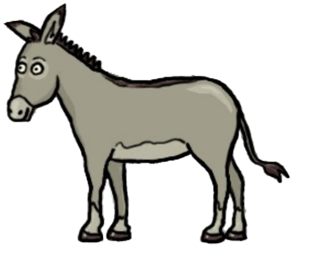
La **récurrence** : l'**infini** à la portée des **paresseux**

Dimitri Rzepski



Historique : induction incomplète

Wallis (1616-1703) - Arithmetica Infinitorum (1656)

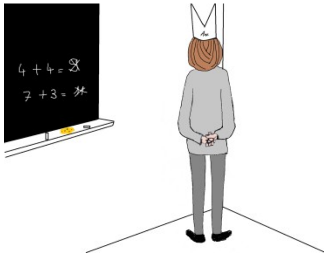
$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ , \qquad \frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\ , \qquad \frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24},$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}, \qquad \frac{0+1+4+9+16+25+36}{36+36+36+36+36+36+36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$$

« *Per modum inductionis* » :

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2\ldots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$



Historique : formalisation

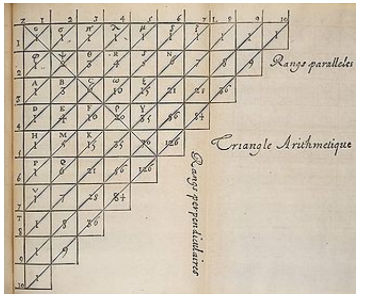
Pascal (1623-1662) - Traité du triangle arithmétique (1654)

« Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.

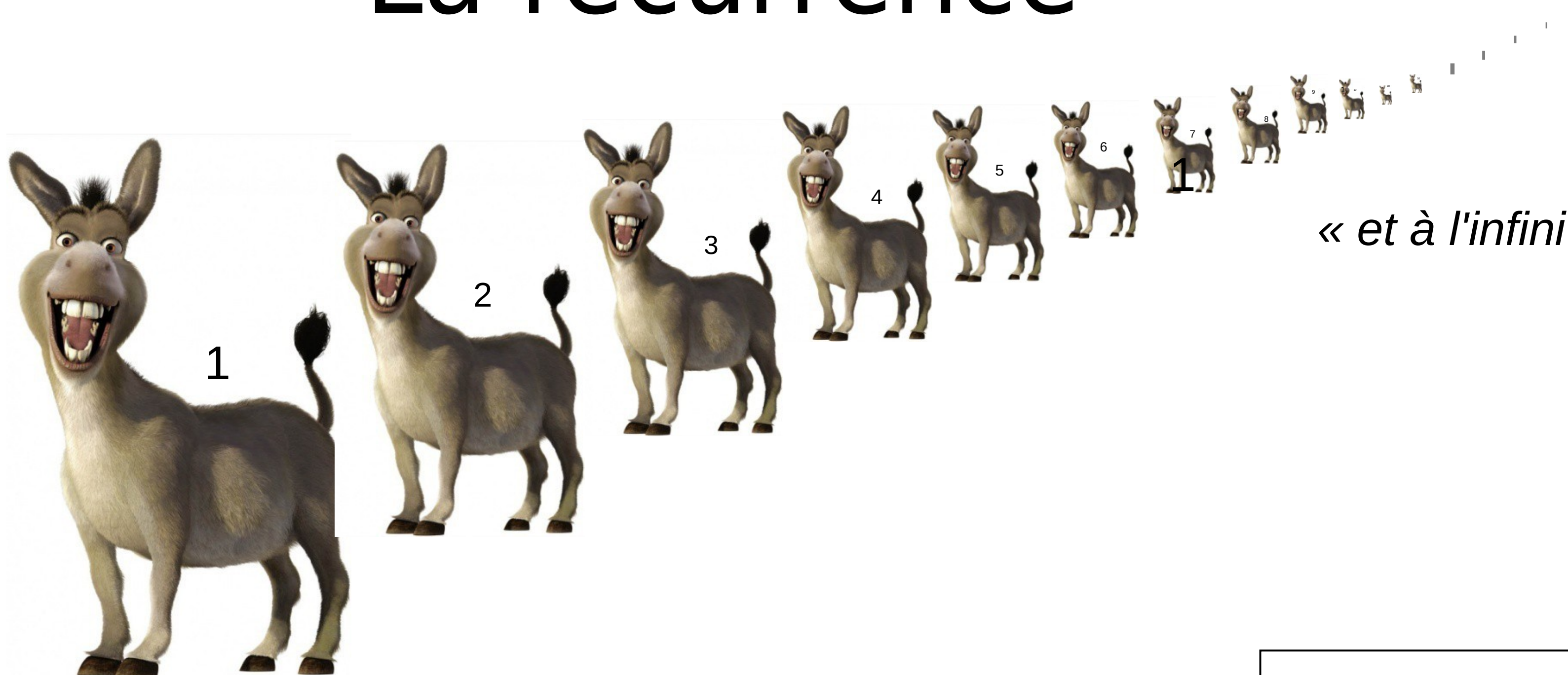
Le 1, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible, que φ est à σ comme 1 est à 1.

Le 2, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases :
car elle est dans la seconde base par le premier lemme ;
donc par le second elle est dans la troisième base,
*donc dans la quatrième, **et à l'infini**. »*



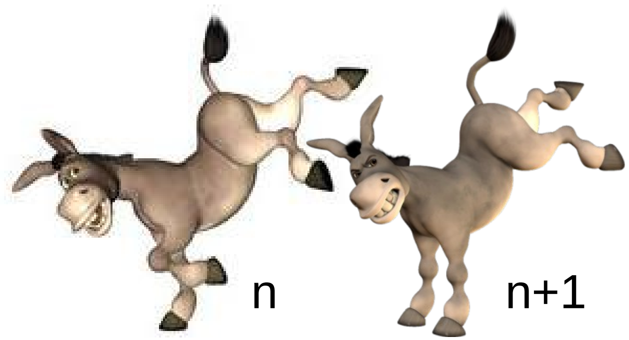
La récurrence



« et à l'infini »

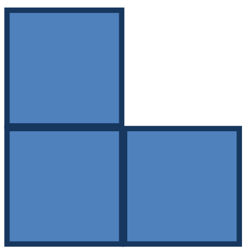
Initialisation :
le premier âne rue

Hérédité : si l'âne n rue,
alors l'âne n+1 rue aussi.



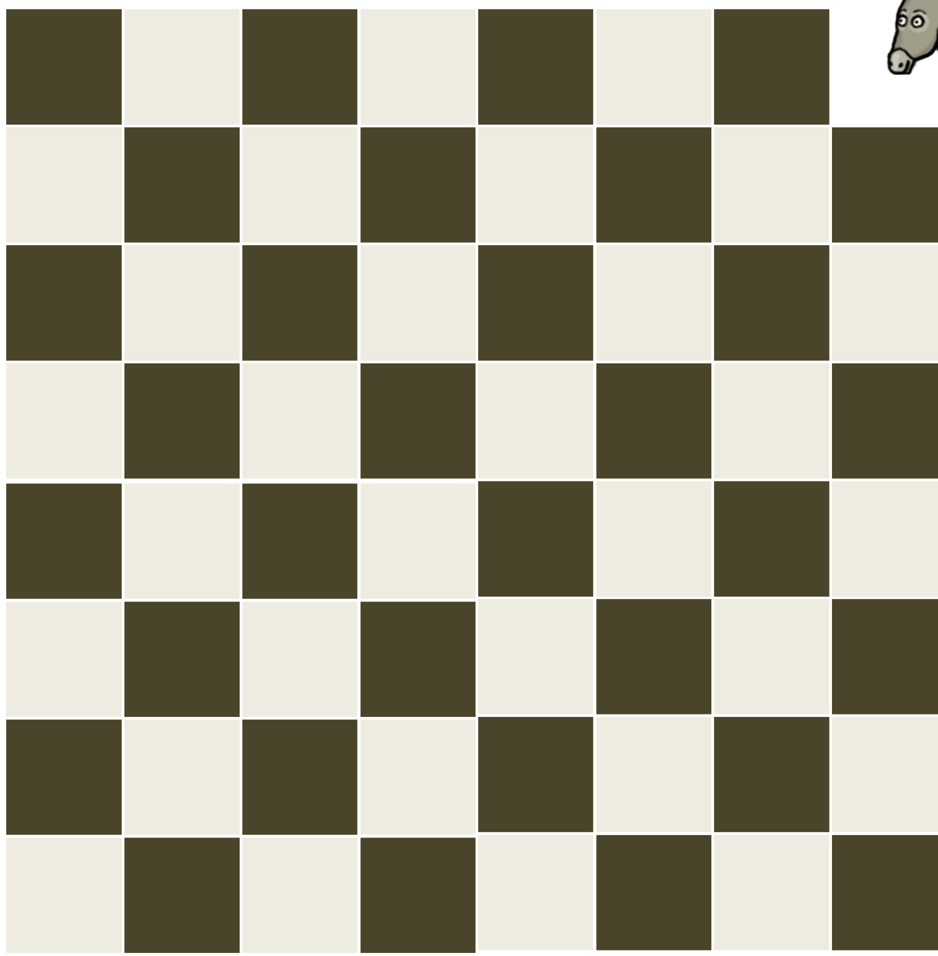
Problème des trionimos

échiquier



21 trionimos

+



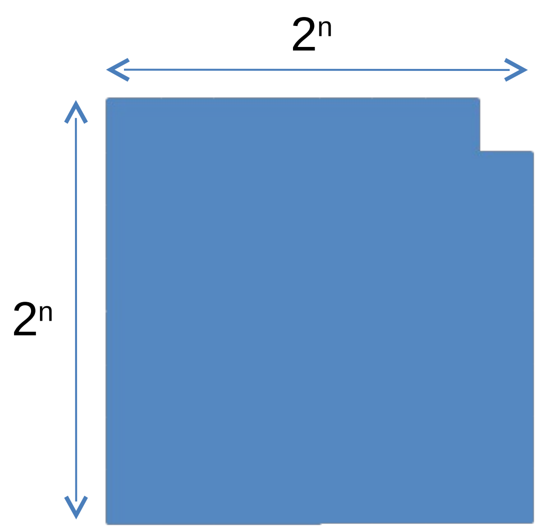
= ?

Généralisation à échiquier 2^n x 2^n

Pour tout n, il existe un pavage d'un échiquier [2^n x 2^n] – 1
par des trionimos

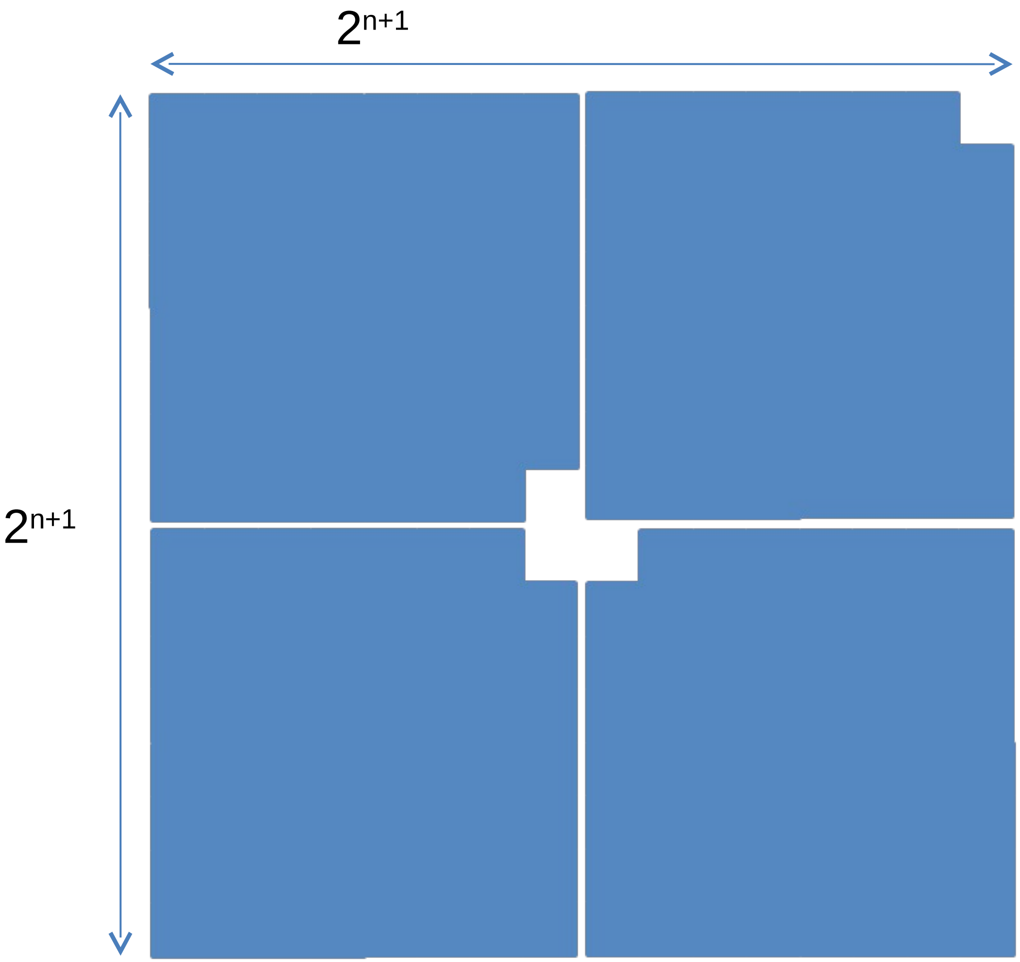
Initialisation :
Vrai pour n = 1

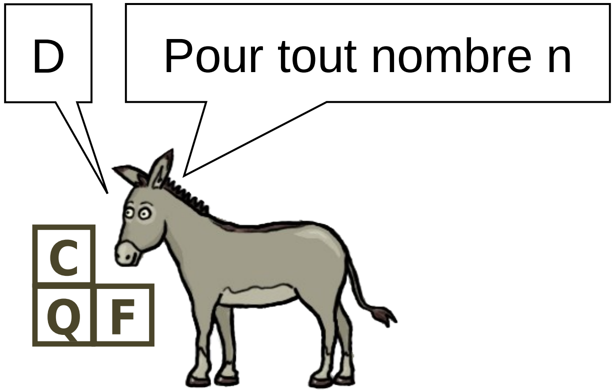
Hérédité :
Vrai pour n



Généralisation à échiquier 2^n x 2^n

Hérédité : n +1 ?





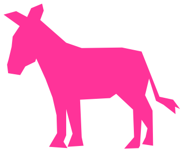
Tous les ânes sont de la même couleur

Laquelle ?

Tous les ânes sont de la même couleur

Pour tout n, n ânes sont tous de la même couleur.

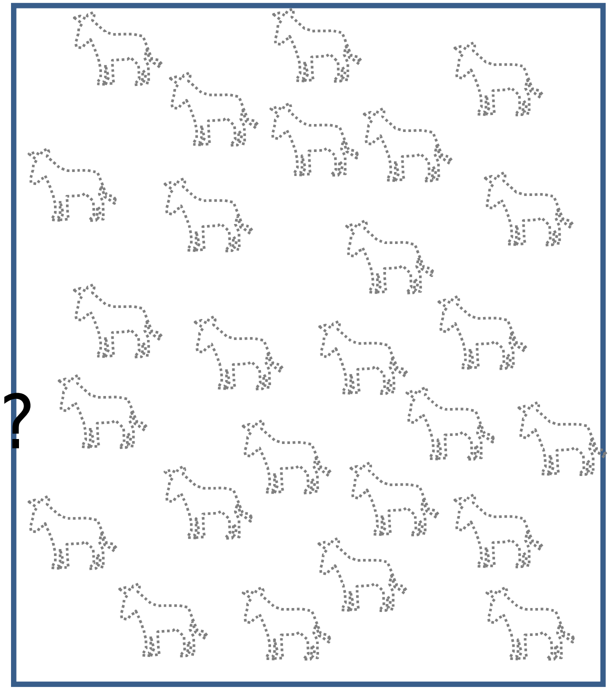
Initialisation : un seul âne, il est de la même couleur.



Hérédité :

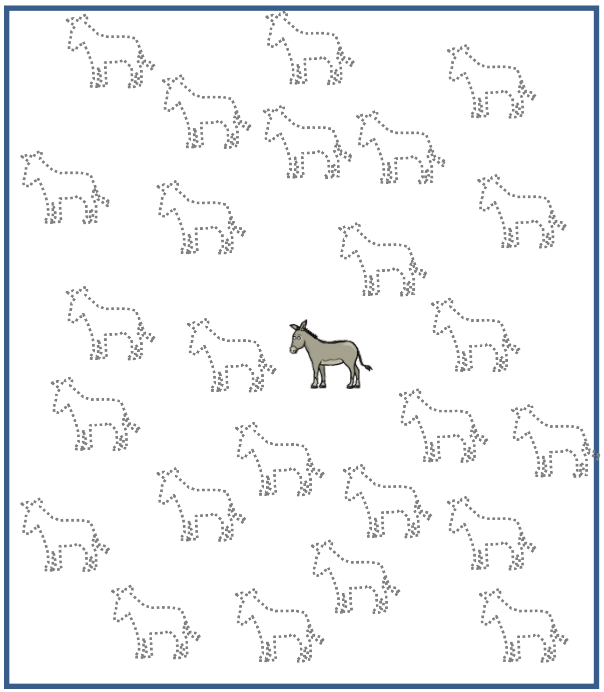
Vrai pour n ânes.

Troupeau de n+1 ânes ?

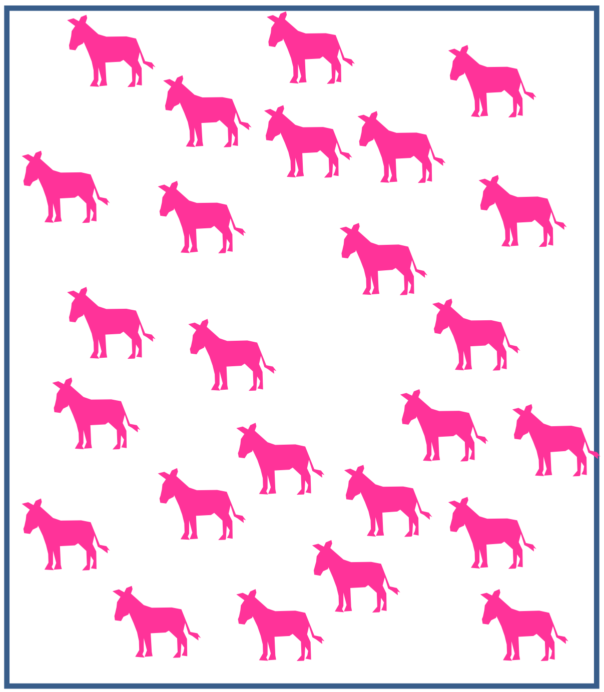


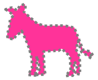
Tous les ânes sont de la même couleur

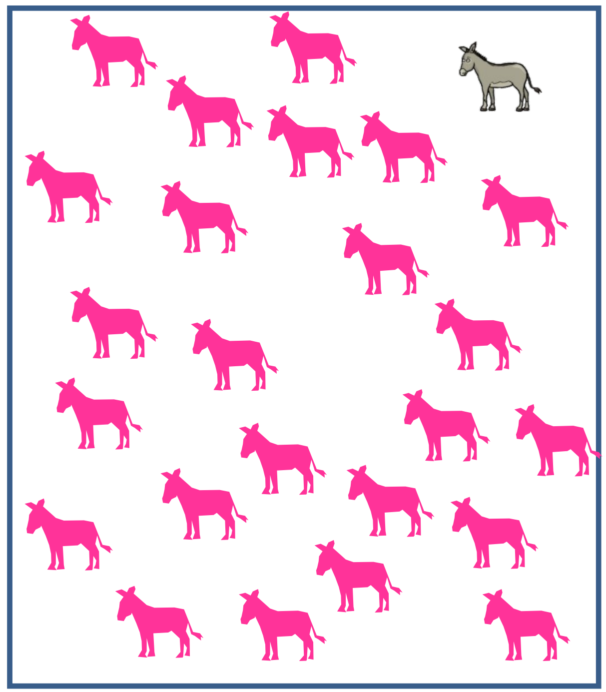
n+1 ânes



n ânes 



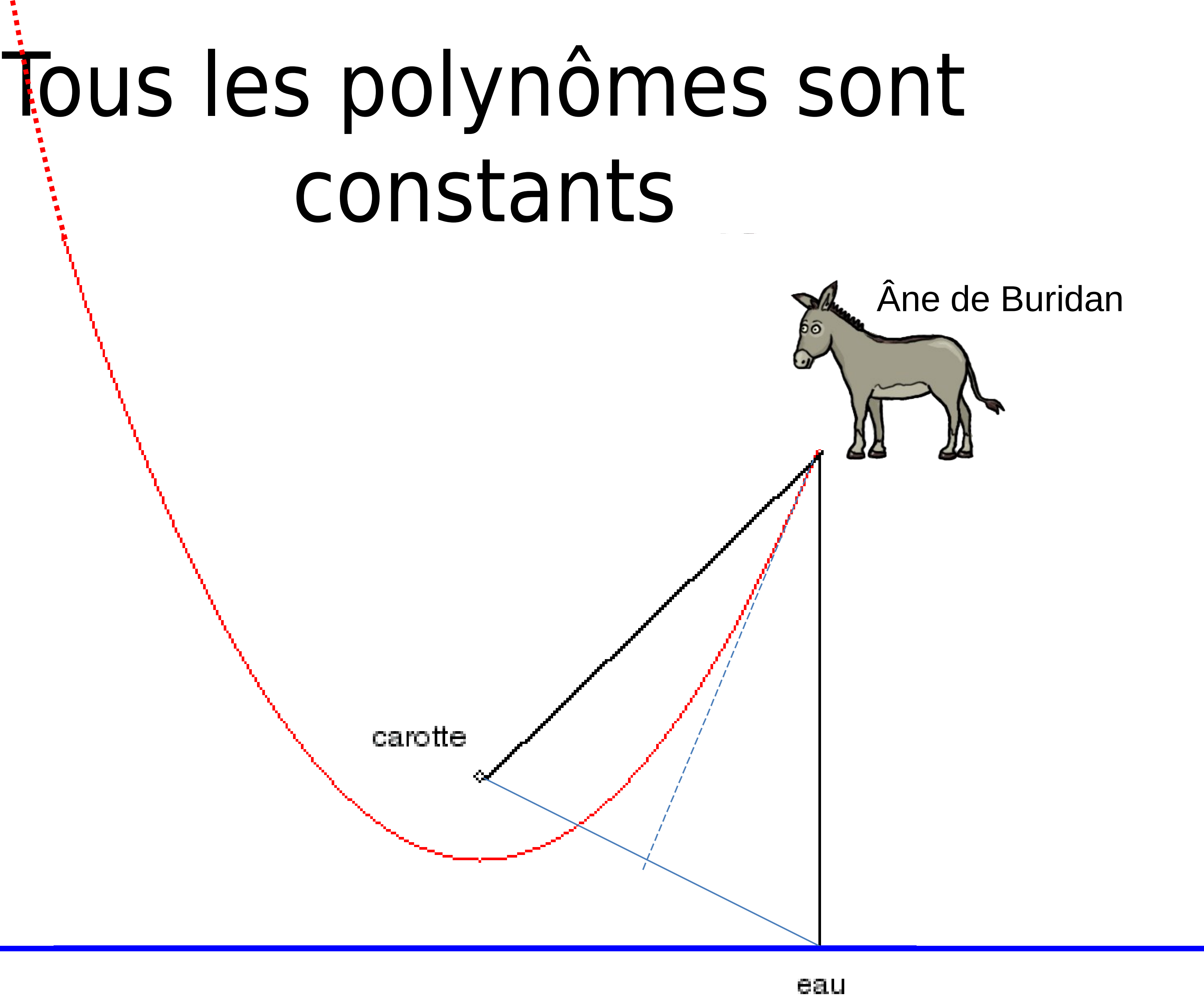
n ânes 



Alexandre : 

CQFD

Tous les polynômes sont constants



Tous les polynômes sont constants

Pour tout n, fonction $x \mapsto x^n$ constante.

Initialisation : $n = 0$, $x^0 = 1$

Hérédité : vrai pour $k = 0, 1, \ldots, n$

donc dérivée $f : x \mapsto x^k = 0$

Pour $n+1$: dérivée $f : x \mapsto x^{n+1} = 0$?

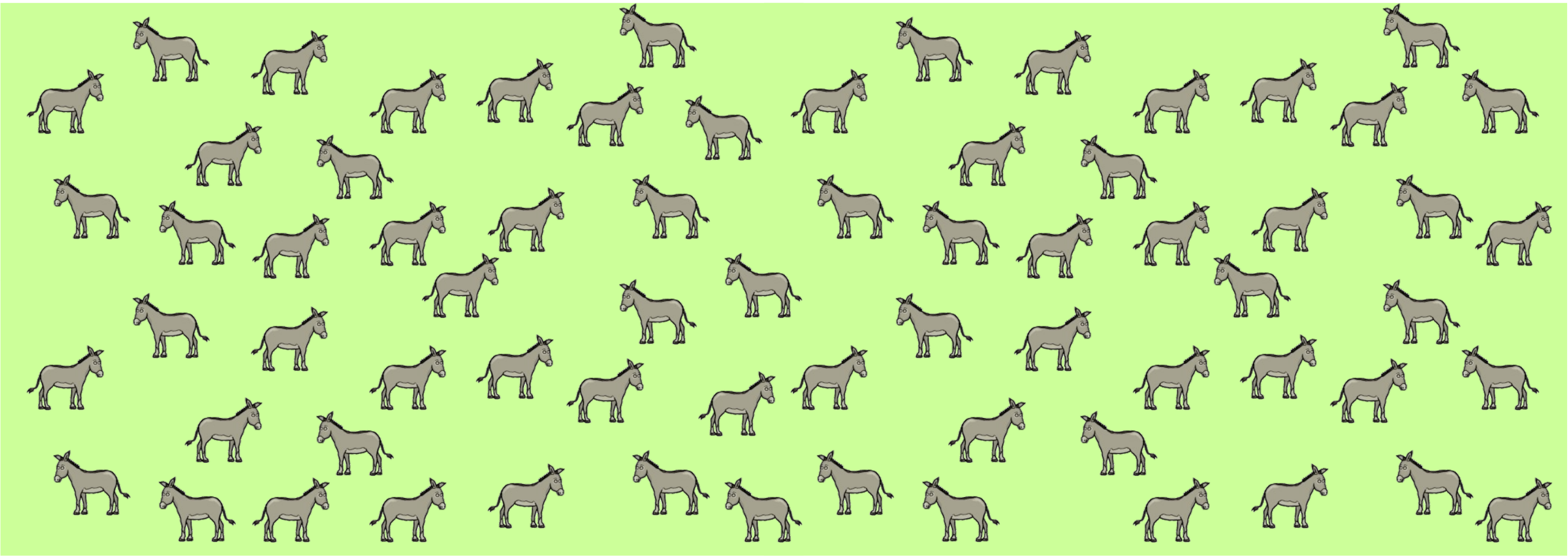
dérivation produit $(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(x^{n+1}\right)' = \left(x \cdot x^n\right)' = \underbrace{x'x^n}_{k=1} + \underbrace{x\left(x^n\right)'}_{k=n} = 0$$

fonction $x \mapsto x^{n+1}$ constante CQFD

Dans un pré…

Tous les ânes sont alignés sur une droite.



Alexandre a fait un régime.

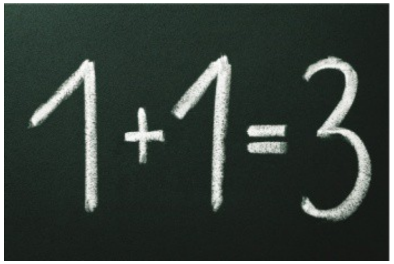
3 pesées () suffisent pour le trouver.

Le bistrΩ-math

- bistrΩ-math : 10 orateurs permanents.

dîner tous les mois après l'exposé.

- Si un(e) orateur avait connaissance d'une **erreur** faite dans un de ses **précédents exposés**, alors il/elle annonçait sa **démission** au dîner.



- **Tous** les orateurs avaient connaissance d'erreurs de **chacun** des autres…

…et ne connaissaient pas leurs propres erreurs.

- Vint un 11$^{\text{ème}}$ orateur invité temporairement…

Le bistrΩ-math

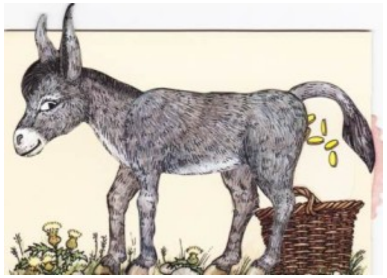
- Fin de l'année : orateur remercié.
- Lors de son dernier dîner :

Au moins l'un ou l'une d'entre vous a commis une erreur dans un exposé.

- Une année passa, et ?

- Et pourtant pas de nouvelle information…

La cagnotte du kafémath

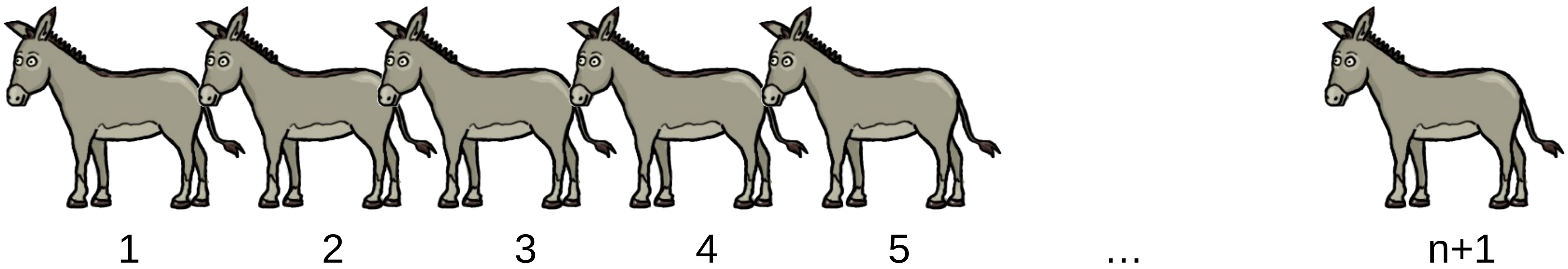


- Cagnotte à partager entre adhérents (numérotés 1 à n).
- Règles de partage :
  1. N°1 propose distribution entre adhérents (0€ autorisé).
  2. Vote secret : oui ou non sans échange entre adhérents.
  3. Si « oui » gagne ou *ex aequo*, distribution validée.
  4. Si « non » gagne, n°1 exclu et n°2 propose.
  5. Les adhérents aiment le kafémath, mais aussi l’argent. Ils préfèrent ne pas exclure les autres rapporte.

Que propose n°1 ?

D’autres résultats

- Tous les ânes sont intéressants.



- Tous les hommes sont presque chauves.

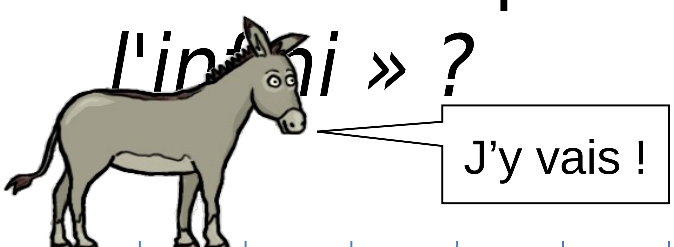
Démonstration de la récurrence et au-delà

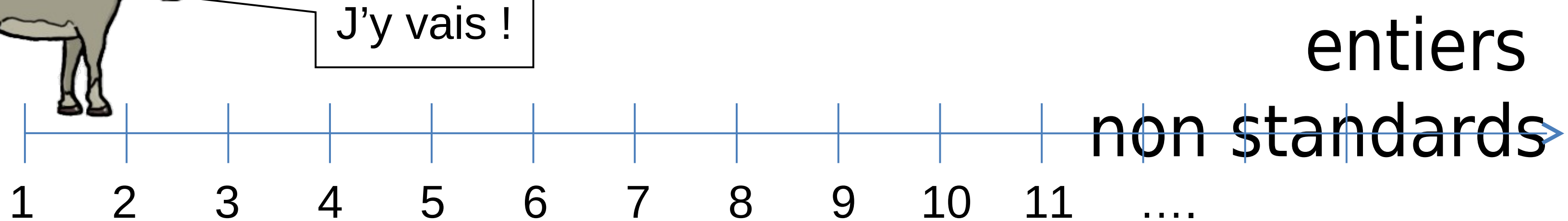
- Récurrence = axiome ou équivalence [principe de récurrence] / [existence du minimum d'une partie non vide]

- Récurrence = manque de hauteur de vue?

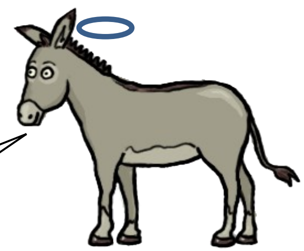
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- Arithmétique non standard : « *et à l'infini* » ?





Cet orateur a un nombre entier non standard de poils dans la main.



et à l'inFINi

Références

- Wikipédia
- Puzzles and Paradoxes in Mathematical Induction (Adam Bjorndahl)
- http://www.bibmath.net