

16^{ème} Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques
Place Saint Sulpice, Paris
Les p'tits dix heures, les p'tits quatre heures

P'tit quatre heures chinois

Un phare émet un signal lumineux jaune toutes les 15 minutes et un signal rouge toutes les 28 minutes.

On aperçoit le signal jaune à minuit deux et le signal rouge à minuit huit. À quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis ensemble ? Toutes les autres fois ?

Solution

Soit x en minutes les temps écoulés depuis minuit où les deux signaux émettent en même temps,

$$\text{on a : } x \equiv 2[15] \quad \text{et} \quad x \equiv 8[28]$$

En d'autres termes, x peut s'écrire : $x = 15k + 2, k \in \mathbb{N}$ et $x = 28l + 8, l \in \mathbb{N}$

On a donc : $15k + 2 = 28l + 8$, les premiers entiers qui conviennent sont : $k = 6, l = 3$

C'est à **1h32** que les deux signaux émettront ensemble pour la première fois.

$$\text{Les autres valeurs de } x \text{ sont : } \begin{cases} 15k + 2 = 28l + 8 \\ 15 \times 6 + 2 = 28 \times 3 + 8 \end{cases} \Rightarrow 15 \times (k - 6) = 28 \times (l - 3)$$

15 et 28 sont premiers entre eux, on peut donc appliquer le théorème de Gauss :

$$l - 3 = 15L, \quad L \in \mathbb{N} \quad k - 6 = 28K, \quad K \in \mathbb{N}$$

Réciproquement, soit $L \in \mathbb{N}, K \in \mathbb{N}$ et $l = 15L + 3, k = 28K + 6$

Les signaux émettront en même temps, au bout d'un temps $x = 420K + 92 = 420L + 92$ exprimée en minutes. Or : 420 minutes = 7 heures, donc les heures de simultanéité : **1h32, 8h32, 15h32, 22h32...**