Il existe une infinité de nombres premiers.

C'est l'une des plus anciennes démonstrations, l'un des premiers raisonnements par l'absurde.
Il s'agit de « vraies mathématiques » qui peuvent ouvrir sur d'autres choses (propriétés numériques avec le théorème fondamental de l'arithmétique, questions de logique avec la notion même de raisonnement par l'absurde, concept d'algorithme...).

Le résultat suivant est attribué à Euclide (IIIe siècle avant notre ère), mais il était sans aucun doute connu avant lui : "Il existe une infinité de nombres premiers."

La preuve de cette assertion est un véritable bijou !

Raisonnons par l'absurde : supposons que le nombre de nombres premiers est fini (même grand), et voyons où cela nous mène.

Faisons le produit de tous ces nombres premiers (qui sont en nombre fini), et ajoutons 1. Nous obtenons un très grand nombre, que l'on appelle N. C'EST LA CLEF DU RAISONNEMENT !!!

De deux choses, l'une : ou bien N est premier, ou bien il ne l'est pas.

> Si N est premier, quelque chose ne va pas, car N n'est pas l'un des nombres premiers de la liste (il est en effet beaucoup plus grand !).
>
> Si N est composé, alors il doit admettre un diviseur premier, que l'on s'empresse d'appeler p. On a un nouveau problème : p non plus ne peut pas être dans la liste ! En effet, la division euclidienne de N par chacun des nombres de cette liste fait apparaître, par construction, un reste égal à 1. Donc aucun ne divise N. En particulier, p n'appartient pas à la liste.

Conclusion : quoi que l'on fasse, l'hypothèse qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers fait apparaître une contradiction logique, une absurdité. C'est que l'hypothèse est fausse !

Le résultat est établi.

Edouard Thomas, 07 mai 2015.