

# Ordinaires et extraordinaires équations différentielles

François Dubois\*

**Kafemath à “La Coulée douce”  
51 rue du Sahel, Paris douzième.**

**jeudi 28 janvier 2016**

---

\* président de l'association “Kafemath”

# Calcul infinitésimal



Gottfried Leibniz  
Nouvelle méthode  
pour les maxima et minima (1684)

$$\frac{df}{dt}$$



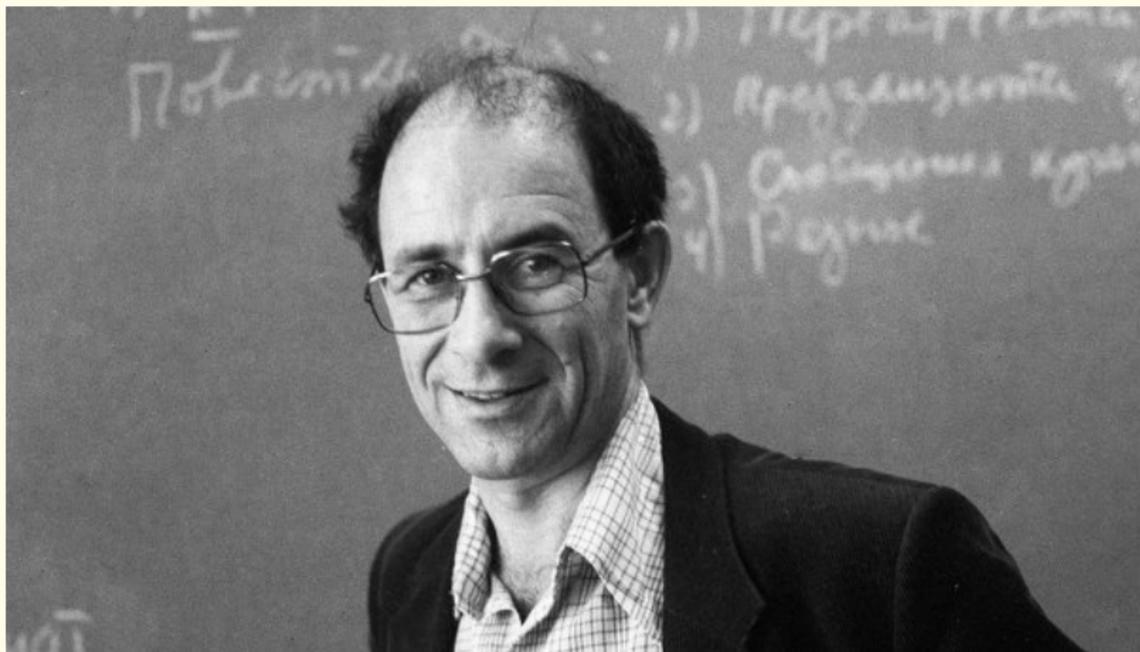
Isaac Newton  
Méthode des fluxions  
(1671, 1736)

$$\dot{f}(t)$$

# plan

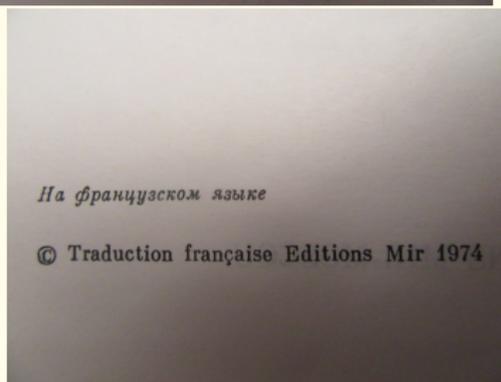
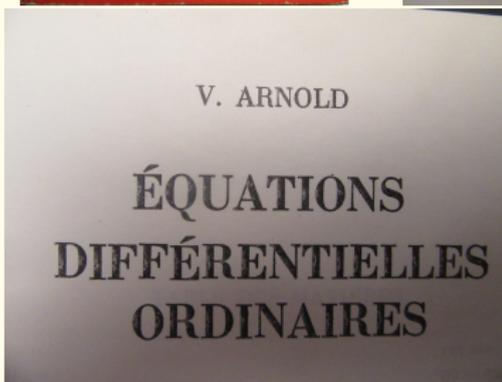
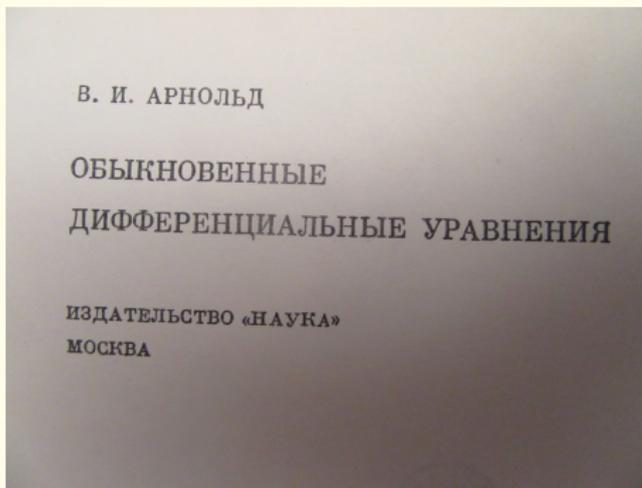
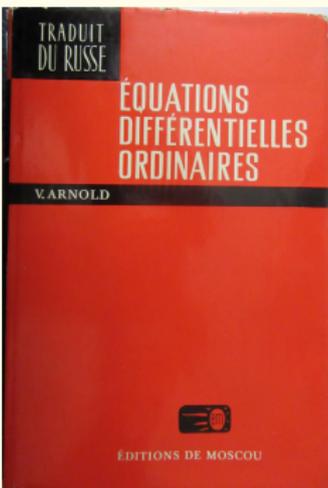
- Ordinaires...
- Le pendule
- Quelques calculs
- Proies et prédateurs
- Approximation numérique
- Chaos
- Conclusion ?

# Ordinaires...



Vladimir Arnold (1937 - 2010)

# Ordinares... (ii)



## Ordinaires... (iii)

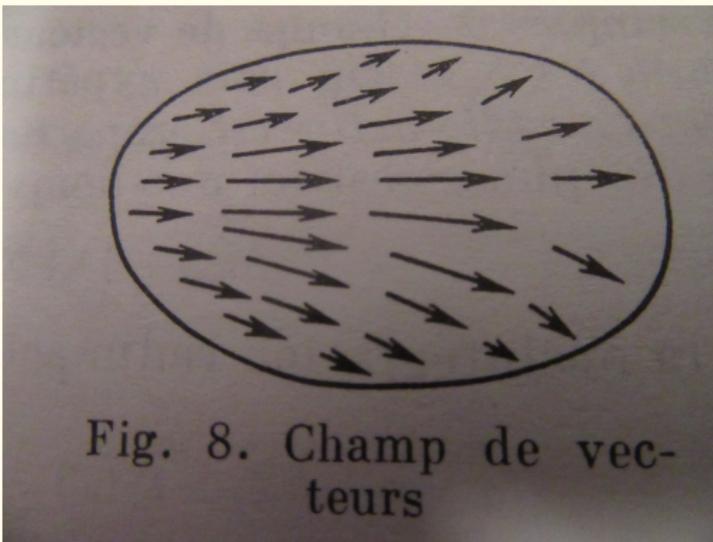
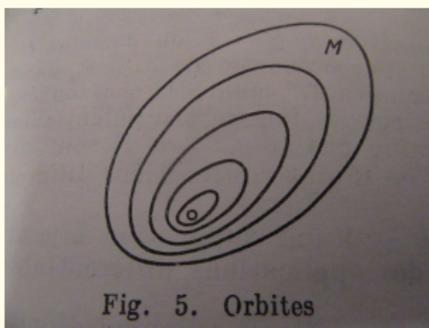


Fig. 8. Champ de vecteurs

équation d'évolution  $\frac{du}{dt} = f(u)$

La direction tangente est colinéaire au champ de vecteurs  $f$

## Ordinaires... (iv)



futur proche = fonction donnée de l'état où je suis

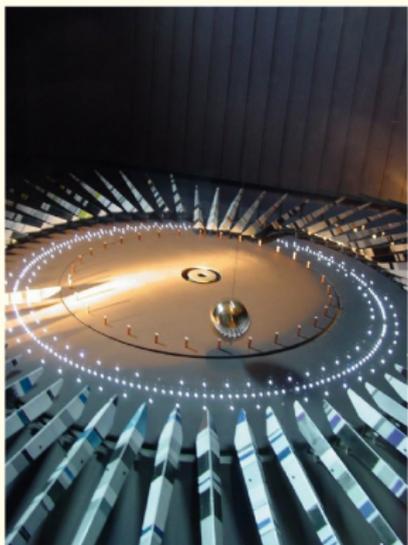
équation d'évolution  $\frac{du}{dt} = f(u)$

condition initiale  $u(t=0) = u_0$

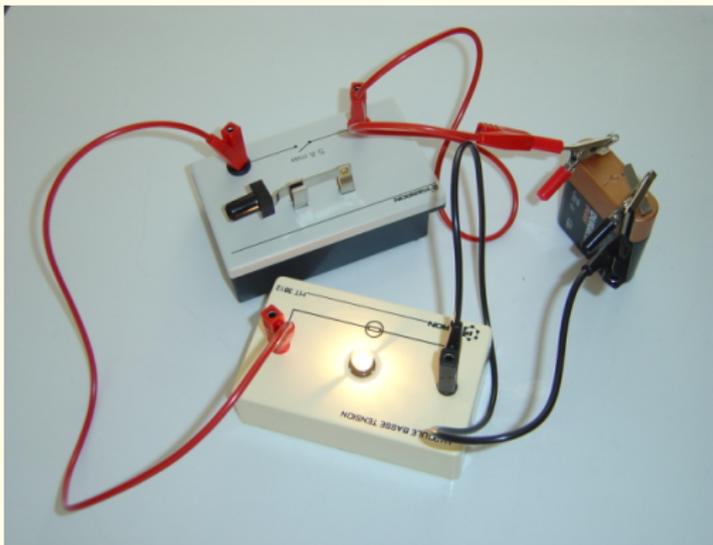
Alors  $u(t)$  est bien défini pour  $t > 0$  "raisonnable"  
 le point  $u(t)$  suit une trajectoire régulière  
 on peut en faire une approximation numérique  
 c'est à dire un calcul pratique

# Equations différentielles ordinaires

Exemple du pendule simple



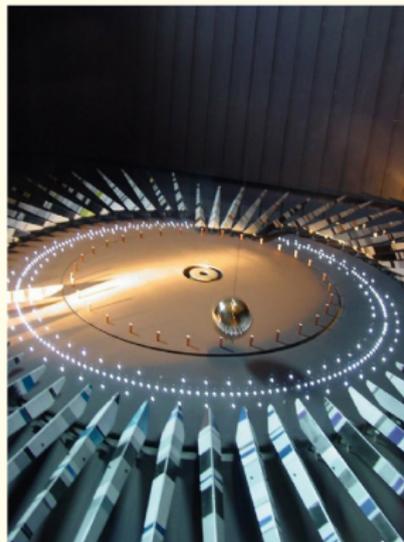
et du circuit électrique



Un seul modèle mathématique : oscillateur harmonique

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + k u = f(t)$$

# Le pendule simple



Modèle mathématique : oscillateur idéal

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k \sin u = f(t)$$

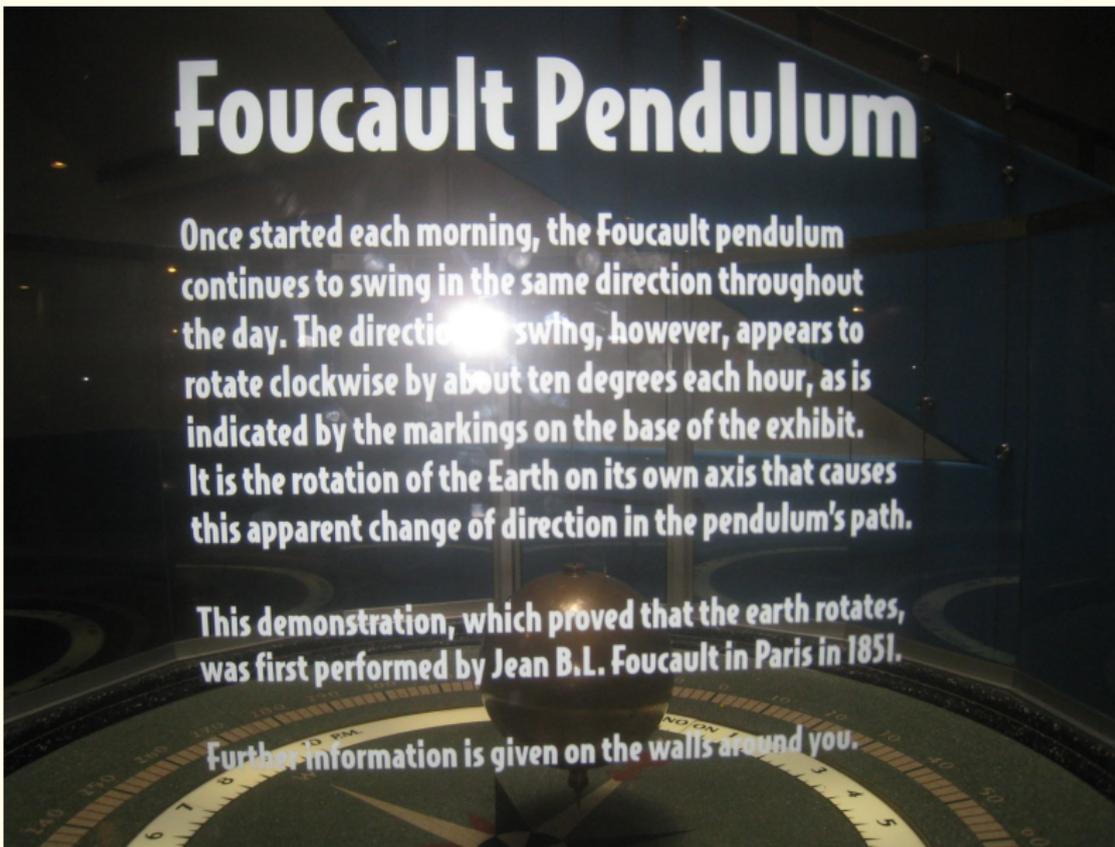
# Pendule de Foucault à Chicago (août 2011)

## Foucault Pendulum

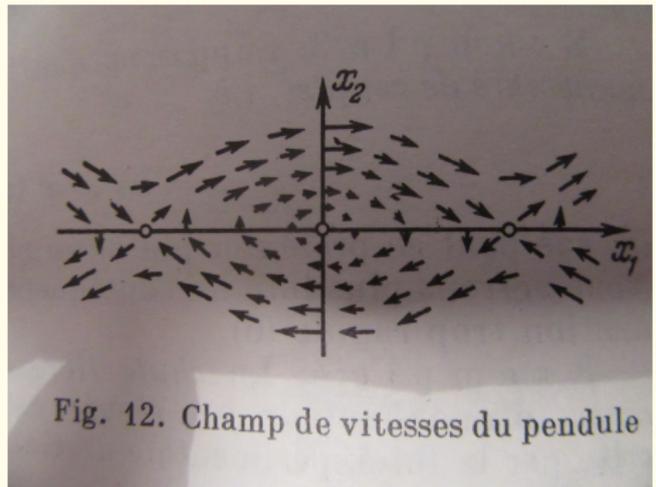
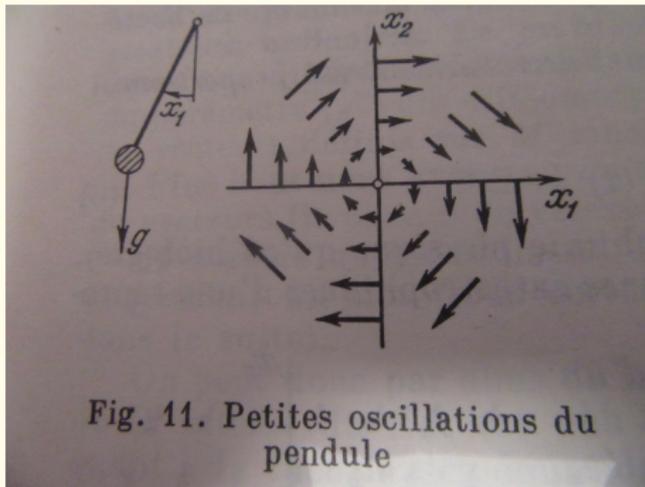
Once started each morning, the Foucault pendulum continues to swing in the same direction throughout the day. The direction of swing, however, appears to rotate clockwise by about ten degrees each hour, as is indicated by the markings on the base of the exhibit. It is the rotation of the Earth on its own axis that causes this apparent change of direction in the pendulum's path.

This demonstration, which proved that the earth rotates, was first performed by Jean B.L. Foucault in Paris in 1851.

Further information is given on the walls around you.

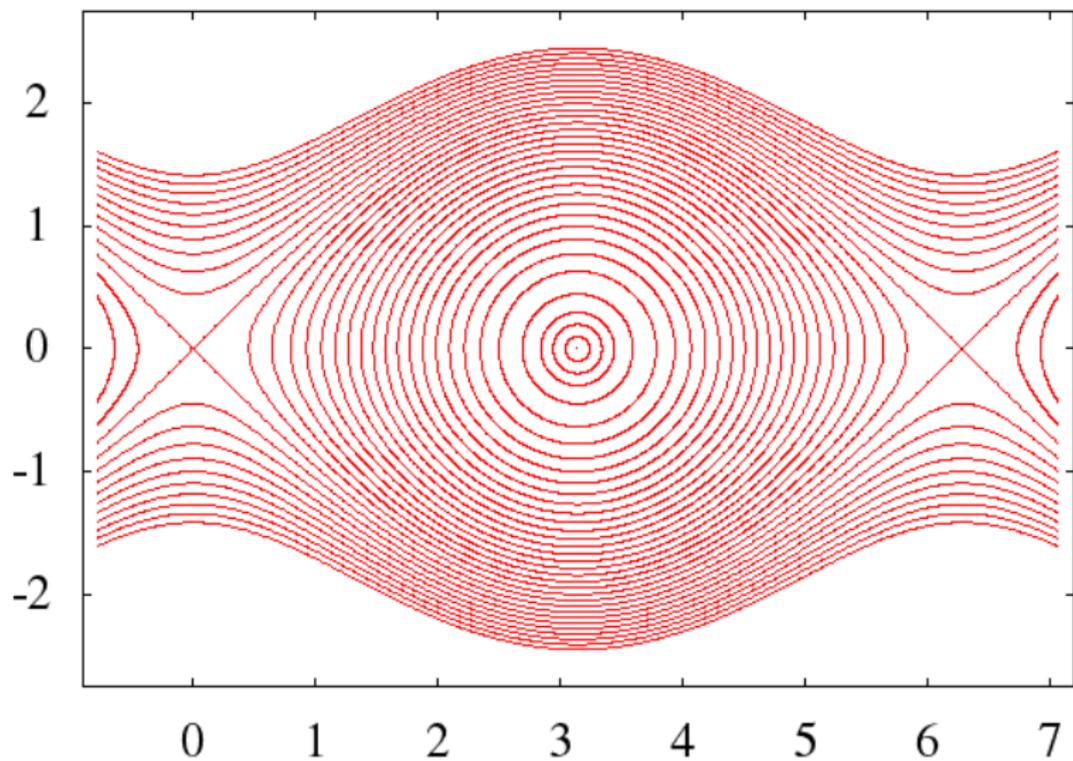


# portrait de phase du pendule simple

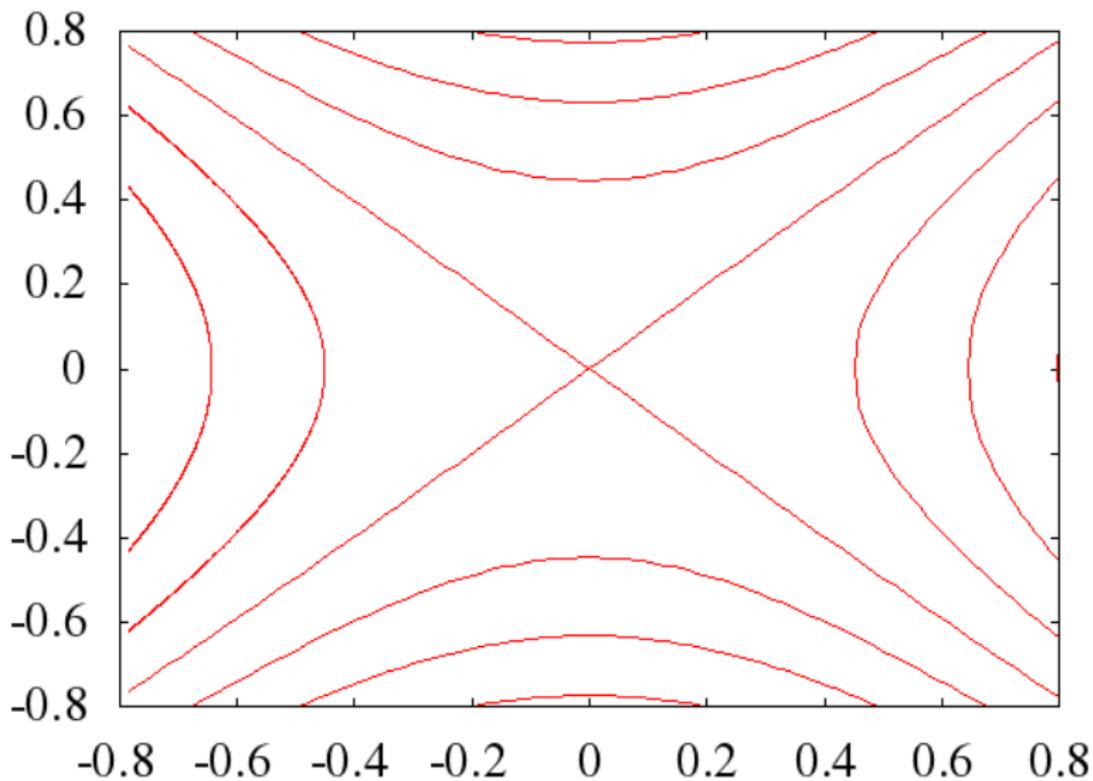


extrait du livre d'Arnold sur les équations différentielles ordinaires

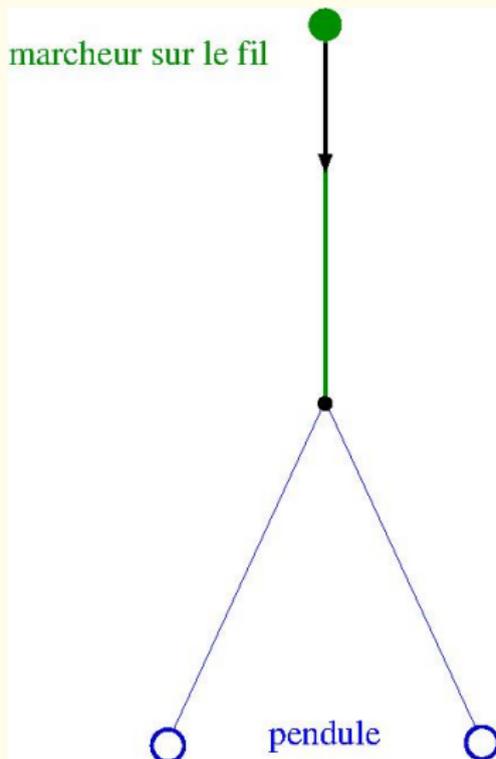
## portrait de phase du pendule simple (ii)



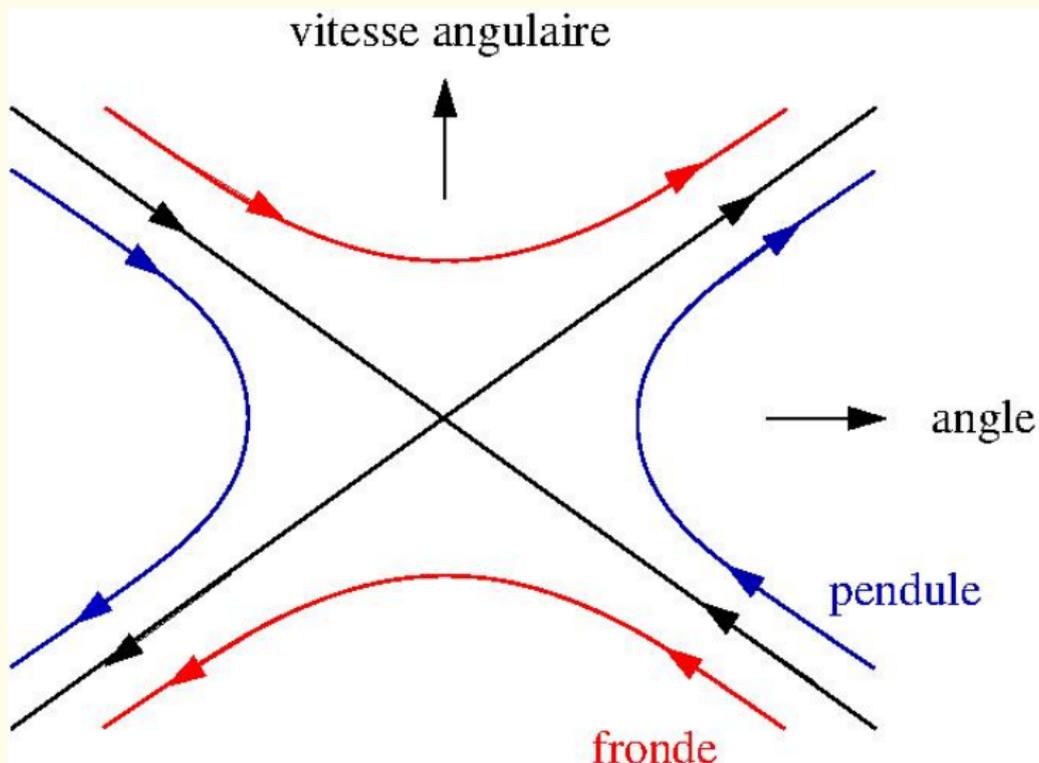
# Zoom autour de l'instabilité



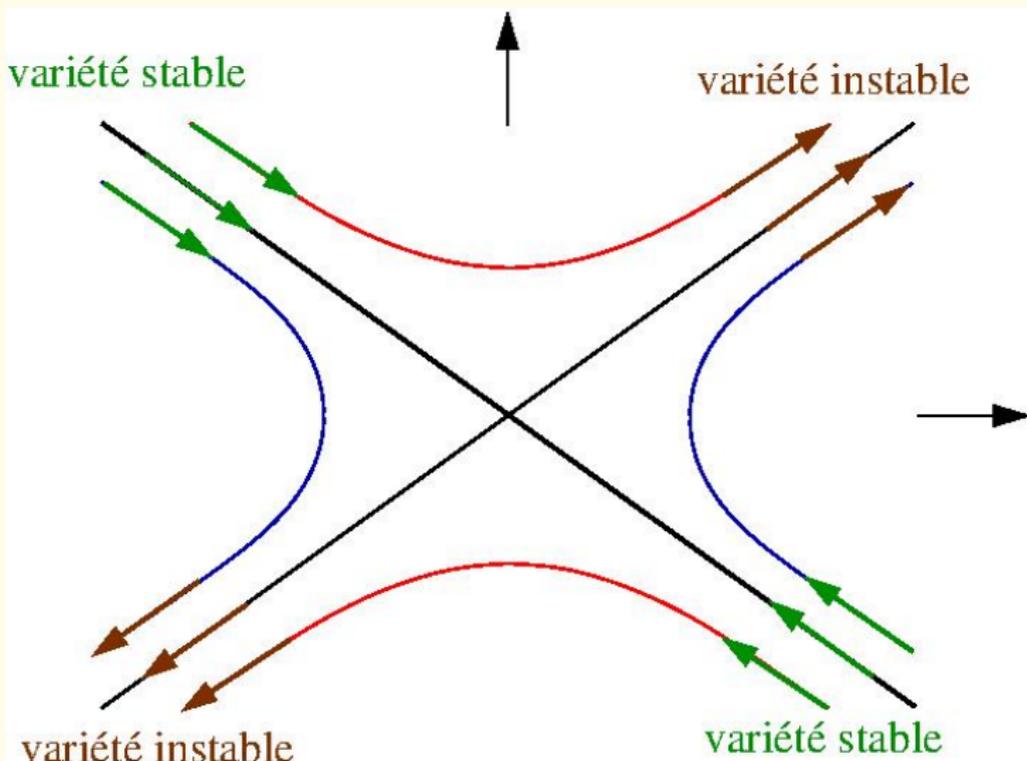
# L'instabilité vue depuis le pendule



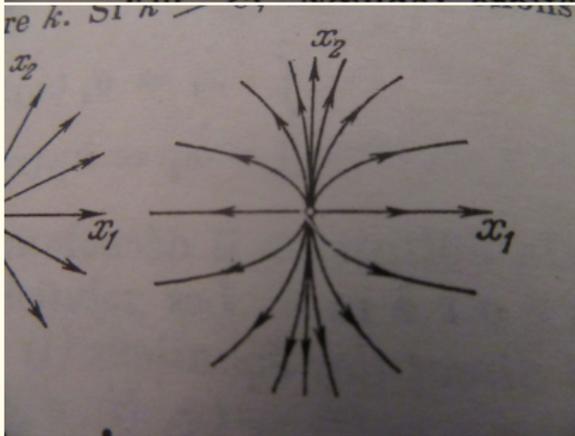
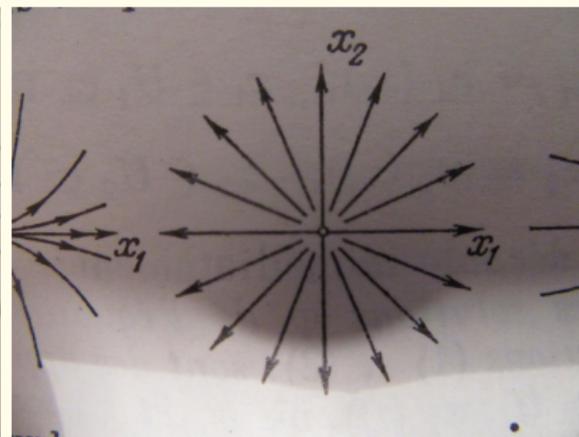
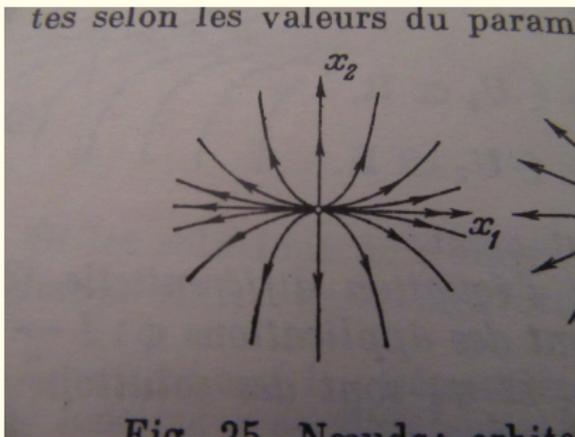
# Pendule ou fronde ?



# Quelle dynamique autour de l'instabilité ?



# Quelle dynamique autour de l'instabilité ? (ii)



Exercice 2. Peut-on dire de la courbe déterminée sur le plan  $(x_1, x_2)$  par l'équation (6) qu'elle est une orbite?  
Réponse. Non.

Les courbes de la famille (6), où  $C \in \mathbb{R}$ , ont des formes selon les valeurs du paramètre  $k$ . Si  $k > 0$ , nous obtenons

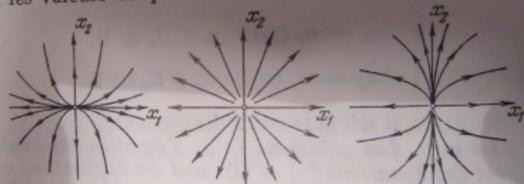
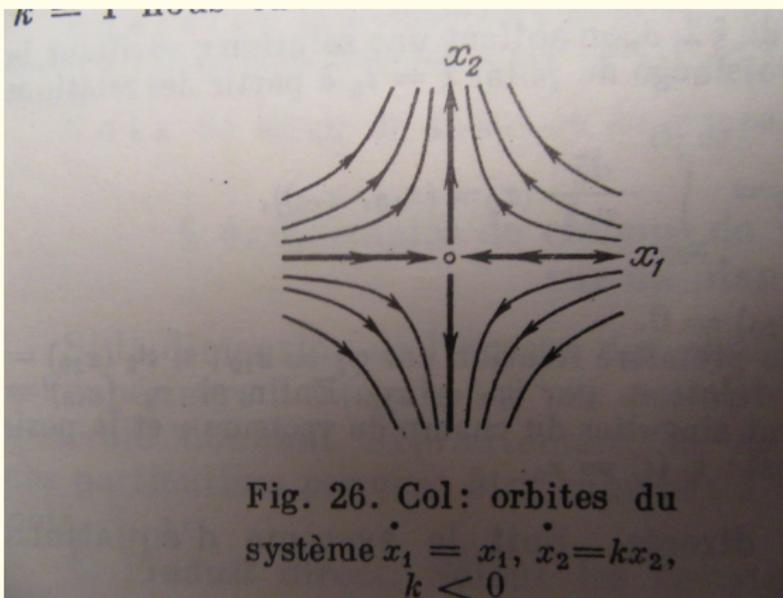


Fig. 25. Nœuds: orbites des systèmes  $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = kx_2$ , où  $k > 1, k = 1$  et  $0 < k < 1$

de « paraboles \*) d'indice  $k$  ». Ces paraboles sont tangentielles à l'axe  $x_1$  lorsque  $k > 1$  ou à l'axe  $x_2$  lorsque  $0 < k < 1$ .

# Quelle dynamique autour de l'instabilité ? (iii)



extrait du livre d'Arnold sur les équations différentielles ordinaires

# Quelle dynamique autour de l'instabilité ? (iv)

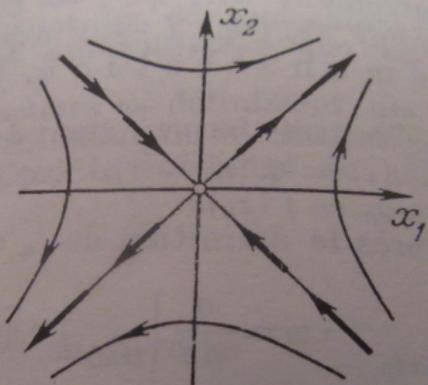


Fig. 42. Plan de phase du système initial

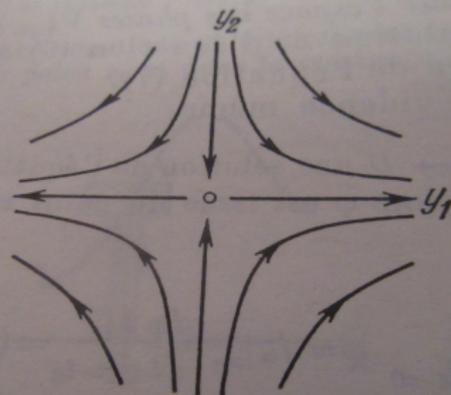


Fig. 41. Plan de phase d'un nouveau système

extrait du livre d'Arnold sur les équations différentielles ordinaires

# Quelques calculs

Cas très simple où le champ de vecteurs second membre  $f(u)$  est une fonction **linéaire** de  $u$  :  $f(u) = A u$ .

$$\begin{array}{l} \text{Équation d'évolution} \\ \text{Condition initiale} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = A u(t) \\ u(t=0) = u_0 \end{array}$$

Si  $u_0 = 1$  on a une propriété extraordinaire :

la solution  $u(t)$  **transforme les sommes en produits** (!)

$$u(t + t') = u(t) u(t') \quad \text{pour tout } t \text{ et } t'$$

## Quelques calculs (ii)

Preuve de la propriété précédente

Equation d'évolution  $\frac{du}{dt}(\theta) = A u(\theta)$  pour tout instant  $\theta$

Condition initiale  $u(t=0) = 1$

Posons  $v(t) = \frac{u(t+t')}{u(t')}$ . Alors  $v(t=0) = 1$ . De plus,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &\approx \frac{1}{h} \left( v(t+h) - v(t) \right) && \text{pour } h \text{ très petit} \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{u(t+t'+h)}{u(t')} - \frac{u(t+t')}{u(t')} \right) \\ &= \frac{1}{u(t')} \left[ \frac{1}{h} \left( u(t+t'+h) - u(t+t') \right) \right] \\ &\approx \frac{1}{u(t')} \frac{du}{dt}(t+t') && \text{pour } h \text{ très petit} \\ &= \frac{A u(t+t')}{u(t')} = A v(t) ! \end{aligned}$$

Et  $v(t) = u(t)$  c'est à dire  $u(t+t') = u(t) u(t')$  pour tout  $t, t'$  !

## Quelques calculs (iii)

Equation d'évolution  $\frac{du}{dt}(t) = A u(t)$  pour tout instant  $t$

Condition initiale  $u(t=0) = 1$

Alors  $u(t+t') = u(t) u(t')$  pour tout  $t, t' !$

La seule fonction régulière

qui transforme les sommes en produits

dont la dérivée en  $t = 0$  vaut  $A$   $\left(\frac{du}{dt}(0) = A\right)$

est une fonction exponentielle :  $u(t) = \exp(At)$

Solution du problème posé initialement :

$\frac{du}{dt}(t) = A u(t)$  pour tout instant  $t$

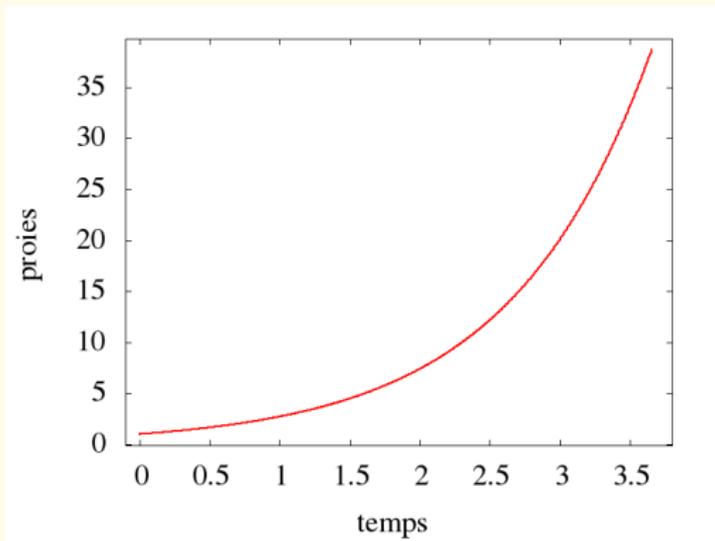
$u(t=0) = u_0$  :

$$u(t) = \exp(At) u_0$$

# Proies et prédateurs

Nombre de proies  $x(t)$  au cours du temps (sans prédateur)

$$\frac{dx}{dt} = ax(t)$$



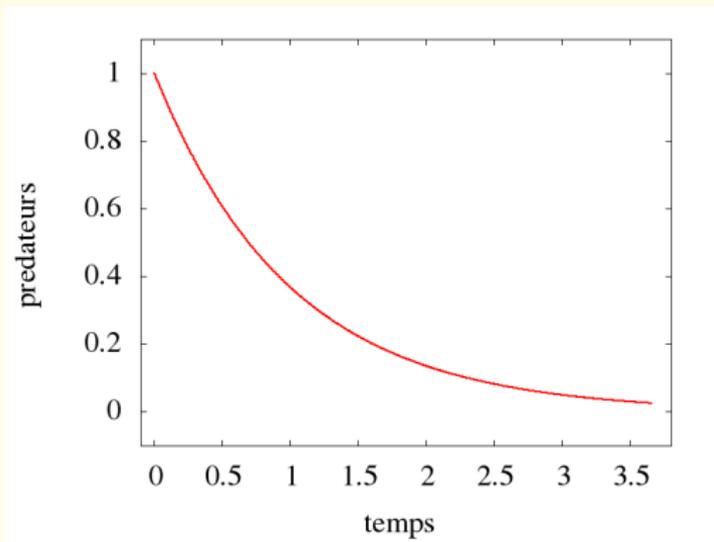
Croissance **exponentielle** du nombre de proies

**en absence** de prédateurs !

# Proies et prédateurs (ii)

Nombre de prédateurs  $y(t)$  au cours du temps (sans proie)

$$\frac{dy}{dt} = -c y(t)$$



Décroissance **exponentielle** du nombre de prédateurs

**en absence** de proies !

# Dynamique près d'un point fixe

Si on résout l'équation  $\frac{dx}{dt} = ax(t)$

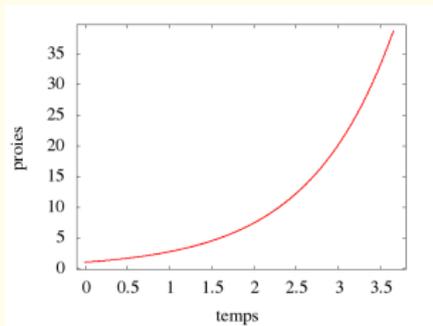
le point  $x = 0$  est un **point fixe** de la dynamique ;

si on prend la **condition initiale** particulière  $x(0) = 0$ ,  
alors pour tout temps  $t$ ,  $x(t) = 0$ .

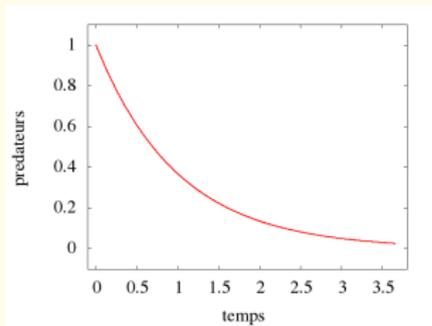
Si on perturbe un peu cette condition initiale

avec  $x(0) = \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est une "petit" nombre,

alors la solution dépend de façon cruciale du **signe** de  $a$

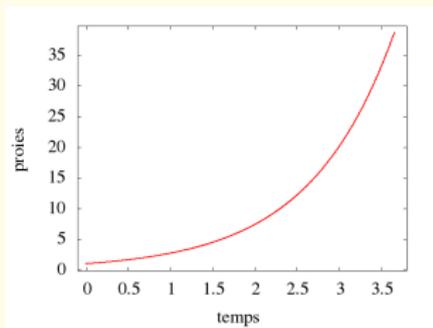


$a > 0$  : **instabilité**

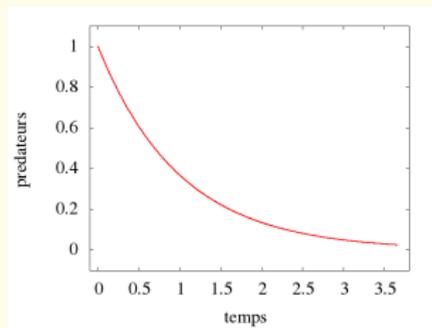


$a < 0$  : **stabilité**

## Dynamique près d'un point fixe (ii)



$a > 0$  : instabilité



$a < 0$  : stabilité

On représente ce comportement par



si  $a$  positif



si  $a$  négatif

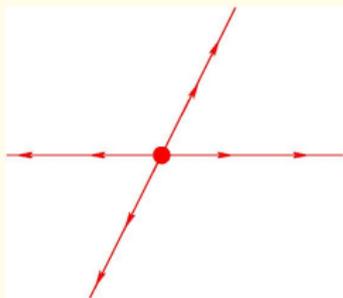
# Dynamique près d'un point fixe (iii)

Dans le cas de deux dimensions d'espace...

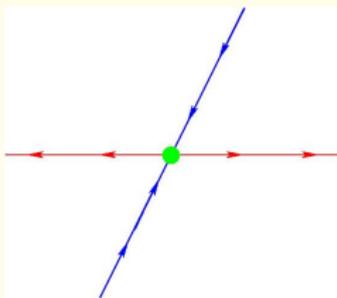
On résout le système d'équations  $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$

avec  $x(t)$  vecteur à deux composantes pour tout instant...

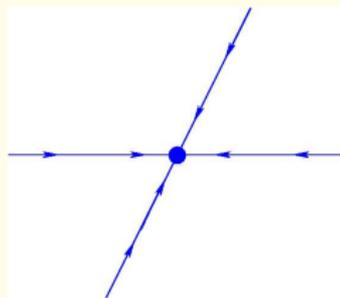
on se ramène au cas précédent en diagonalisant la matrice  $A$



instable



une direction stable  
et une instable



stable

# Alfred Lotka et Vito Volterra



Lotka 1925  
(1880 - 1949)



Volterra 1926  
(1860 - 1940)

# Proies et prédateurs de Lotka et Volterra

## Interaction entre proies et prédateurs

les prédateurs tuent les proies

les proies permettent aux prédateurs de se nourrir

variation au cours du temps du nombre de proies =

terme de croissance exponentielle

moins terme dû à la présence des prédateurs

variation au cours du temps du nombre de prédateurs =

terme de décroissance exponentielle (négatif)

plus terme dû à la présence des proies

# Proies et prédateurs de Lotka et Volterra (ii)

## Système couplé d'équations différentielles ordinaires

Modèle proposé par Alfred Lotka et Vito Volterra

à la fin du XIX ième siècle.

$x(t)$  nombre de proies au cours du temps

$y(t)$  nombre de prédateurs

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a x(t) - b x(t) y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -c y(t) + d x(t) y(t)\end{aligned}$$

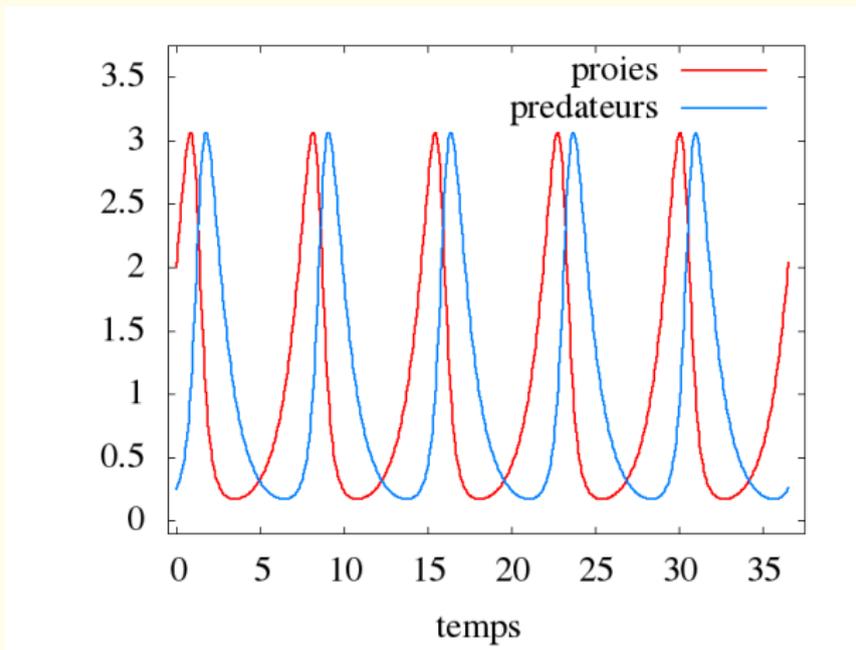
Présence de termes non linéaires ( $bxy$  et  $dxy$ )

Réelles interactions entre les acteurs du système

“cycle limite”, une oscillation auto-entretenu

d'origine parfaitement non banale.

# Emergence d'une dynamique périodique

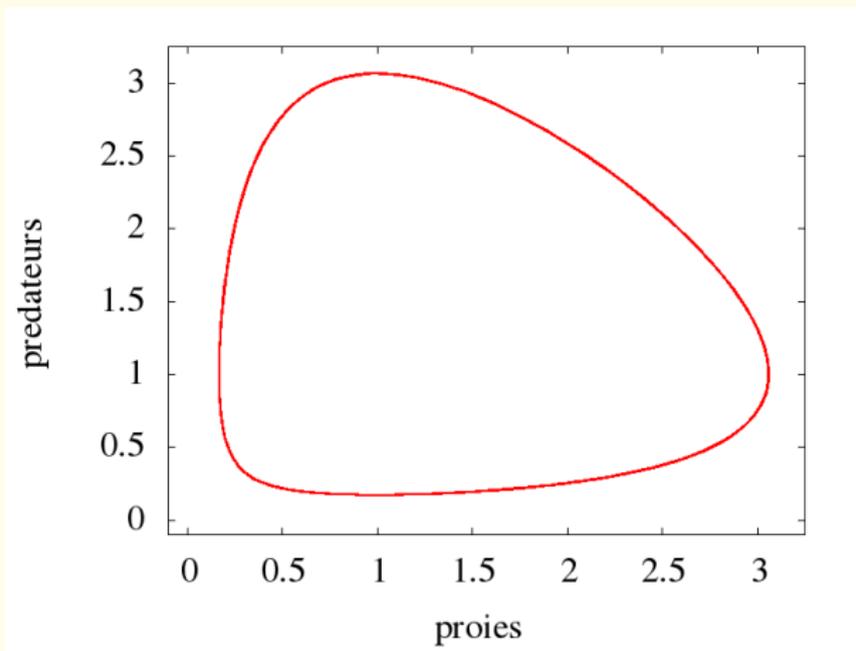


Oscillation auto-entretenue **périodique**

d'origine parfaitement non banale.

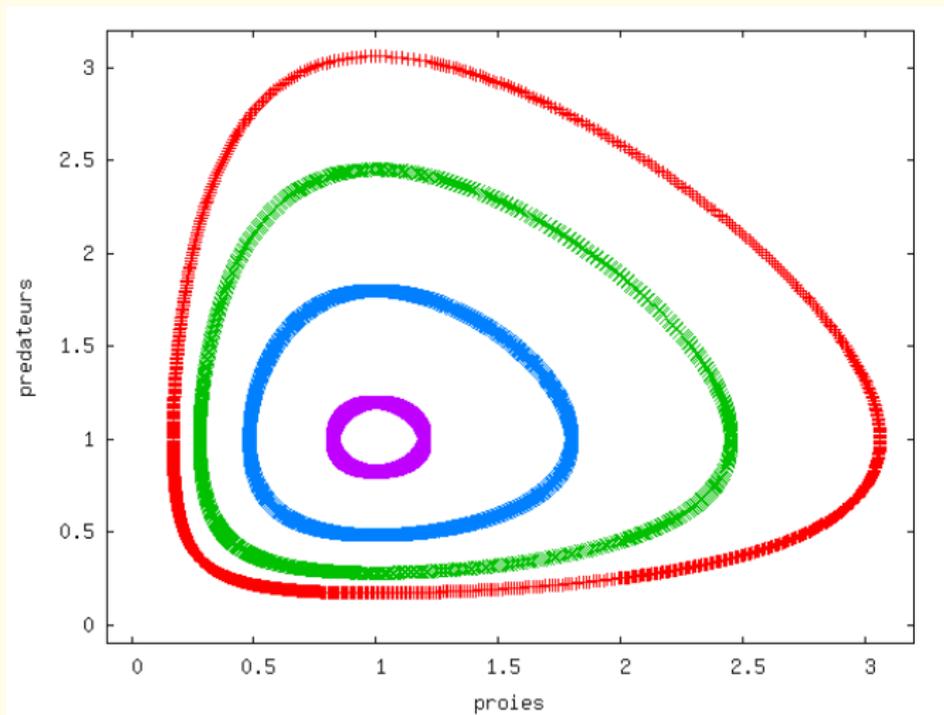
# Emergence d'une dynamique périodique (ii)

Changement de représentation : "cycle limite"



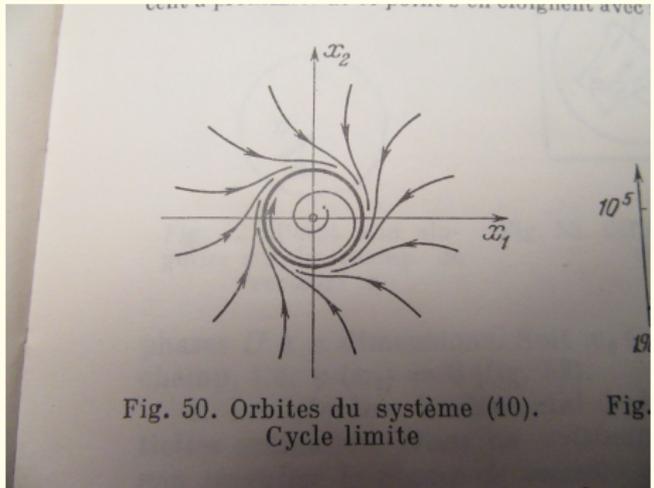
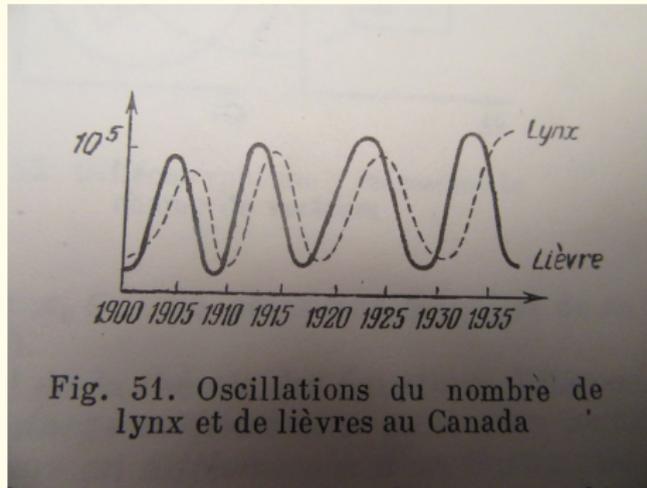
corrélations entre les prédateurs et les proies

## Emergence d'une dynamique périodique (iii)



Cycle limites calculés avec une approximation numérique

# Proies et prédateurs



extrait du livre d'Arnold sur les équations différentielles ordinaires

# L'exemple des proies et prédateurs de Lotka et Volterra

## Système couplé d'équations différentielles ordinaires

$x(t)$  nombre de proies au cours du temps

$y(t)$  nombre de prédateurs

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

Présence de termes **non linéaires** ( $bx y$  et  $dx y$ )

Modélisations de réelles interactions entre les acteurs du système

**Pas de solution analytique** comme dans le cas linéaire !

**Premier niveau** de langage : mathématiques du **continu**

# Discrétisation

Comment calculer de façon approchée

“la” solution d’un système dynamique ?

Leonhard Euler (XVIII ième siècle) introduit

un “quantum” de temps, un (petit) intervalle  $\Delta t$

Idee de chercher une valeur approchée du système seulement

pour les multiples entiers  $k \Delta t$  de ce  $\Delta t$ .

$$\frac{dx}{dt}(k \Delta t) \simeq \frac{x(k \Delta t) - x((k-1) \Delta t)}{\Delta t} \simeq \frac{x^k - x^{k-1}}{\Delta t}$$

Second niveau de langage : mathématiques discrètes

## Discrétisation (ii)

Carl Runge et Wilhelm Kutta

ont généralisé cette démarche au début XX ième siècle



Carl Runge  
(1856-1927)



Wilhelm Kutta  
(1867-1944)

Je n'écris pas les "détails" du schéma de Runge et Kutta  
pour le système de Lotka et Volterra

## Troisième niveau de langage

**Langage informatique** pour programmer l'ordinateur...

Programme "octave" pour un des cycles limites...

```

x=1 ; y=1/2 ; dt=.0648703994 / 4 , n= 400 ;      % initialisation
for j=1:n                                         % boucle en temps
fx = x*(1-y) ; fy = -y*(1-x) ;
x1 = x + dt*fx / 2 ; y1 = y + dt*fy / 2 ;
fx1 = x1*(1-y1) ; fy1 = -y1*(1-x1) ;
x2 = x + dt*fx1 / 2; y2 = y + dt*fy1 / 2;
fx2 = x2*(1-y2) ; fy2 = -y2*(1-x2) ;
x3 = x + dt*fx2 ; y3 = y + dt*fy2 ;
fx3 = x3*(1-y3) ; fy3 = -y3*(1-x3) ;
x4 = x + dt*(fx + 2*fx1 + 2*fx2 + fx3)/6 ;      % schéma RK4
y4 = y + dt*(fy + 2*fy1 + 2*fy2 + fy3)/6 ;
x = x4 ; y = y4 ;                               % passage du temps
plot (x,y,'*b')                                 % dessin
end

```

# Discret classique

Mathématiques discrètes :

calcul numérique approché d'un système dynamique

Leonhard Euler (XVIII ième siècle) introduit

un “quantum” de temps, un (petit) intervalle  $\Delta t$

Idee de chercher une valeur approchée du système seulement

pour les multiples entiers  $k \Delta t$  de ce  $\Delta t$ .

$$\frac{dx}{dt}(k \Delta t) \simeq \frac{x(k \Delta t) - x((k - 1) \Delta t)}{\Delta t}$$

# Le “discret classique” n’est pas si facile !!

Passage d’un univers mathématique continu à un **cadre discret**  
paramétré par les nombres entiers

Nouveau modèle **purement discret**.

Difficultés mathématiques **cachées** entre la modélisation  
mathématique continue et la mise en œuvre sur ordinateur

Une calculatrice électronique implémente un **algorithme discret**  
pour effectuer des calculs numériques.

Question de la **stabilité** d’un algorithme.

Phénomène mathématique étudié au milieu du vingtième siècle  
par John von Neumann et Peter Lax.

Seuls les schémas numériques **stables**  
sont **utilisables** dans un ordinateur.

# Mathématiques de la stabilité



John von Neumann  
(1903-1957)

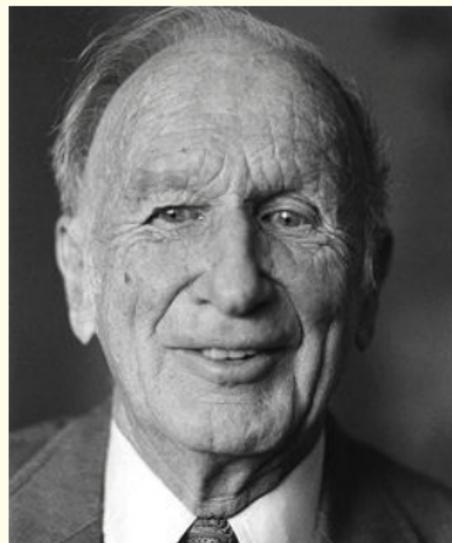


Peter Lax  
(né en 1926)

# Chaos déterministe



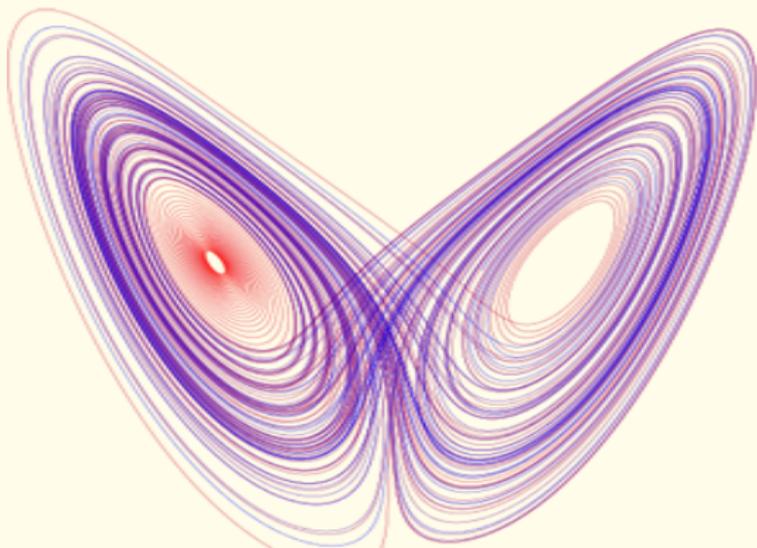
Henri Poincaré  
(1854-1912)



Edward Lorenz  
(1917-2008)

Une petite perturbation des conditions initiales comme  
“le mouvement d’une mouette” (E. Lorenz), entraîne après un  
temps fini un écart sur la solution du système qui est de l’ordre de  
grandeur de la taille de l’espace de configuration explorable.

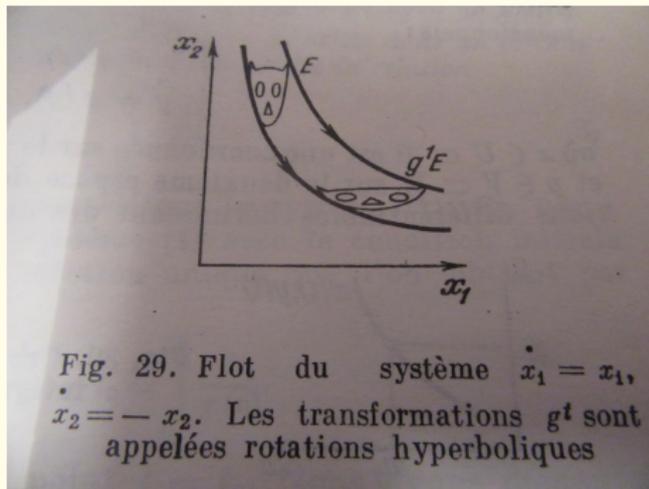
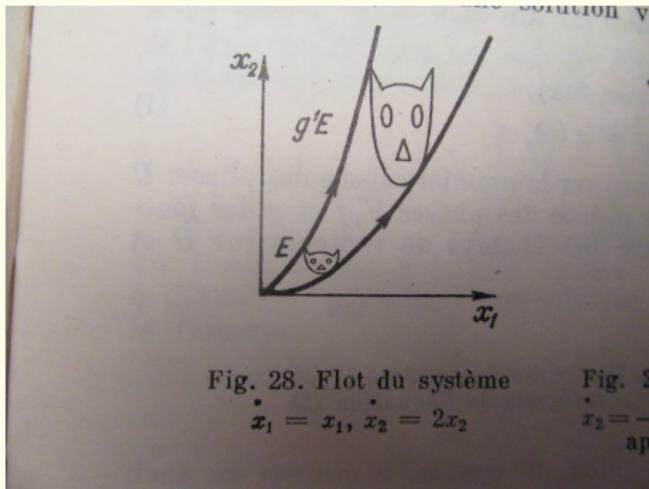
# Attracteur de Lorenz (1963)



$$\frac{dx}{dt} = \sigma(x - y), \quad \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$\sigma = 10, \quad \beta = \frac{8}{3}, \quad \rho = 28.$

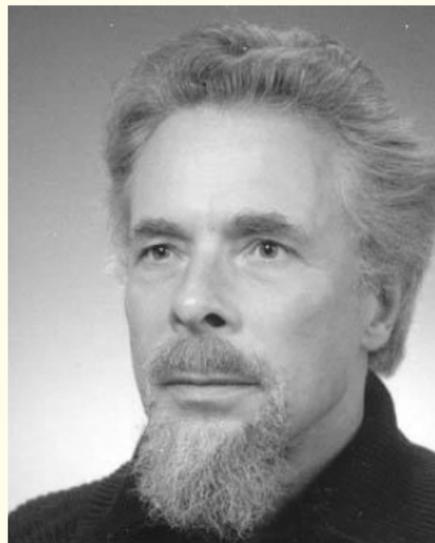
# Le chat d'Arnold



# Chaos déterministe



David Ruelle  
(né en 1935)



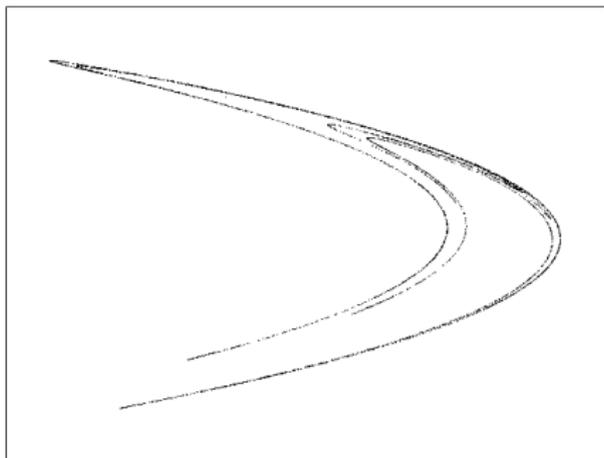
Floris Takens  
(1940-2010)

**Théorème (1971).** On peut avoir “dépendance sensitive par rapport aux conditions initiales” pour des systèmes dynamiques posés à trois dimensions spatiales.

# Attracteur de Hénon (1976)



Michel Hénon  
(1931 - 2013)



Attracteur de Hénon

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2, \quad y_{n+1} = bx_n, \quad a = 1,4, \quad b = 0,3$$

# Chaos dans le système solaire



Jacques Laskar  
(né en 1955)



Collision Terre-Mars  
possible selon J. Laskar

# Conclusion ?

Outil fondamental pour décrire une évolution dynamique

Ainsi, on ne dit pas  $u(t) = \exp(t)$

on dit  $\frac{du}{dt} = u(t)$  avec  $u(0) = 1$  !

Les **calculs numériques** rendent le sujet (relativement) facile

Quelle dynamique aux temps longs ?

Quelle approximation de la **dynamique aux temps longs** ?  
(un problème fondamental en météorologie)

Et si on veut que la solution aille où on veut ?

**Contrôle optimal**

Quid si l'inconnue n'est plus un vecteur en dimension finie  
mais une fonction (de l'espace par exemple) ?

**Equations aux dérivées partielles**

## Conclusion (ii)



Equation des ondes

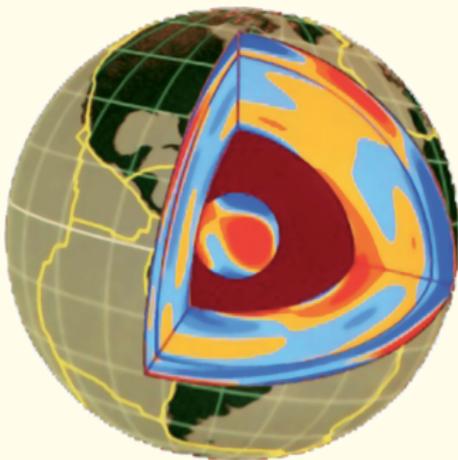
[creative commons]



Jean Le Rond d'Alembert  
(1717 - 1783)

[Georges de la Tour]

## Conclusion (iii)



propagation de la chaleur

[collège de France]



Jean Baptiste Joseph Fourier  
(1768 - 1830)

[wikipedia]