF**




- **Les 2 modes se succèdent pratiquement sans transition (effet de « seuil »)**

## Vecteurs tournants de Fresnel

- Plus simples que les complexes !
- Donnent lieu à de belles (dé)monstrations
- Peu précis mais quantitatifs

## Spectre d'une onde modulée en fréquence

$$s(t) = S \cos\left(\omega_p t + (\Delta\omega/\Omega) \sin \Omega t + \varphi_0\right) \qquad m = \Delta\omega/\Omega$$

si $\varphi_0 = 0$ :

$$s(t) = S \left[ \cos \omega_p t \,.\, \cos(m \sin \Omega t) - \sin \omega_p t \,.\, \sin(m \sin \Omega t) \right]$$

avec

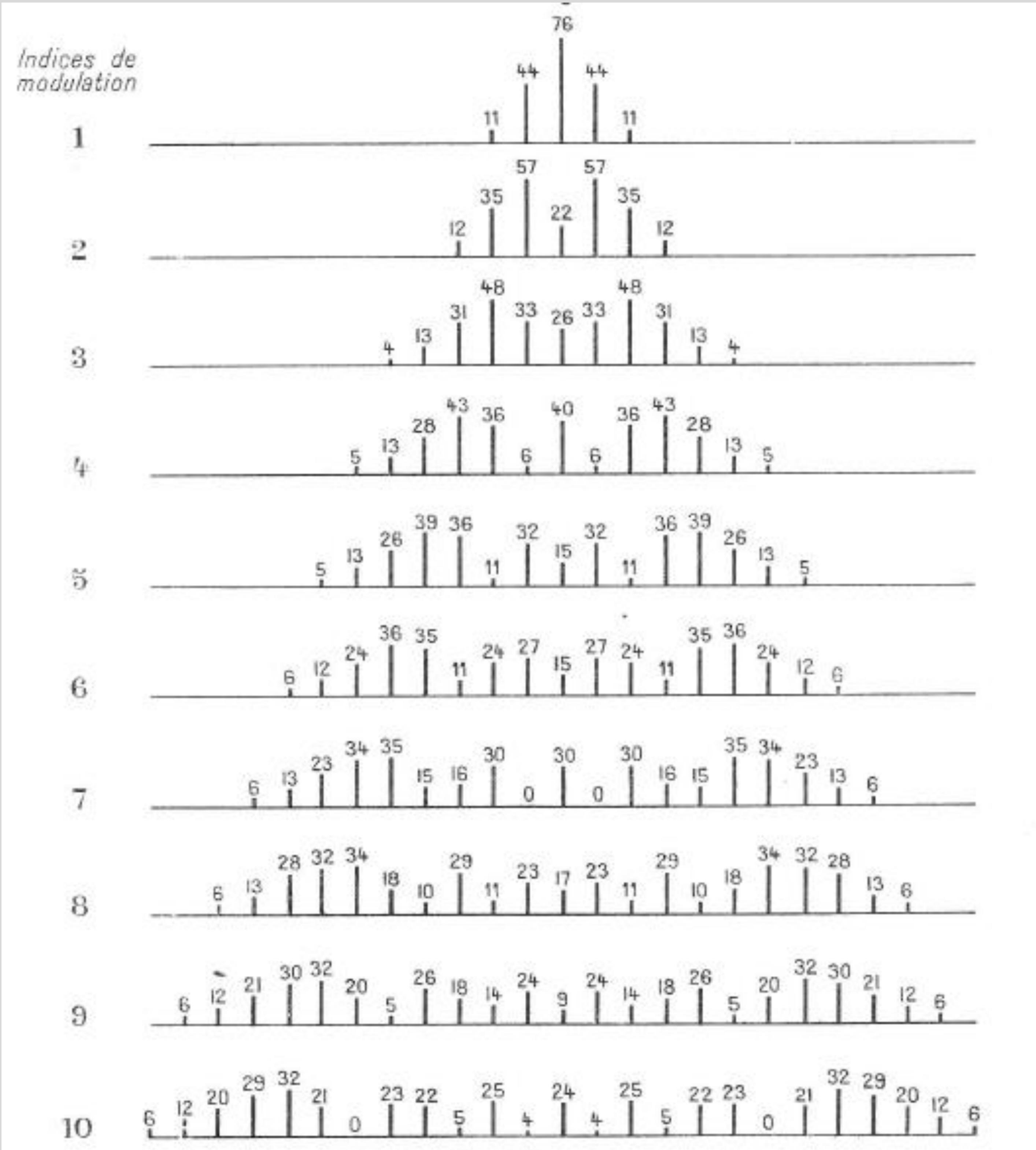
$$\cos(m \sin \Omega t) = J_0(m) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(m) \cos 2p\,\Omega t$$

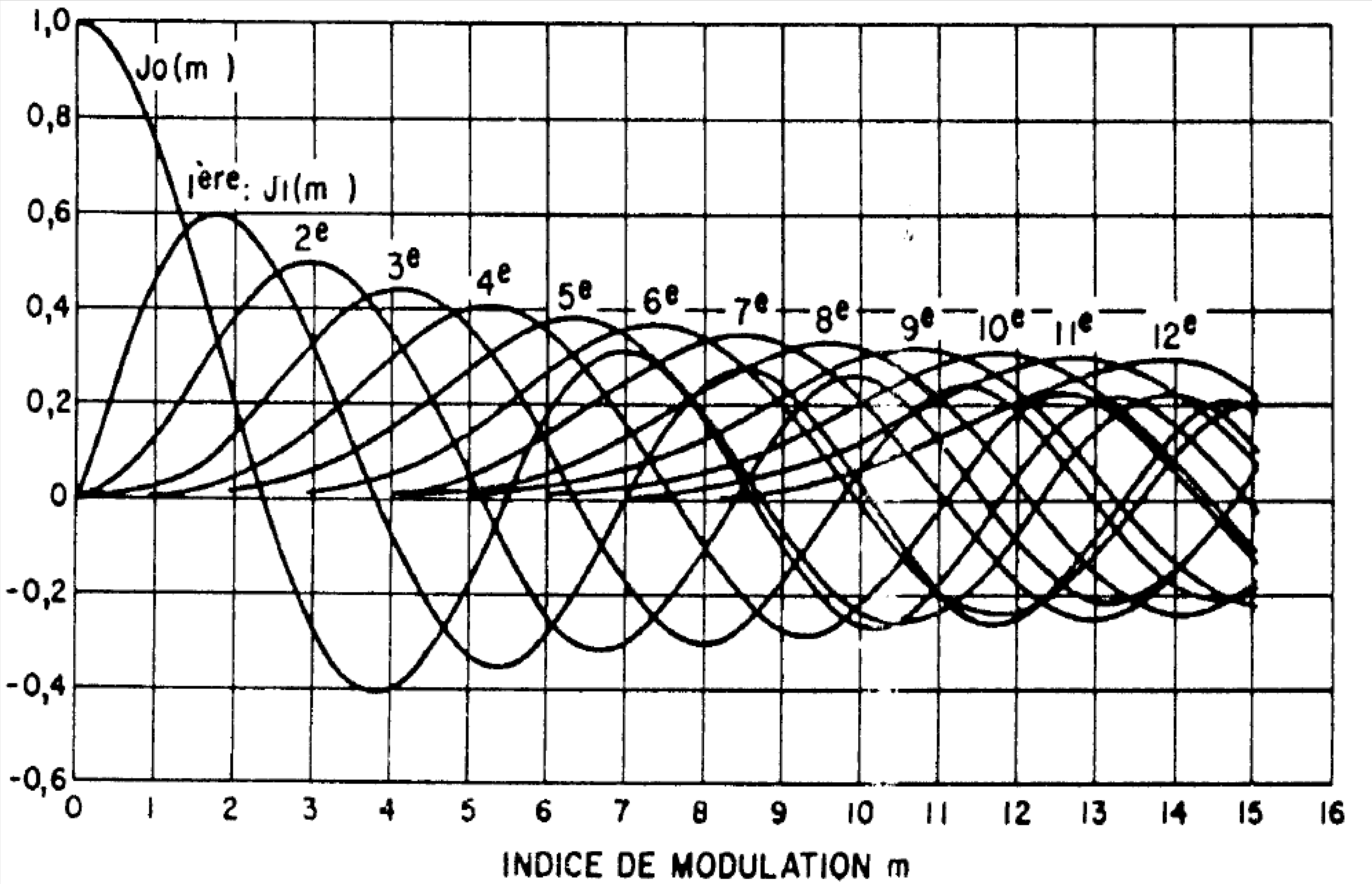
$$\sin(m \sin \Omega t) = 2 \sum_{p'=1}^{\infty} J_{2p'-1}(m) \sin(2p'-1)\,\Omega t$$

$$s(t) = S. \left\{ \begin{array}{l} J0(m) \cos \omega_p t + J1(m) [\cos(\omega_p - \Omega)t - \cos(\omega_p + \Omega)t] \\ + J2(m) [\cos(\omega_p - 2\Omega)t + \cos(\omega_p + 2\Omega)t] \\ + J3(m) [\cos(\omega_p - 3\Omega)t - \cos(\omega_p + 3\Omega)t] \\ + \ldots \end{array} \right.$$

La raie à la fréquence de la porteuse $S\, J_0(m) \cos(\omega_p t + \varphi_0)$ s'annule pour

m = 2,40 5,52 8,65 11,79 …


Indices de modulation
1 11 44 76 44 11
2 12 35 57 22 57 35 12
3 4 13 31 48 33 26 33 48 31 13 4
4 5 13 28 43 36 6 40 6 36 43 28 13 5
5 5 13 26 39 36 11 32 15 32 11 36 39 26 13 5
6 6 12 24 36 35 11 24 27 15 27 24 11 35 36 24 12 6
7 6 13 23 34 35 15 16 30 0 30 0 30 16 15 35 34 23 13 6
8 6 13 28 32 34 18 10 29 11 23 17 23 11 29 10 18 34 32 28 13 6
9 6 12 21 30 32 20 5 26 18 14 24 9 24 14 18 26 5 20 32 30 21 12 6
10 6 12 20 29 32 21 0 23 22 5 25 4 24 4 25 5 22 23 0 21 32 29 20 12 6


1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-0,6
Jo(m )
1ère: J1(m )
2e
3e
4e
5e
6e
7e
8e
9e
10e
11e
12e
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
INDICE DE MODULATION m

# Spectre d'une onde modulée en fréquence

***Si m petit***, J0 (m) = 1 et J1(m) = m/2, les autres raies sont négligeables

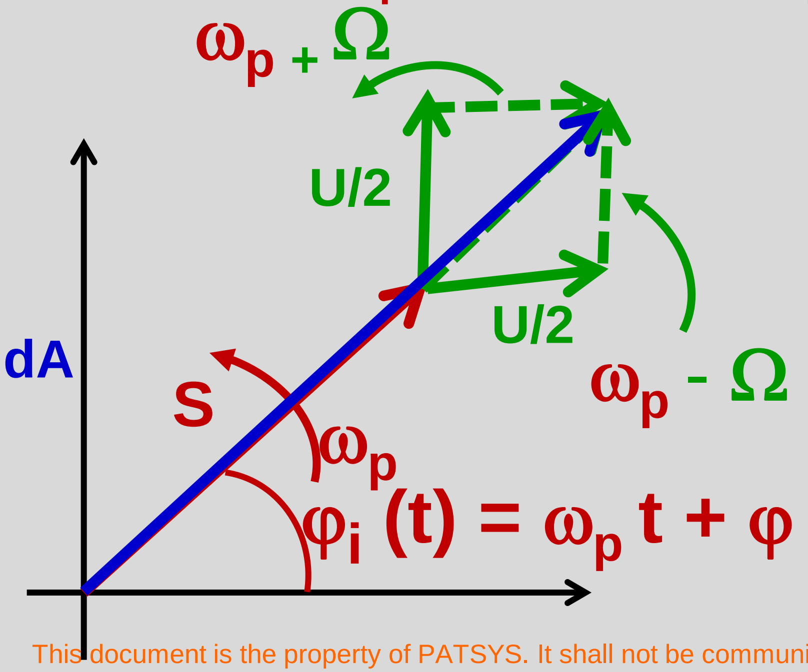
$$s(t) = S.\begin{cases} J0(m)\cos\omega_p t + J1(m)\,[\cos(\omega_p - \Omega)t - \cos(\omega_p + \Omega)t] \\ + J2(m)\,[\cos(\omega_p - 2\Omega)t + \cos(\omega_p + 2\Omega)t] \\ + J3(m)\,[\cos(\omega_p - 3\Omega)t - \cos(\omega_p + 3\Omega)t] + \ldots \end{cases}$$

$$s(t) = S\left\{\cos\omega_p t + m/2\,[\cos(\omega_p - \Omega)t - \cos(\omega_p + \Omega)t]\right\}$$

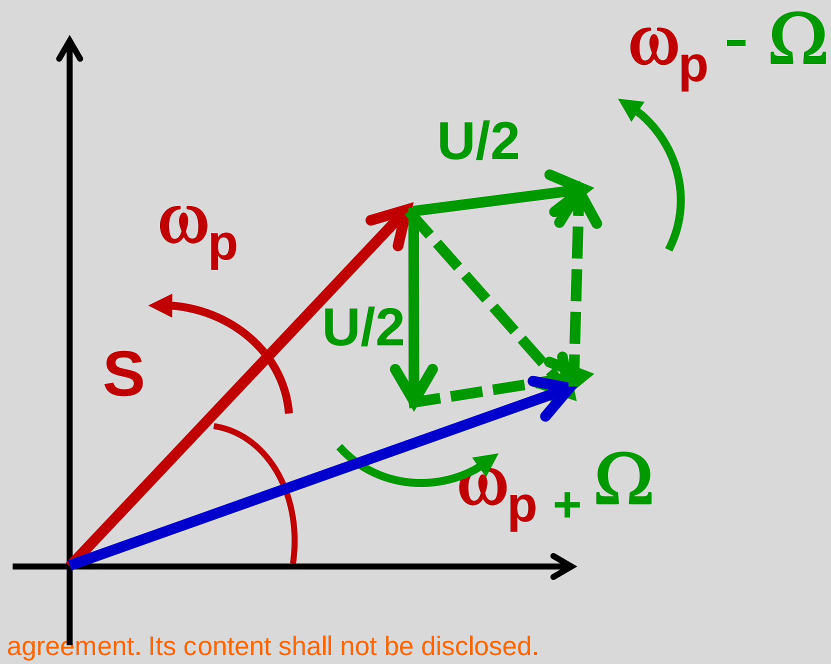
En MdA

$$s(t) = S\left\{\cos\omega_p t + m/2\,[\cos(\omega_p - \Omega)t + \cos(\omega_p + \Omega)t]\right\}$$

MdA




MdF
à faible indice




**Edwin Howard Armstrong**
**1890 - 1954**

**1ère réalisation d’une MdF par Armstrong en 1935, après la publication de brevets en 1933**

**Les travaux de Carson en 1922 étaient théoriques**

**John Renshaw Carson**
**1886 - 1940**

On trouve en pratique des émissions :

- à **faible excursion**, donc à spectre étroit : c'est le cas des émissions FM dans la bande CB ($\Delta f = \pm 1$ kHz, canal de 10 kHz de large ) et des applications particulières comme les micros HF etc ...

- à **excursion en fréquence moyenne** : radiodiffusion FM ($\Delta f = \pm 75$ kHz, canal de 300 kHz ), téléphone GSM ($\Delta f = \pm 68$ kHz, canal de 200 kHz)

- à **forte excursion** : c'est le cas des satellites de retransmission des émissions de TV travaillant dans la bande des 10 à 12 GHz qui travaillent en FM avec une excursion de ± 9 MHz, la largeur d'un canal étant d'une trentaine de MHz

*E (Monotype Corsiva) 28*

*E1*

*E2*

**jω** *U (Monotype Corsiva) 28*

*U1 U2*

*I (Pristina) 28*

*I1 I2*

*E*

*E1*

*E2*

*U1*

*U2*

*I1*

*I2*

**jω**