# Les mystérieux carnets de Ramanujan

Édouard Thomas
Revue *Tangente*

Jeudi 4 décembre 2014

**Maison de l'environnement, des sciences et du développement durable**
6 rue Haroun Tazieff
78114 Magny-les-Hameaux

# Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

- Un mathématicien passionné
- Une destinée fulgurante
- Une intuition puissante et mystérieuse
- Des formules mathématiques inédites
- Un héritage inouï : les carnets

# Sommaire

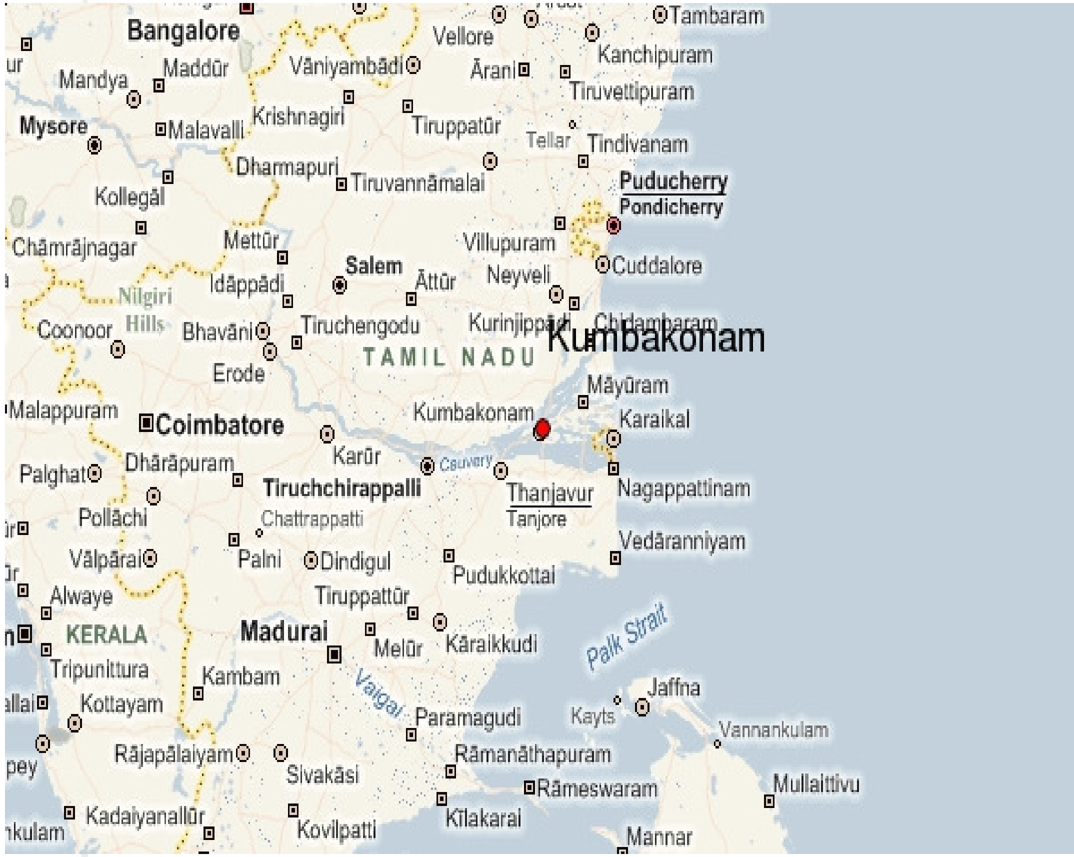
- L’Inde du Sud à la fin du XIX$^{e}$ siècle
- Srinivasa Ramanujan (1887–1920)
- Cambridge, Hardy et la guerre
- Le voyage des carnets
- Un siècle d’édition
- Le « mystère » sur des exemples

# L’Inde du Sud
# à la fin du XIXe siècle

- Capitale : Madras (aujourd’hui Chennaï)
- La colonisation britannique jusqu’en 1947
- Des traditions fortes (castes, religion, famille)
- La vie spirituelle encouragée (hindouisme…)
- Climat tropical
- Économie agricole et artisanale
- Train opérationnel depuis 1877

# Kumbakonam

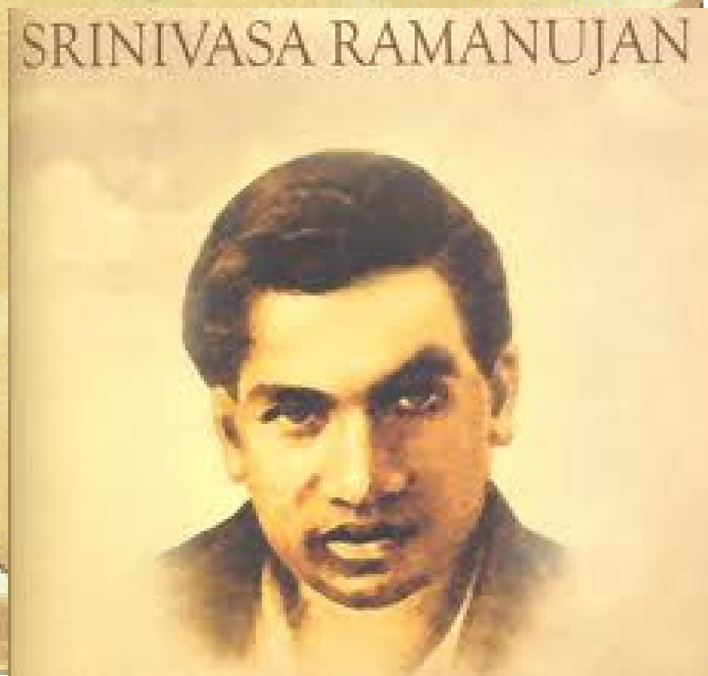
- État du Tamil Nadu, 300 km au sud de Chennaï
- « Chef-lieu de canton », district de Thanjavur
- Ville réputée pour son tissu (saris en soie) et le travail fin des métaux (cuivre, argent…)
- 50 000 habitants en 1880, 60 000 en 1900
- Une ville de pèlerinage (plus de douze temples)
- Ville phare du brahmanisme (caste supérieure)
- Eau non potable (moustiques, éléphantiasis…)


La Kâverî est un fleuve sacré

# Ramanujan

- Né à Érode le 22 décembre 1887
- Vit avec sa famille à Kumbakonam
- Brahmane très observant (végétarien…)

# Une enfance difficile

- Une famille non fortunée
- Variole et autres maladies, santé fragile
- Nombreux décès dans la famille

# Scolarité

- « Primary examination » (arithmétique, tamoul, anglais, géographie) : 1^er^ du district, à 9 ans !
- À 14 ans : déjà célèbre dans l'académie pour ses capacités en mathématiques
- À 15 ans : découvre le livre de Carr

  décide de se consacrer aux maths

  abandon des autres matières

*A synopsis of elementary results in pure mathematics*, George Shoobridge Carr, 1880 (deux volumes)

A BRIEF BIOGRAPHY OF RAMANUJAN

A SYNOPSIS

ELEMENTARY RESULTS

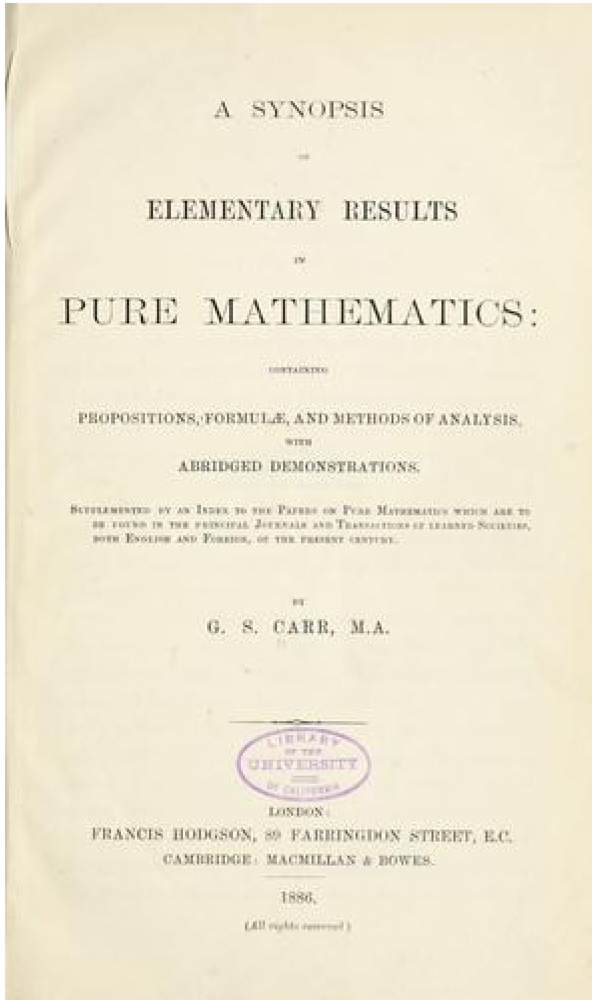
PURE MATHEMATICS

G. S. CARR, M.A.

LONDON

FRANCIS HODGSON, 89 FARRINGDON STREET, E.C.

CAMBRIDGE: MACMILLAN & BOWES.



A SYNOPSIS

OF

ELEMENTARY RESULTS

IN

PURE MATHEMATICS:

CONTAINING

PROPOSITIONS, FORMULÆ, AND METHODS OF ANALYSIS,

WITH

ABRIDGED DEMONSTRATIONS.

BY

G. S. CARR, M.A.



LONDON:

FRANCIS HODGSON, 89 FARRINGDON STREET, E.C.

CAMBRIDGE: MACMILLAN & BOWES.

1886.

# Conséquences…

- Se consacre jour et nuit aux mathématiques
- Recense ses **découvertes** dans des carnets
- Échec à tous les examens à venir
- Perte de sa bourse d'études
- Mariage arrangé avec Janaki (9 ans)
pour l'obliger à s'assumer, petits boulots

- Tente de faire reconnaître
**la valeur de son travail**

# Des contacts

- Ramanujan constitue un réseau
- Problème : est-ce un génie ou un illuminé ?
- Mécénat de Ramachandra Rao (Madras)
- Aide de l'Indian Mathematical Society
- Aide de l'université
- Travaille **intensément**
- Doit demander conseil à des experts…

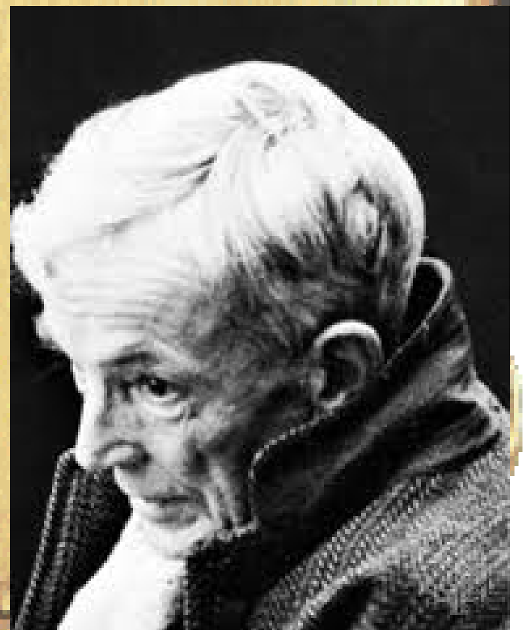
# Les lettres

1912–1913

- Première lettre : Henry Frederick Baker (48 ans, Fellow of the Royal Society) Pas de réponse positive…
- Deuxième lettre : Ernest William Hobson (56 ans, Fellow of the Royal Society) Pas de réponse positive…
- Troisième lettre : **Godfrey Harold Hardy**

# Godfrey Hardy
# (1877–1947)

- Né le 7 février 1877
- Incontestablement le plus grand scientifique britannique depuis Newton



# En 1913…

- 35 ans, 3 livres à son crédit
- 100 articles publiés depuis quinze ans
- Fellow of the Royal Society depuis 1910
- A commencé à constituer une école
- Encourage les maths de son temps
- Bien installé à Cambridge et dans sa carrière
- Fin janvier 1913, il reçoit une lettre…

# Quelques formules (notations modernes) contenues dans la lettre de Ramanujan à Hardy, datée du 16 janvier 1913

$$1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4-\ldots=\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\ldots\right) \tag{1}$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi} \tag{2}$$

$$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\ldots=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2} \tag{3}$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5+\ldots=\frac{2}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^4} \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2}\ldots dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b+1)\Gamma\left(b-a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b-a+1)} \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\ldots}=\frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\ldots)} \tag{6}$$

$$\text{Si } \alpha\beta=\pi^2\text{, alors } \alpha^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\alpha\int_0^\infty\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right)=\beta^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\beta\int_0^\infty\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}dx\right) \tag{7}$$

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}-\cfrac{e^{-a^2}}{2a+\cfrac{1}{a+\cfrac{2}{2a+\cfrac{3}{a+\cfrac{4}{2a+\ldots}}}}} \tag{8}$$

$$4\int_0^\infty\frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}dx=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\ldots}}}}}}} \tag{9}$$

$$\text{Si } u=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^{10}}{1+\cfrac{x^{15}}{1+\ldots}}}}\text{ et } v=\cfrac{x^{\frac{1}{5}}}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\ldots}}}}\text{, alors } v^5=u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4} \tag{10}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}}}=\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{\frac{2}{5}\pi} \tag{11}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}}}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} \tag{12}$$

# L’invitation

- Hardy invite Ramanujan à Cambridge
- Idée : le former aux maths **de son temps**
- Le 17 mars 1914, le prodige embarque
- Il cesse de consigner ses découvertes dans des carnets
- À peine Ramanujan arrivé (le 14 avril 1914), la Grande Guerre éclate (4 août 1914)

# Ramanujan à Cambridge

- De nombreux problèmes :
  Le climat, le régime alimentaire, les vêtements, l'ostracisme, la solitude, une autre culture
- Accentués par la guerre :
  Le rationnement, l'explosion des prix, les pénuries, des mathématiciens mobilisés
- L'université de Cambridge :
  Hôpital et camp d'entraînement, pas de lumière la nuit, coupures d'électricité

# La maladie

- Un séjour qui se prolonge
- Tensions entre sa femme et sa mère
- Privations, travail intense, vie rude, guerre

La maladie (amibiase hépatique)

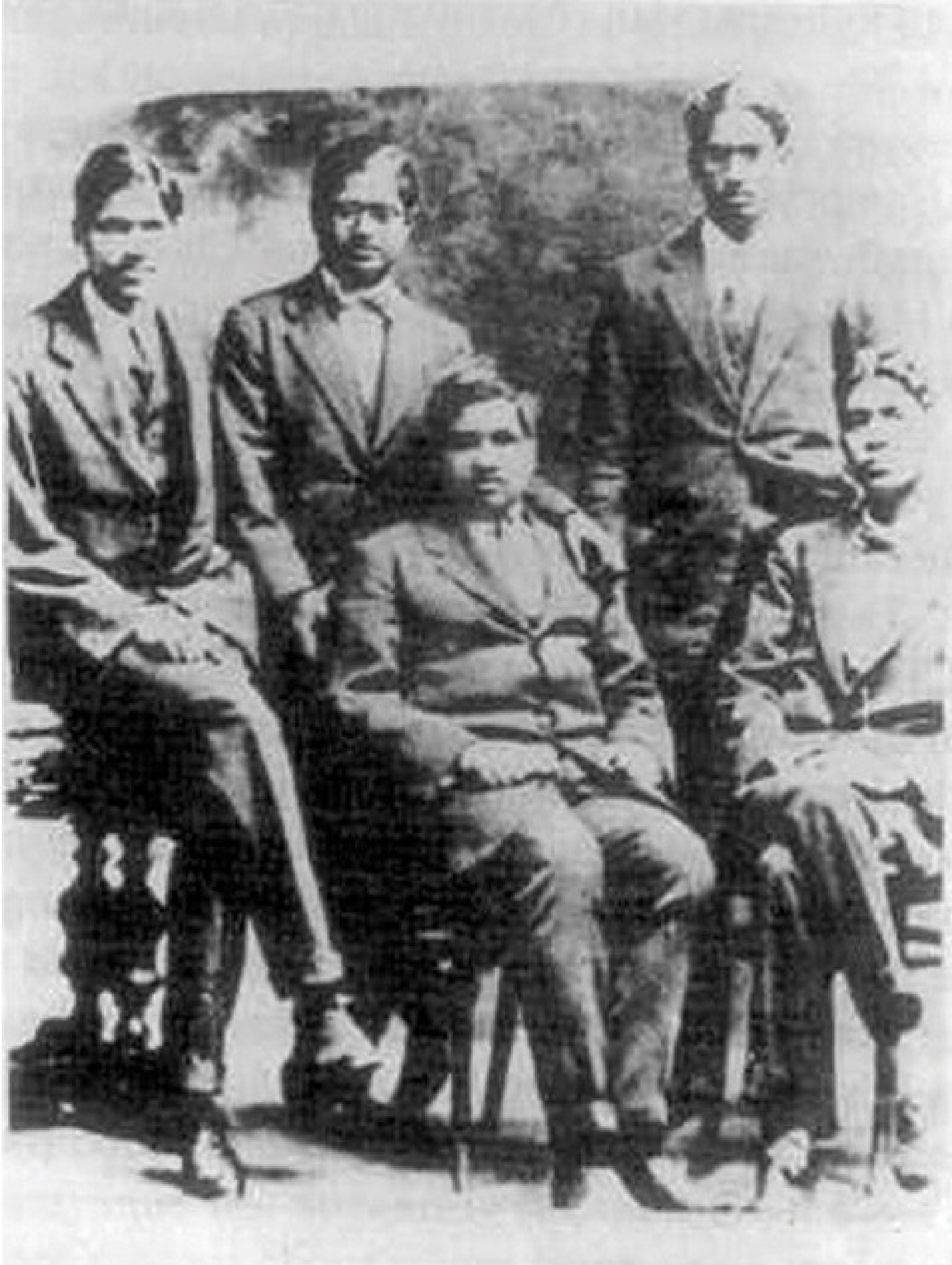
Terrible souffrance physique

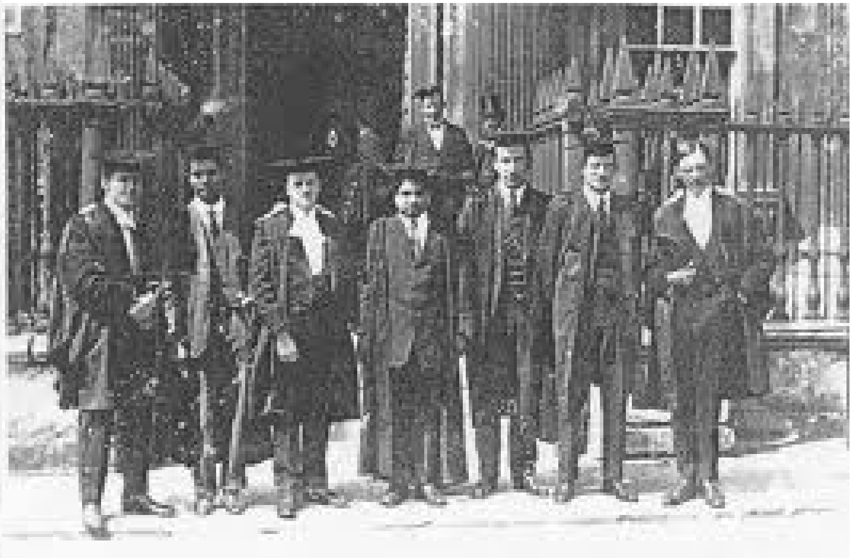
Diagnostics erronés (tuberculose…)

Aucun traitement ne semble efficace

# Retour en Inde

- 1917–1918 : sanatoriums (Matlock, Fitzroy…)
- 1917 : Fellow of the London Mathematical Society
- 1918 : Fellow of the Royal Society (30 ans !)
  Fellow of Trinity College, Cambridge
  retrouve de l'énergie pour ses recherches
- 1919 : de retour en Inde, c'est un héros national
  la maladie empire
- 1920 : ultimes contributions mathématiques
  décès le 26 avril 1920 (32 ans)





Srinivasa Ramanujan (centre) G.H. Hardy (extreme right), with others at Trinity College, Cambridge.

# Les contributions mathématiques

De nombreux domaines abordés :

**séries** (hypergéométriques, de Dirichlet, de Lambert, d’Eisenstein, bilatérales, *q*-séries), **fonctions spéciales** (fonctions thêta, fausses fonctions thêta, fonctions thêta déguisées, fonctions elliptiques), **analyse combinatoire** (nombres de Bernoulli, transformations, identités remarquables, invariants de classe, équations modulaires, modules singuliers), **théorie des nombres** (fonctions arithmétiques, fractions continues, radicaux imbriqués, nombre de partitions, fonction tau), **analyse** (produits infinis, calcul intégral, développements asymptotiques, formules d’inversion, produit de Hadamard), trigonométrie, géométrie…

# Points d'orgue

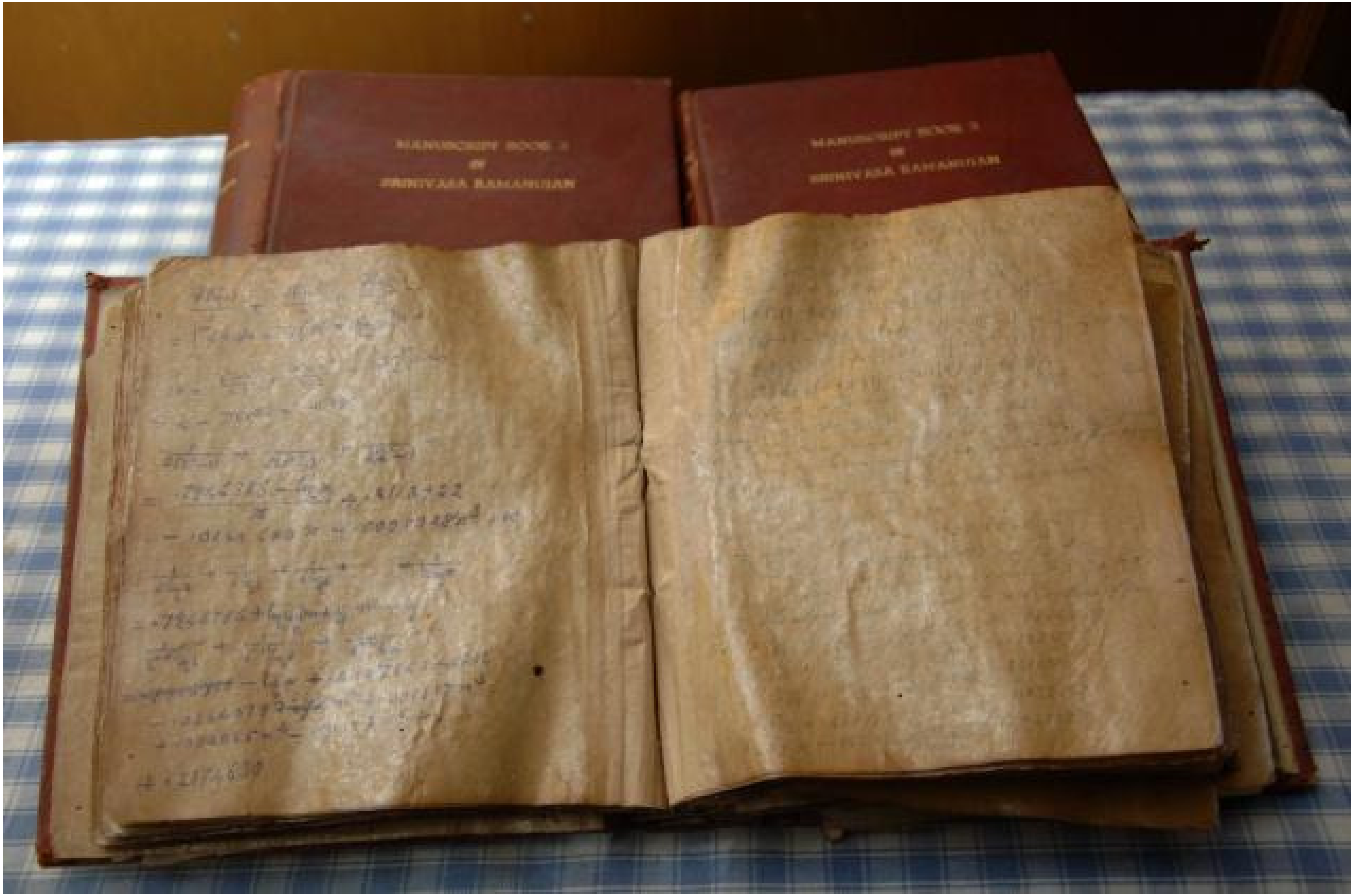
- Une théorie des séries divergentes
- Une théorie des fonctions elliptiques
  en bases alternatives
- La fraction continue de Rogers–Ramanujan
- De nouvelles formules pour approximer pi
- Travaux sur la fonction tau
- La théorie des partitions

# Publications

- Une vingtaine d'articles en Europe
- Une vingtaine de notes
- Une abondante correspondance (Hardy…)
- 3 rapports trimestriels (université de Chennaï)
  formules d'interpolation, théorème maître de Ramanujan
- 58 problèmes soumis au *Journal of the Indian Mathematical Society*
- … et **3 carnets**

# Les carnets

- Compilés entre 1903 et 1914
- Assemblage grossier de feuilles de papier
- Uniquement des résultats aboutis
  - Absence de développements, d'explications, de définitions, de conventions, de notations…
  - Calculs réalisés sur ardoise
  - Coût du papier
  - « Carte de visite », non destinés à publication



# Le voyage des carnets

- Ne quittent jamais Ramanujan en Inde
- Aujourd'hui à l'Université de Chennaï
- 1927 : édition des œuvres complètes *publiées* de Ramanujan, par Hardy
- 1957 : le Tata Institute of Fondamental Research à Bombay publie un Photostat des carnets (2 volumes, aucune édition)

# Le premier carnet

- 351 pages, 16 chapitres
- Une recension des recherches menées par Ramanujan
- Un premier chapitre datant de l’enfance (!)
- Peu d’organisation
- Gestion confuse des pages

# Le deuxième carnet

- 356 pages
- Une réorganisation du premier carnet en 21 chapitres
- Volonté de publier ces résultats
- Contient 100 pages de contenus mathématiques divers et non organisés

# Le troisième carnet

- 33 pages
- Aucune structuration logique apparente
- Carnet plus tardif que les deux premiers

**Remarques :** Sur les trois carnets,

moins d’une vingtaine de résultats sont accompagnés d’une quelconque indication

De nombreux résultats sont déjà connus

# Un style lacunaire

- Des carnets personnels, pas destinés à être lus
- Ramanujan adopte un style proche de celui de Carr : des formules sans preuves
- Il sait (ou croit savoir) prouver ce qu'il écrit
- Au lecteur de se fabriquer ses démonstrations
- Ramanujan refuse de dévoiler ses techniques

# Il faut
# les éditer !

- 1920 : Hardy plaide pour une édition des trois carnets de Ramanujan
- Pour les résultats déjà connus : produire une référence précise
- Pour les résultats corrects : en fournir une preuve, si possible dans l’esprit de l’auteur
- Pour les résultats faux : un résultat correct n’est sans doute pas loin, il faut le chercher…

# L’édition

- 1920–1947 : Hardy produit une vingtaine d’articles inspirés des carnets
- 1927 : pas d’argent pour l’édition des carnets avec les œuvres complètes
- 1929–1940 : travail d’édition systématique entrepris par **Bertram Martin Wilson** et **George Neville Watson**

# Watson et Wilson

- 1929–1931 : début du chantier
- 1931 : la tâche est estimée à cinq ans
- Le carnet 2 est privilégié (Wilson : chapitres 2 à 14, Watson : chapitres 15 à 21)
- 1935 : décès de Wilson (38 ans)
- Années 1930 : Watson produira des notes et plus de 30 articles, avant d'abandonner

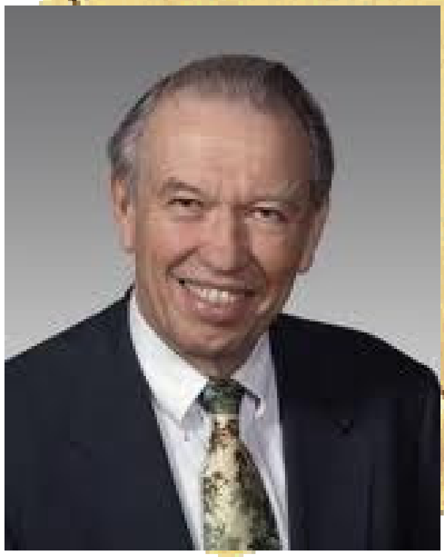
# La transition

- 1923 : manuscrits envoyés à Hardy
- 1934–1947 : documents transmis à Watson
- 1947 : mort de Hardy (70 ans)
- 1965 : mort de Watson (79 ans)

  que faire des documents retrouvés ?
- 1965, 1968,1969 : envois à Trinity College
- Les documents dorment à la bibliothèque…

# 1976

- George Andrews (né en 1938) : spécialiste des *q*-séries et des fonctions spéciales
- Connaît bien les travaux de Ramanujan
- 1976 : visite Trinity College pour consulter les notes de Watson



découvre des manuscrits inattendus

# Le carnet perdu

- 138 pages manuscrites de Ramanujan
- 600 résultats (*q*-séries, fonctions thêta…)
- Travaux réalisés durant l'année 1920
- Ni un « carnet », ni « perdu »
- Absence de texte
- Difficile à lire
- 1987 : copie élargie rendue disponible

# Un siècle d’édition

- Hardy : une vingtaine d’articles
- Watson, Wilson : 6 à 8 chapitres du carnet 2
- Facs-similés des carnets disponibles en 1957
- Fac-similé du carnet perdu en 1987
- Andrews : une trentaine d’articles
- Travaux académiques épars

# Bruce Berndt

- Né en 1939
- Théoricien des nombres (analyse et séries)
- 1974 : en résidence à Princeton pour un an

lit deux articles de Grosswald qui prouvent des formules de Ramanujan

Berndt sait les prouver !

peut-il en prouver d'autres ?

# Chapitre 14

- Toutes les formules sont dans le carnet 2, chapitre 14
- Mai 1977 : prouver les 87 formules (1 an !)
- Depuis 1978 : éditer les trois carnets
- Démarche systématique, rigoureuse, tenace
- Aide de nombreux mathématiciens, d’étudiants, de Springer, de fondations…

# 21 ans
# plus tard…

- L’édition des trois carnets est achevée !!!
- **3 254 résultats** (comptabilité de Berndt)
- **Moins d’une dizaine sont faux**
- **Les deux tiers sont originaux**
- 5 livres (2 300 pages)
- Plus de 100 articles

# 5 livres

- 1985 : carnet 2 (ch. 1 à 9) + rapports
- 1989 : carnet 2 (chapitres 10 à 15)
- 1991 : carnet 2 (16 à 21)
- 1994 : carnets 2 et 3 + carnet 1 (ch. 1 à 16)
- 1998 : carnets 1, 2 et 3
- Plus : édition de la correspondance
  *The Ramanujan Journal*
  essais, articles, ouvrages techniques

# *Quid* du carnet perdu ?

- Plusieurs dizaines d'articles de G. Andrews
- Éditions systématique avec B. Berndt :
  - 2005, volume I, 440 pages
  - 2009, volume II, 420 pages
  - 2012, volume III, 446 pages
  - 2013, volume IV, 452 pages
  - Dernier volume attendu (en 2015 ?)

# Citations 1

- *« Des formules telles que, s'il ne les avait pas écrites, personne ne les aurait trouvées, même dans cent ans, même dans deux cents ans »* (Berndt)
- *« Sans aucun doute, Ramanujan pensait comme tout autre mathématicien, il pensait simplement* "with more insight" *que la majorité d'entre nous »* (Berndt)

# Citations 2

- *« Ramanujan savait parfaitement quand ses méthodes heuristiques le conduisaient à des résultats corrects, et quand ce n'était pas le cas »* (Berndt)
- *« Personne, dans l'histoire des mathématiques, ne possédait l'habileté de Ramanujan dans le domaine des fractions continues ou des radicaux imbriqués »* (Berndt)

# Florilège

$$\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}=3{,}1416\ldots$$

370

(1) $\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}} = 3.14164\ldots\ldots = \pi + .00005$ (!!)

(2). $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{7}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{13}{4^2}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \frac{19}{4^3}\cdot\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \ldots$

(3). $\frac{16}{\pi} = 5 + \frac{47}{64}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{89}{64^2}\cdot\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \frac{131}{64^3}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \ldots$

(4) $\frac{8(1+\sqrt{5})}{\pi} = (6+\sqrt{5}) + (66+19\sqrt{5})\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{64}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 +$

$$2\sin\frac{\pi}{18} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{\ldots}}}}}$$

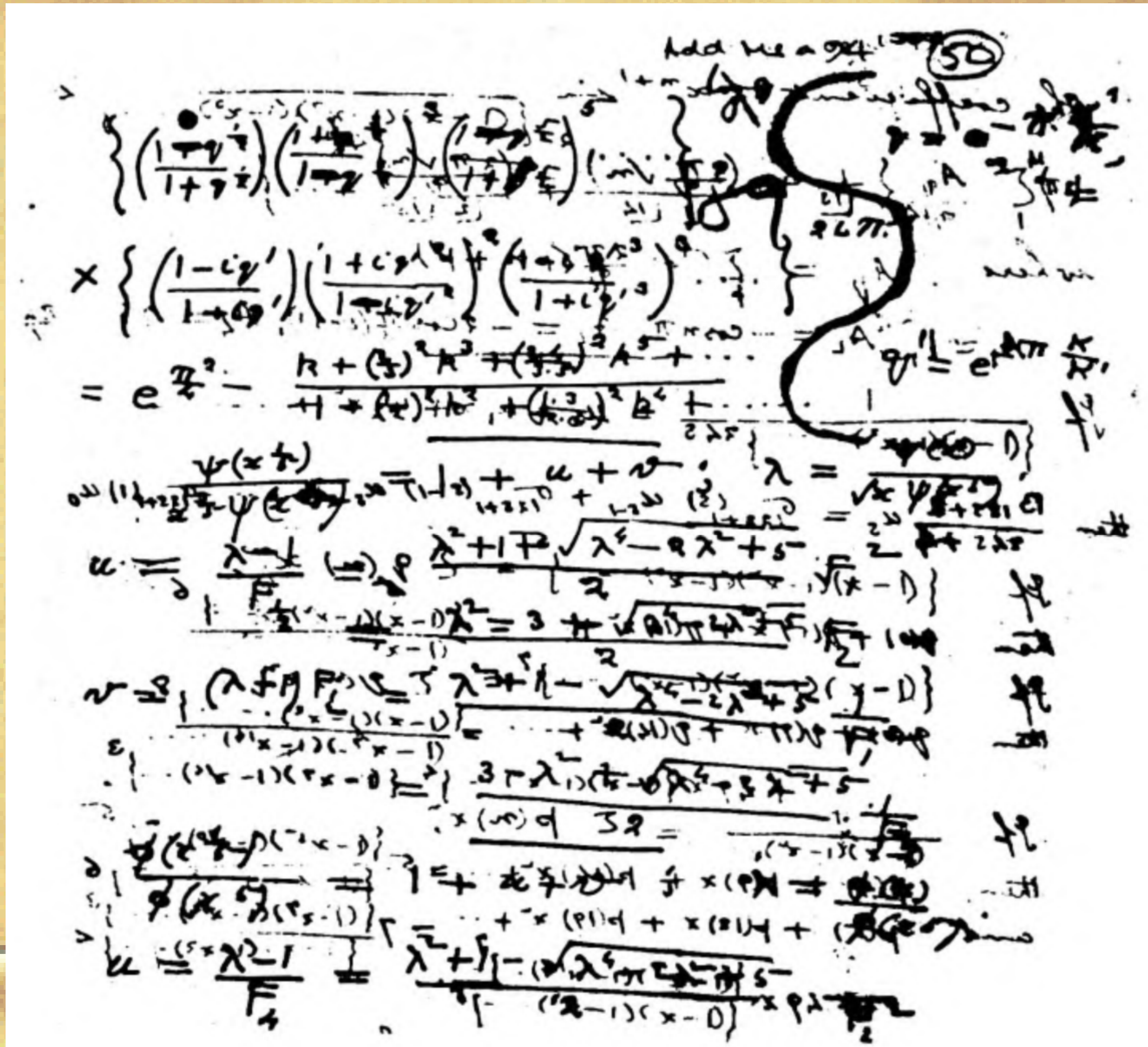
où la suite des signes $-, +, +$ a pour période 3

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - 2\right)}$$

$$\frac{\sum_{n\geq 0} e^{-7\pi n^2}}{\sum_{m\geq 0} e^{-\pi m^2}} = \sqrt[8]{28}\,\frac{\sqrt{13+\sqrt{7}}+\sqrt{13+3\sqrt{7}}}{14}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\dots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{\frac{2\pi}{5}}$$

# Page 209 du carnet perdu



# Page 209
# du carnet perdu

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \qquad q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}, \qquad 0 < k < 1.$$

$$\left(\prod_{n\geq 0}\left(\frac{1-(-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}}{1+(-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}}\right)^{2n+1}\right)^{\log q}\left(\prod_{m\geq 1}\left(\frac{1+(-1)^m iq'^m}{1-(-1)^m iq'^m}\right)^{m}\right)^{2i\pi}=\exp\left(\frac{\pi^2}{4}-k\frac{\displaystyle\sum_{r\geq 0}\frac{\left((r+1)!\right)^3 k^{2r}}{r!\left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\ldots\times\frac{2r+3}{2}\right)^2}}{\displaystyle\sum_{j\geq 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{2j+1}{2}\right)^2 k^{2j}}{j!(j+1)!}}\right)$$

# Déchiffrage

- Formule presque illisible (copie médiocre)
- Seuls les trois premiers termes de chaque série sont écrits
- K et K’ non définis
- Aucune telle formule dans la littérature
- Pas même dans les travaux de Ramanujan !

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \mathrm{K}' = \mathrm{K}(k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

# Explication (?)

- Découle d’une connexion unique et presque miraculeuse entre séries hypergéométriques et fonctions elliptiques
- Cette connexion n’est pas comprise
- Accident, ou y en a-t-il d’autres ?
- Comment concevoir qu’une telle formule existe ?
- Comment en déterminer les éléments ?

# Voici cette connexion :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\mathrm{K}\left(\sqrt{1-k^2}\right)}{\mathrm{K}(k)}\right)} = \frac{k\sum_{r\geq 0} \frac{r+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{2r+3}{2}\right)^2}\left((r+1)!\right)^2 k^{2r}}{2\sum_{m\geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}{(m!)^2}\frac{k^{2m}}{m+1}}$$

Fonctions elliptiques

Séries hypergéométriques

On trouve cette formule dans le carnet 2…

# Un génie

*« Son talent était exceptionnellement hors du commun, et il est l’un des rares mathématiciens contemporains que je qualifierais de génie au sens populaire du terme »* (Tao)

# Mystères…

« *Les méthodes de Ramanujan pour calculer les invariants de classe demeurent en grande partie dans une obscurité impénétrable ; c'est regrettable qu'il ne nous ait laissé aucun indice* » (Berndt)

# Références


*The Man Who Knew Inifinity – A Life of the Genius Ramanujan*. Robert Kanigel, Washington Square Press, 1991

*Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan*. Bernard Randé, Cassini, 2002

*An Overview of Ramanujan’s Notebooks.*

In:

*Charlemagne and his Heritage: 1200 Years of Civilization and Science in Europe*, volume 2 (*Mathematical Arts*), édité par P.L. Butzer, H.T. Jongen et W. Oberschelp, Brepolz, Turnhout, pp. 119–146, 1998

*Ramanujan's Notebooks – Part I.*
Bruce Berndt, Springer, 1985

*Ramanujan's Notebooks – Part II.*
Bruce Berndt, Springer, 1989

*Ramanujan's Notebooks – Part III.*
Bruce Berndt, Springer, 1991

*Ramanujan's Notebooks – Part IV.*
Bruce Berndt, Springer, 1994

*Ramanujan's Notebooks – Part V.*
Bruce Berndt, Springer, 1998

*Ramanujan's Lost Notebook – Part I.*
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2005

*Ramanujan's Lost Notebook – Part II.*
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2009

*Ramanujan's Lost Notebook – Part III.*
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2012

*Ramanujan's Lost Notebook – Part IV.*
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2013

# Partitions

$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

On écrit : $p(4) = 5$.

On calcule que $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$…

$p(7) = 15$, $p(100) = 190\,569\,292$…

**Question :**

quelles sont les propriétés
de la fonction $p$ ?

# Un exemple

- 50,04 % des $p(n)$ inférieurs à $10^6$ sont pairs, et 49,96 % sont impairs…

  La proportion des nombres pairs est-elle ½ ?
- 33,1 % des $p(n)$ inférieurs à 3 200 sont multiples de 3. La proportion est-elle 1/3 ?
- 34,6 % des $p(n)$ inférieurs à 2 000 sont multiples de 5…
- **Quelle est la distribution des valeurs $p(n)$ ?**
- Pas le moindre angle d'attaque…

# Des réponses

- $p(5k+4)$ est un multiple de 5
  $p(7k+5)$ est un multiple de 7
  $p(11k+6)$ est un multiple de 11
- $$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$
- Vers une formule *exacte* (Rademacher, 1943)