

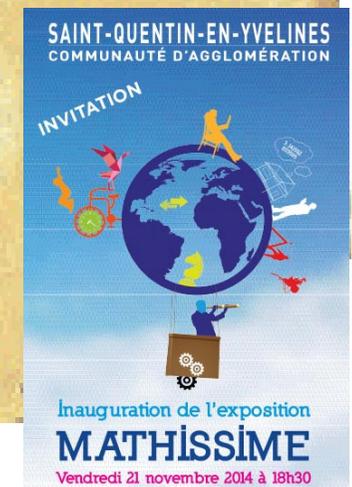
Les mystérieux carnets de Ramanujan

Édouard Thomas
Revue *Tangente*

**Maison de l'environnement, des sciences
et du développement durable**

6 rue Haroun Tazieff
78114 Magny-les-Hameaux

Jeudi 4 décembre 2014



Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

- Un mathématicien passionné
- Une destinée fulgurante
- Une intuition puissante et mystérieuse
- Des formules mathématiques inédites
- Un héritage inouï : les carnets

Sommaire

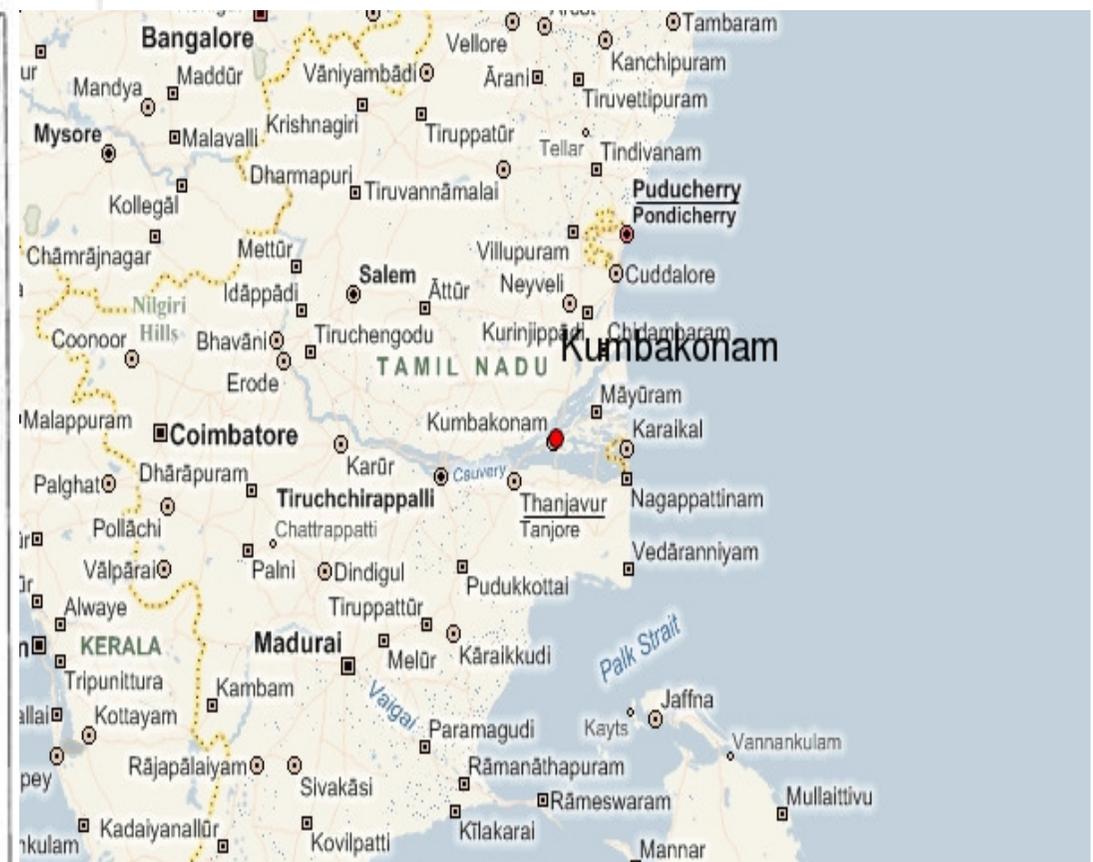
- L'Inde du Sud à la fin du XIX^e siècle
- Srinivasa Ramanujan (1887–1920)
- Cambridge, Hardy et la guerre
- Le voyage des carnets
- Un siècle d'édition
- Le « mystère » sur des exemples

L'Inde du Sud à la fin du XIX^e siècle

- Capitale : Madras (aujourd'hui Chennai)
- La colonisation britannique jusqu'en 1947
- Des traditions fortes (castes, religion, famille)
- La vie spirituelle encouragée (hindouisme...)
- Climat tropical
- Économie agricole et artisanale
- Train opérationnel depuis 1877

Kumbakonam

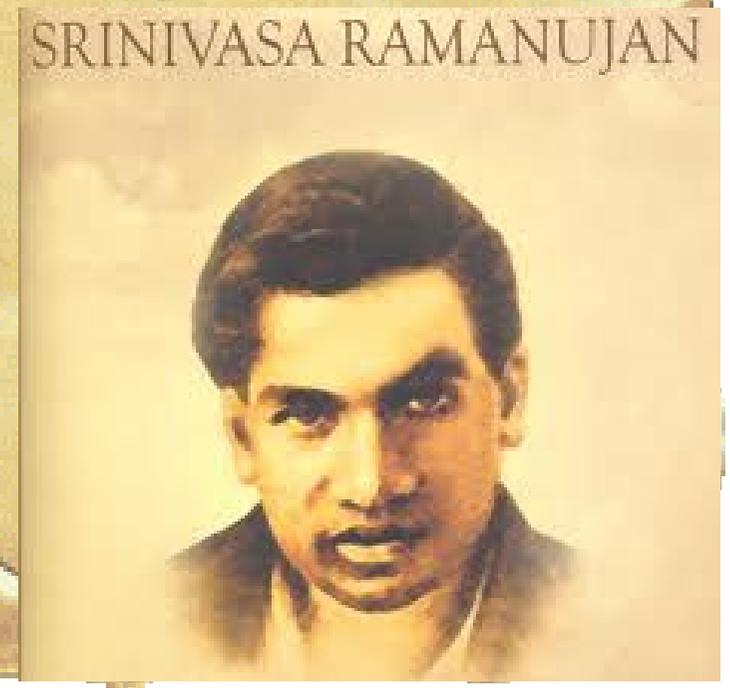
- État du Tamil Nadu, 300 km au sud de Chennai
- « Chef-lieu de canton », district de Thanjavur
- Ville réputée pour son tissu (saris en soie) et le travail fin des métaux (cuivre, argent...)
- 50 000 habitants en 1880, 60 000 en 1900
- Une ville de pèlerinage (plus de douze temples)
- Ville phare du brahmanisme (caste supérieure)
- Eau non potable (moustiques, éléphantiasis...)



La Kâverî est un fleuve sacré

Ramanujan

- Né à Érode le 22 décembre 1887
- Vit avec sa famille à Kumbakonam
- Brahmane très observant (végétarien...)



Une enfance difficile

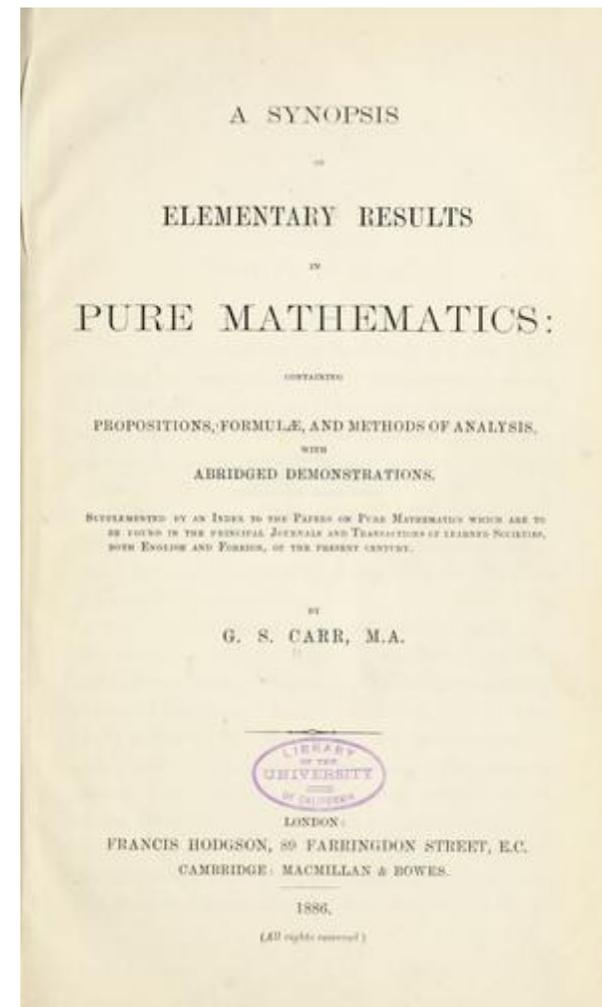
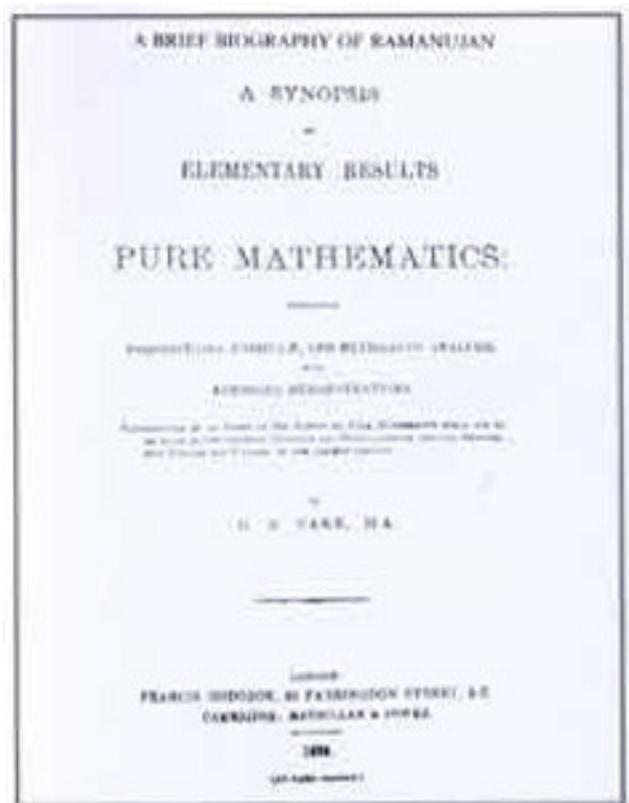
- Une famille non fortunée
- Variole et autres maladies, santé fragile
- Nombreux décès dans la famille



Scolarité

- « Primary examination » (arithmétique, tamoul, anglais, géographie) : 1^{er} du district, à 9 ans !
- À 14 ans : déjà célèbre dans l'académie pour ses capacités en mathématiques
- À 15 ans : découvre le livre de Carr
décide de se consacrer aux maths
abandon des autres matières

A synopsis of elementary results in pure mathematics, George Shoobridge Carr, 1880 (deux volumes)



Conséquences...

- Se consacre jour et nuit aux mathématiques
- Recense ses **découvertes** dans des carnets
- Échec à tous les examens à venir
- Perte de sa bourse d'études
- Mariage arrangé avec Janaki (9 ans) pour l'obliger à s'assumer, petits boulots
 - Tente de faire reconnaître **la valeur de son travail**

Des contacts

- Ramanujan constitue un réseau
- Problème : est-ce un génie ou un illuminé ?
- Mécénat de Ramachandra Rao (Madras)
- Aide de l'Indian Mathematical Society
- Aide de l'université
- Travaille **intensément**
- Doit demander conseil à des experts...

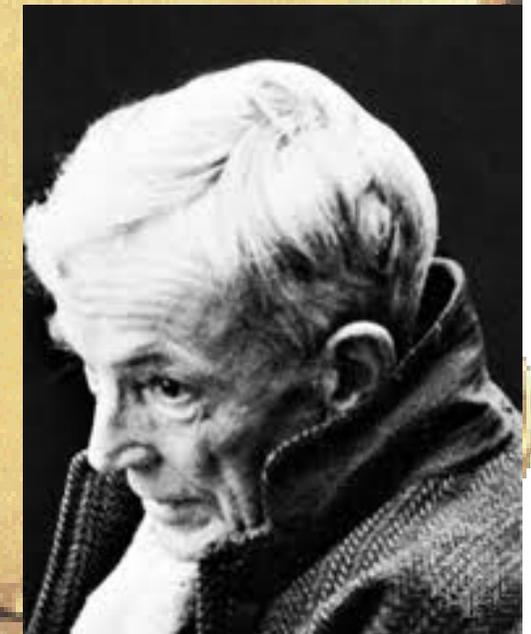
Les lettres

1912–1913

- Première lettre : Henry Frederick Baker
(48 ans, Fellow of the Royal Society)
Pas de réponse positive...
- Deuxième lettre : Ernest William Hobson
(56 ans, Fellow of the Royal Society)
Pas de réponse positive...
- Troisième lettre : **Godfrey Harold Hardy**

Godfrey Hardy (1877–1947)

- Né le 7 février 1877
- Incontestablement le plus grand scientifique britannique depuis Newton



En 1913...

- 35 ans, 3 livres à son crédit
- 100 articles publiés depuis quinze ans
- Fellow of the Royal Society depuis 1910
- A commencé à constituer une école
- Encourage les maths de son temps
- Bien installé à Cambridge et dans sa carrière
- Fin janvier 1913, il reçoit une lettre...

Quelques
formules
(notations
modernes)
contenues
dans la lettre
de Ramanujan
à Hardy,
datée du
16 janvier 1913

$$1 - \frac{3!}{(1!2!)^3}x^2 + \frac{6!}{(2!4!)^3}x^4 - \dots = \left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right) \left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \dots\right) \quad (1)$$

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi} \quad (2)$$

$$1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \dots = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{3}{2})]^2} \quad (3)$$

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^5 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^5 + \dots = \frac{2}{[\Gamma(\frac{3}{4})]^4} \quad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{1 + \left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+1}\right)^2} \dots dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2}) \Gamma(b+1) \Gamma(b-a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a) \Gamma(b + \frac{1}{2}) \Gamma(b-a+1)} \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^5+r^7+\dots)} \quad (6)$$

$$\text{Si } \alpha\beta = \pi^2, \text{ alors } \alpha^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{x e^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) = \beta^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{x e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) \quad (7)$$

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} - \frac{e^{-a^2}}{2a + \frac{1}{a + \frac{1}{2a + \frac{3}{2a + \frac{4}{2a + \dots}}}}} \quad (8)$$

$$4 \int_0^\infty \frac{x e^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x} dx = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1 + \frac{2^2}{1 + \frac{3^2}{1 + \frac{4^2}{1 + \dots}}}}} \quad (9)$$

$$\text{Si } u = \frac{x}{1 + \frac{x^5}{x^{10}}} \text{ et } v = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{x}{x^2}}, \text{ alors } v^5 = u \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4} \quad (10)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \dots}}} = \left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right] e^{\frac{2}{5}\pi} \quad (11)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right] e^{\frac{2}{5}\pi} \quad (12)$$

L'invitation

- Hardy invite Ramanujan à Cambridge
- Idée : le former aux maths **de son temps**
- Le 17 mars 1914, le prodige embarque
- Il cesse de consigner ses découvertes dans des carnets
- À peine Ramanujan arrivé (le 14 avril 1914), la Grande Guerre éclate (4 août 1914)

Ramanujan à Cambridge

- De nombreux problèmes :
Le climat, le régime alimentaire, les vêtements, l'ostracisme, la solitude, une autre culture
- Accentués par la guerre :
Le rationnement, l'explosion des prix, les pénuries, des mathématiciens mobilisés
- L'université de Cambridge :
Hôpital et camp d'entraînement, pas de lumière la nuit, coupures d'électricité

La maladie

- Un séjour qui se prolonge
- Tensions entre sa femme et sa mère
- Privations, travail intense, vie rude, guerre

La maladie (amibiase hépatique)

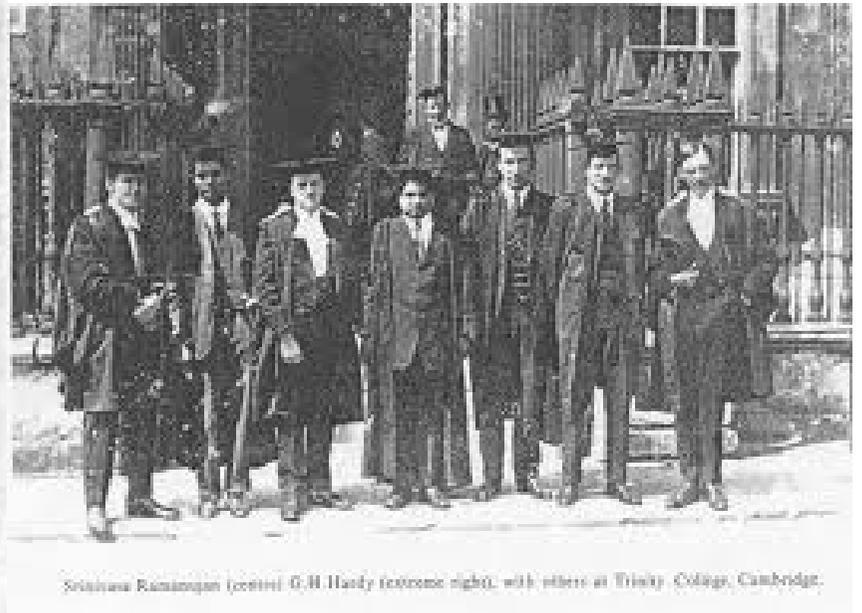
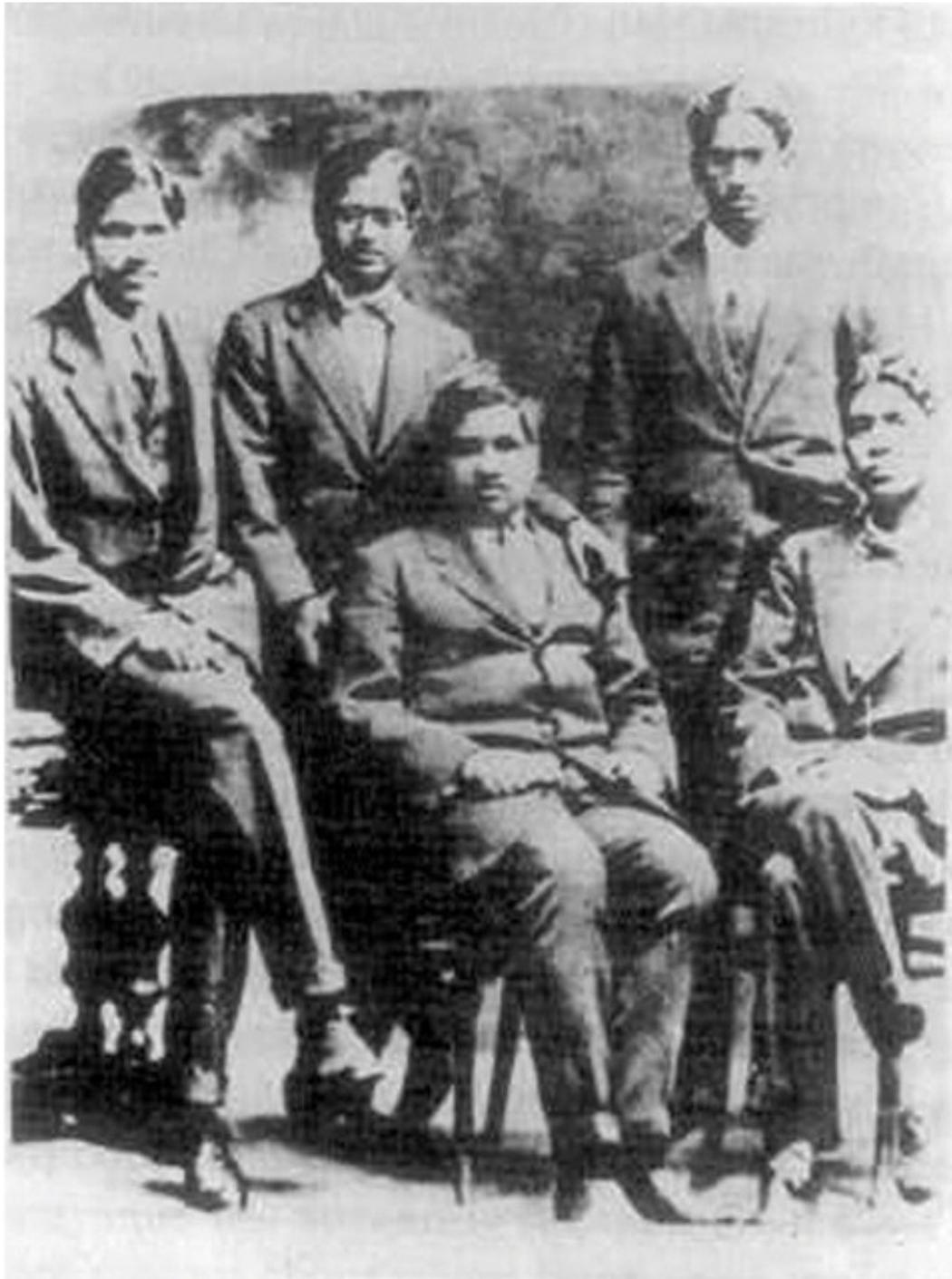
Terrible souffrance physique

Diagnostics erronés (tuberculose...)

Aucun traitement ne semble efficace

Retour en Inde

- 1917–1918 : sanatoriums (Matlock, Fitzroy...)
- 1917 : Fellow of the London Mathematical Society
- 1918 : Fellow of the Royal Society (30 ans !)
Fellow of Trinity College, Cambridge
retrouve de l'énergie pour ses recherches
- 1919 : de retour en Inde, c'est un héros national
la maladie empire
- 1920 : ultimes contributions mathématiques
décès le 26 avril 1920 (32 ans)



Srivani Ramanijan (center), G.H. Hardy (extreme right), with others at Trinity College, Cambridge.

Les contributions mathématiques

De nombreux domaines abordés :

séries (hypergéométriques, de Dirichlet, de Lambert, d'Eisenstein, bilatérales, q -séries), **fonctions spéciales** (fonctions thêta, fausses fonctions thêta, fonctions thêta déguisées, fonctions elliptiques), **analyse combinatoire** (nombres de Bernoulli, transformations, identités remarquables, invariants de classe, équations modulaires, modules singuliers), **théorie des nombres** (fonctions arithmétiques, fractions continues, radicaux imbriqués, nombre de partitions, fonction tau), **analyse** (produits infinis, calcul intégral, développements asymptotiques, formules d'inversion, produit de Hadamard), trigonométrie, géométrie...

Points d'orgue

- Une théorie des séries divergentes
- Une théorie des fonctions elliptiques en bases alternatives
- La fraction continue de Rogers–Ramanujan
- De nouvelles formules pour approximer π
- Travaux sur la fonction tau
- La théorie des partitions

Publications

- Une vingtaine d'articles en Europe
- Une vingtaine de notes
- Une abondante correspondance (Hardy...)
- 3 rapports trimestriels (université de Chennai)
formules d'interpolation, théorème maître de Ramanujan
- 58 problèmes soumis au *Journal of the Indian Mathematical Society*
- ... et **3 carnets**

Les carnets

- Compilés entre 1903 et 1914
- Assemblage grossier de feuilles de papier
- Uniquement des résultats aboutis
 - Absence de développements, d'explications, de définitions, de conventions, de notations...
 - Calculs réalisés sur ardoise
 - Coût du papier
 - « Carte de visite », non destinés à publication

MANUSCRIPT BOOK 2
OF
SRIVJAYA KAMAHARAN

MANUSCRIPT BOOK 3
OF
SRIVJAYA KAMAHARAN

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$
 $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{6}{60} + \frac{5}{60} = \frac{11}{60}$
 $\frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{4}{60} + \frac{3}{60} = \frac{7}{60}$
 $\frac{1}{25} + \frac{1}{30} = \frac{6}{150} + \frac{5}{150} = \frac{11}{150}$
 $\frac{1}{35} + \frac{1}{40} = \frac{8}{280} + \frac{7}{280} = \frac{15}{280}$
 $\frac{1}{45} + \frac{1}{50} = \frac{10}{450} + \frac{9}{450} = \frac{19}{450}$
 $\frac{1}{55} + \frac{1}{60} = \frac{12}{660} + \frac{11}{660} = \frac{23}{660}$
 $\frac{1}{65} + \frac{1}{70} = \frac{14}{910} + \frac{13}{910} = \frac{27}{910}$
 $\frac{1}{75} + \frac{1}{80} = \frac{16}{1200} + \frac{15}{1200} = \frac{31}{1200}$
 $\frac{1}{85} + \frac{1}{90} = \frac{18}{1530} + \frac{17}{1530} = \frac{35}{1530}$
 $\frac{1}{95} + \frac{1}{100} = \frac{20}{1900} + \frac{19}{1900} = \frac{39}{1900}$
 $\frac{1}{105} + \frac{1}{110} = \frac{22}{2310} + \frac{21}{2310} = \frac{43}{2310}$
 $\frac{1}{115} + \frac{1}{120} = \frac{24}{2760} + \frac{23}{2760} = \frac{47}{2760}$
 $\frac{1}{125} + \frac{1}{130} = \frac{26}{3250} + \frac{25}{3250} = \frac{51}{3250}$
 $\frac{1}{135} + \frac{1}{140} = \frac{28}{3780} + \frac{27}{3780} = \frac{55}{3780}$
 $\frac{1}{145} + \frac{1}{150} = \frac{30}{4350} + \frac{29}{4350} = \frac{59}{4350}$
 $\frac{1}{155} + \frac{1}{160} = \frac{32}{4960} + \frac{31}{4960} = \frac{63}{4960}$
 $\frac{1}{165} + \frac{1}{170} = \frac{34}{5610} + \frac{33}{5610} = \frac{67}{5610}$
 $\frac{1}{175} + \frac{1}{180} = \frac{36}{6300} + \frac{35}{6300} = \frac{71}{6300}$
 $\frac{1}{185} + \frac{1}{190} = \frac{38}{6930} + \frac{37}{6930} = \frac{75}{6930}$
 $\frac{1}{195} + \frac{1}{200} = \frac{40}{7800} + \frac{39}{7800} = \frac{79}{7800}$
 $\frac{1}{205} + \frac{1}{210} = \frac{42}{8580} + \frac{41}{8580} = \frac{83}{8580}$
 $\frac{1}{215} + \frac{1}{220} = \frac{44}{9240} + \frac{43}{9240} = \frac{87}{9240}$
 $\frac{1}{225} + \frac{1}{230} = \frac{46}{10140} + \frac{45}{10140} = \frac{91}{10140}$
 $\frac{1}{235} + \frac{1}{240} = \frac{48}{11040} + \frac{47}{11040} = \frac{95}{11040}$
 $\frac{1}{245} + \frac{1}{250} = \frac{50}{11900} + \frac{49}{11900} = \frac{99}{11900}$
 $\frac{1}{255} + \frac{1}{260} = \frac{52}{12840} + \frac{51}{12840} = \frac{103}{12840}$
 $\frac{1}{265} + \frac{1}{270} = \frac{54}{13770} + \frac{53}{13770} = \frac{107}{13770}$
 $\frac{1}{275} + \frac{1}{280} = \frac{56}{14700} + \frac{55}{14700} = \frac{111}{14700}$
 $\frac{1}{285} + \frac{1}{290} = \frac{58}{15630} + \frac{57}{15630} = \frac{115}{15630}$
 $\frac{1}{295} + \frac{1}{300} = \frac{60}{16560} + \frac{59}{16560} = \frac{119}{16560}$
 $\frac{1}{305} + \frac{1}{310} = \frac{62}{17490} + \frac{61}{17490} = \frac{123}{17490}$
 $\frac{1}{315} + \frac{1}{320} = \frac{64}{18420} + \frac{63}{18420} = \frac{127}{18420}$
 $\frac{1}{325} + \frac{1}{330} = \frac{66}{19350} + \frac{65}{19350} = \frac{131}{19350}$
 $\frac{1}{335} + \frac{1}{340} = \frac{68}{20280} + \frac{67}{20280} = \frac{135}{20280}$
 $\frac{1}{345} + \frac{1}{350} = \frac{70}{21210} + \frac{69}{21210} = \frac{139}{21210}$
 $\frac{1}{355} + \frac{1}{360} = \frac{72}{22140} + \frac{71}{22140} = \frac{143}{22140}$
 $\frac{1}{365} + \frac{1}{370} = \frac{74}{23070} + \frac{73}{23070} = \frac{147}{23070}$
 $\frac{1}{375} + \frac{1}{380} = \frac{76}{24000} + \frac{75}{24000} = \frac{151}{24000}$
 $\frac{1}{385} + \frac{1}{390} = \frac{78}{24930} + \frac{77}{24930} = \frac{155}{24930}$
 $\frac{1}{395} + \frac{1}{400} = \frac{80}{25860} + \frac{79}{25860} = \frac{159}{25860}$
 $\frac{1}{405} + \frac{1}{410} = \frac{82}{26790} + \frac{81}{26790} = \frac{163}{26790}$
 $\frac{1}{415} + \frac{1}{420} = \frac{84}{27720} + \frac{83}{27720} = \frac{167}{27720}$
 $\frac{1}{425} + \frac{1}{430} = \frac{86}{28650} + \frac{85}{28650} = \frac{171}{28650}$
 $\frac{1}{435} + \frac{1}{440} = \frac{88}{29580} + \frac{87}{29580} = \frac{175}{29580}$
 $\frac{1}{445} + \frac{1}{450} = \frac{90}{30510} + \frac{89}{30510} = \frac{179}{30510}$
 $\frac{1}{455} + \frac{1}{460} = \frac{92}{31440} + \frac{91}{31440} = \frac{183}{31440}$
 $\frac{1}{465} + \frac{1}{470} = \frac{94}{32370} + \frac{93}{32370} = \frac{187}{32370}$
 $\frac{1}{475} + \frac{1}{480} = \frac{96}{33300} + \frac{95}{33300} = \frac{191}{33300}$
 $\frac{1}{485} + \frac{1}{490} = \frac{98}{34230} + \frac{97}{34230} = \frac{195}{34230}$
 $\frac{1}{495} + \frac{1}{500} = \frac{100}{35160} + \frac{99}{35160} = \frac{199}{35160}$
 $\frac{1}{505} + \frac{1}{510} = \frac{102}{36090} + \frac{101}{36090} = \frac{203}{36090}$
 $\frac{1}{515} + \frac{1}{520} = \frac{104}{37020} + \frac{103}{37020} = \frac{207}{37020}$
 $\frac{1}{525} + \frac{1}{530} = \frac{106}{37950} + \frac{105}{37950} = \frac{211}{37950}$
 $\frac{1}{535} + \frac{1}{540} = \frac{108}{38880} + \frac{107}{38880} = \frac{215}{38880}$
 $\frac{1}{545} + \frac{1}{550} = \frac{110}{39810} + \frac{109}{39810} = \frac{219}{39810}$
 $\frac{1}{555} + \frac{1}{560} = \frac{112}{40740} + \frac{111}{40740} = \frac{223}{40740}$
 $\frac{1}{565} + \frac{1}{570} = \frac{114}{41670} + \frac{113}{41670} = \frac{227}{41670}$
 $\frac{1}{575} + \frac{1}{580} = \frac{116}{42600} + \frac{115}{42600} = \frac{231}{42600}$
 $\frac{1}{585} + \frac{1}{590} = \frac{118}{43530} + \frac{117}{43530} = \frac{235}{43530}$
 $\frac{1}{595} + \frac{1}{600} = \frac{120}{44460} + \frac{119}{44460} = \frac{239}{44460}$
 $\frac{1}{605} + \frac{1}{610} = \frac{122}{45390} + \frac{121}{45390} = \frac{243}{45390}$
 $\frac{1}{615} + \frac{1}{620} = \frac{124}{46320} + \frac{123}{46320} = \frac{247}{46320}$
 $\frac{1}{625} + \frac{1}{630} = \frac{126}{47250} + \frac{125}{47250} = \frac{251}{47250}$
 $\frac{1}{635} + \frac{1}{640} = \frac{128}{48180} + \frac{127}{48180} = \frac{255}{48180}$
 $\frac{1}{645} + \frac{1}{650} = \frac{130}{49110} + \frac{129}{49110} = \frac{259}{49110}$
 $\frac{1}{655} + \frac{1}{660} = \frac{132}{50040} + \frac{131}{50040} = \frac{263}{50040}$
 $\frac{1}{665} + \frac{1}{670} = \frac{134}{50970} + \frac{133}{50970} = \frac{267}{50970}$
 $\frac{1}{675} + \frac{1}{680} = \frac{136}{51900} + \frac{135}{51900} = \frac{271}{51900}$
 $\frac{1}{685} + \frac{1}{690} = \frac{138}{52830} + \frac{137}{52830} = \frac{275}{52830}$
 $\frac{1}{695} + \frac{1}{700} = \frac{140}{53760} + \frac{139}{53760} = \frac{279}{53760}$
 $\frac{1}{705} + \frac{1}{710} = \frac{142}{54690} + \frac{141}{54690} = \frac{283}{54690}$
 $\frac{1}{715} + \frac{1}{720} = \frac{144}{55620} + \frac{143}{55620} = \frac{287}{55620}$
 $\frac{1}{725} + \frac{1}{730} = \frac{146}{56550} + \frac{145}{56550} = \frac{291}{56550}$
 $\frac{1}{735} + \frac{1}{740} = \frac{148}{57480} + \frac{147}{57480} = \frac{295}{57480}$
 $\frac{1}{745} + \frac{1}{750} = \frac{150}{58410} + \frac{149}{58410} = \frac{299}{58410}$
 $\frac{1}{755} + \frac{1}{760} = \frac{152}{59340} + \frac{151}{59340} = \frac{303}{59340}$
 $\frac{1}{765} + \frac{1}{770} = \frac{154}{60270} + \frac{153}{60270} = \frac{307}{60270}$
 $\frac{1}{775} + \frac{1}{780} = \frac{156}{61200} + \frac{155}{61200} = \frac{311}{61200}$
 $\frac{1}{785} + \frac{1}{790} = \frac{158}{62130} + \frac{157}{62130} = \frac{315}{62130}$
 $\frac{1}{795} + \frac{1}{800} = \frac{160}{63060} + \frac{159}{63060} = \frac{319}{63060}$
 $\frac{1}{805} + \frac{1}{810} = \frac{162}{63990} + \frac{161}{63990} = \frac{323}{63990}$
 $\frac{1}{815} + \frac{1}{820} = \frac{164}{64920} + \frac{163}{64920} = \frac{327}{64920}$
 $\frac{1}{825} + \frac{1}{830} = \frac{166}{65850} + \frac{165}{65850} = \frac{331}{65850}$
 $\frac{1}{835} + \frac{1}{840} = \frac{168}{66780} + \frac{167}{66780} = \frac{335}{66780}$
 $\frac{1}{845} + \frac{1}{850} = \frac{170}{67710} + \frac{169}{67710} = \frac{339}{67710}$
 $\frac{1}{855} + \frac{1}{860} = \frac{172}{68640} + \frac{171}{68640} = \frac{343}{68640}$
 $\frac{1}{865} + \frac{1}{870} = \frac{174}{69570} + \frac{173}{69570} = \frac{347}{69570}$
 $\frac{1}{875} + \frac{1}{880} = \frac{176}{70500} + \frac{175}{70500} = \frac{351}{70500}$
 $\frac{1}{885} + \frac{1}{890} = \frac{178}{71430} + \frac{177}{71430} = \frac{355}{71430}$
 $\frac{1}{895} + \frac{1}{900} = \frac{180}{72360} + \frac{179}{72360} = \frac{359}{72360}$
 $\frac{1}{905} + \frac{1}{910} = \frac{182}{73290} + \frac{181}{73290} = \frac{363}{73290}$
 $\frac{1}{915} + \frac{1}{920} = \frac{184}{74220} + \frac{183}{74220} = \frac{367}{74220}$
 $\frac{1}{925} + \frac{1}{930} = \frac{186}{75150} + \frac{185}{75150} = \frac{371}{75150}$
 $\frac{1}{935} + \frac{1}{940} = \frac{188}{76080} + \frac{187}{76080} = \frac{375}{76080}$
 $\frac{1}{945} + \frac{1}{950} = \frac{190}{77010} + \frac{189}{77010} = \frac{379}{77010}$
 $\frac{1}{955} + \frac{1}{960} = \frac{192}{77940} + \frac{191}{77940} = \frac{383}{77940}$
 $\frac{1}{965} + \frac{1}{970} = \frac{194}{78870} + \frac{193}{78870} = \frac{387}{78870}$
 $\frac{1}{975} + \frac{1}{980} = \frac{196}{79800} + \frac{195}{79800} = \frac{391}{79800}$
 $\frac{1}{985} + \frac{1}{990} = \frac{198}{80730} + \frac{197}{80730} = \frac{395}{80730}$
 $\frac{1}{995} + \frac{1}{1000} = \frac{200}{81660} + \frac{199}{81660} = \frac{399}{81660}$

Le voyage des carnets

- Ne quittent jamais Ramanujan en Inde
- Aujourd'hui à l'Université de Chennai
- 1927 : édition des œuvres complètes *publiées* de Ramanujan, par Hardy
- 1957 : le Tata Institute of Fundamental Research à Bombay publie un Photostat des carnets (2 volumes, aucune édition)

Le premier carnet

- 351 pages, 16 chapitres
- Une recension des recherches menées par Ramanujan
- Un premier chapitre datant de l'enfance (!)
- Peu d'organisation
- Gestion confuse des pages

Le deuxième carnet

- 356 pages
- Une réorganisation du premier carnet en 21 chapitres
- Volonté de publier ces résultats
- Contient 100 pages de contenus mathématiques divers et non organisés

Le troisième carnet

- 33 pages
- Aucune structuration logique apparente
- Carnet plus tardif que les deux premiers

Remarques : Sur les trois carnets, moins d'une vingtaine de résultats sont accompagnés d'une quelconque indication
De nombreux résultats sont déjà connus

Un style lacunaire

- Des carnets personnels, pas destinés à être lus
- Ramanujan adopte un style proche de celui de Carr : des formules sans preuves
- Il sait (ou croit savoir) prouver ce qu'il écrit
- Au lecteur de se fabriquer ses démonstrations
- Ramanujan refuse de dévoiler ses techniques

Il faut les éditer !

- 1920 : Hardy plaide pour une édition des trois carnets de Ramanujan
- Pour les résultats déjà connus : produire une référence précise
- Pour les résultats corrects : en fournir une preuve, si possible dans l'esprit de l'auteur
- Pour les résultats faux : un résultat correct n'est sans doute pas loin, il faut le chercher...

L'édition

- 1920–1947 : Hardy produit une vingtaine d'articles inspirés des carnets
- 1927 : pas d'argent pour l'édition des carnets avec les œuvres complètes
- 1929–1940 : travail d'édition systématique entrepris par **Bertram Martin Wilson** et **George Neville Watson**

Watson et Wilson

- 1929–1931 : début du chantier
- 1931 : la tâche est estimée à cinq ans
- Le carnet 2 est privilégié (Wilson : chapitres 2 à 14, Watson : chapitres 15 à 21)
- 1935 : décès de Wilson (38 ans)
- Années 1930 : Watson produira des notes et plus de 30 articles, avant d'abandonner

La transition

- 1923 : manuscrits envoyés à Hardy
- 1934–1947 : documents transmis à Watson
- 1947 : mort de Hardy (70 ans)
- 1965 : mort de Watson (79 ans)

que faire des documents retrouvés ?

- 1965, 1968, 1969 : envois à Trinity College
- Les documents dorment à la bibliothèque...

1976

- George Andrews (né en 1938) : spécialiste des q -séries et des fonctions spéciales
- Connaît bien les travaux de Ramanujan
- 1976 : visite Trinity College pour consulter les notes de Watson

découvre des manuscrits inattendus



Le carnet perdu

- 138 pages manuscrites de Ramanujan
- 600 résultats (q -séries, fonctions thêta...)
- Travaux réalisés durant l'année 1920
- Ni un « carnet », ni « perdu »
- Absence de texte
- Difficile à lire
- 1987 : copie élargie rendue disponible

Un siècle d'édition

- Hardy : une vingtaine d'articles
- Watson, Wilson : 6 à 8 chapitres du carnet 2
- Facs-similés des carnets disponibles en 1957
- Fac-similé du carnet perdu en 1987
- Andrews : une trentaine d'articles
- Travaux académiques épars

Bruce Berndt

- Né en 1939
- Théoricien des nombres (analyse et séries)
- 1974 : en résidence à Princeton pour un an
lit deux articles de Grosswald
qui prouvent des formules de Ramanujan

Berndt sait les prouver !
peut-il en prouver d'autres ?



Chapitre 14

- Toutes les formules sont dans le carnet 2, chapitre 14
- Mai 1977 : prouver les 87 formules (1 an !)
- Depuis 1978 : éditer les trois carnets
- Démarche systématique, rigoureuse, tenace
- Aide de nombreux mathématiciens, d'étudiants, de Springer, de fondations...

21 ans plus tard...

- L'édition des trois carnets est achevée !!!
- **3 254 résultats** (comptabilité de Berndt)
- **Moins d'une dizaine sont faux**
- **Les deux tiers sont originaux**
- 5 livres (2 300 pages)
- Plus de 100 articles

5 livres

- 1985 : carnet 2 (ch. 1 à 9) + rapports
- 1989 : carnet 2 (chapters 10 à 15)
- 1991 : carnet 2 (16 à 21)
- 1994 : carnets 2 et 3 + carnet 1 (ch. 1 à 16)
- 1998 : carnets 1, 2 et 3
- Plus : édition de la correspondance

The Ramanujan Journal

essais, articles, ouvrages techniques

Quid du carnet perdu ?

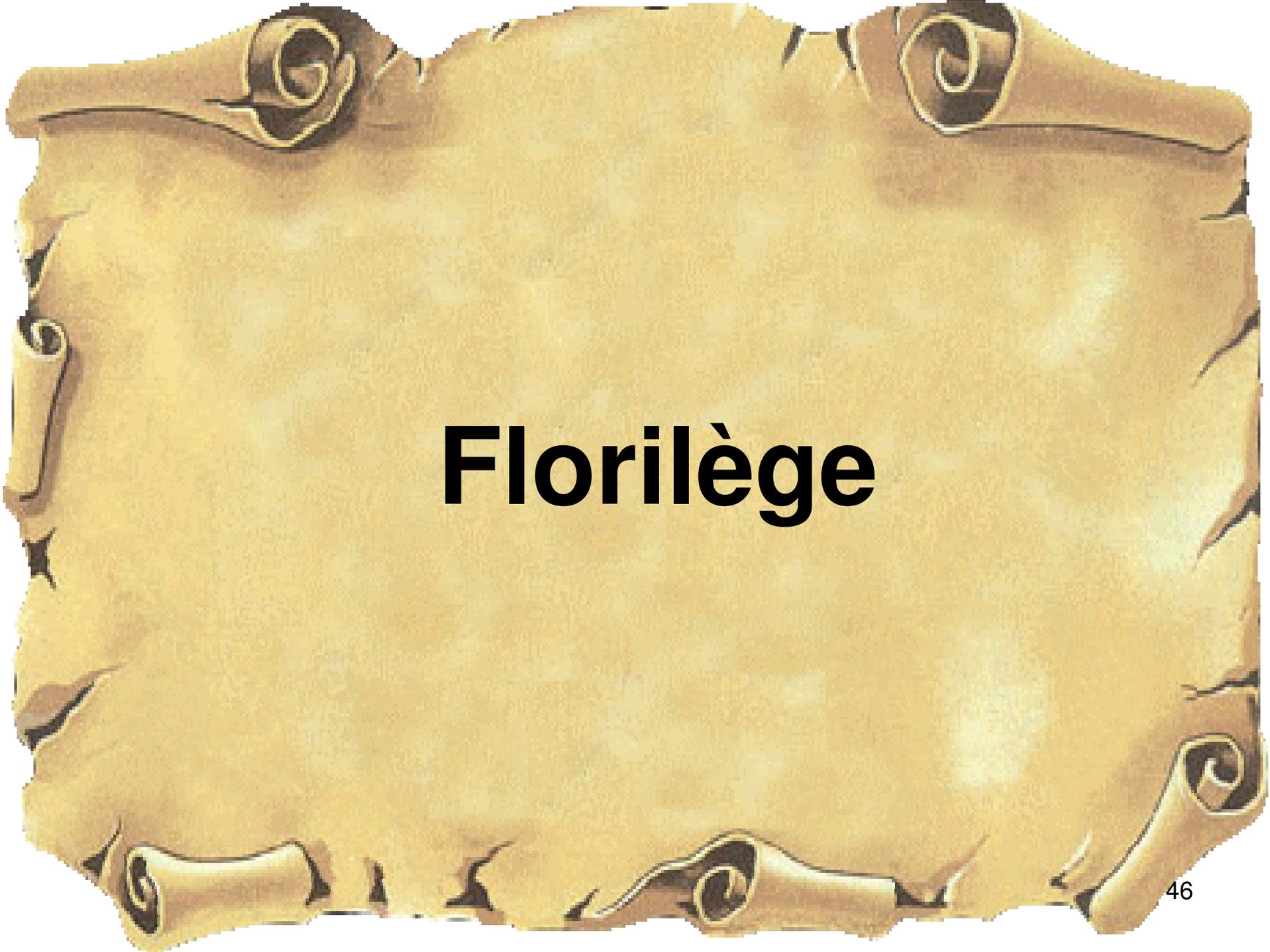
- Plusieurs dizaines d'articles de G. Andrews
- Éditions systématique avec B. Berndt :
 - 2005, volume I, 440 pages
 - 2009, volume II, 420 pages
 - 2012, volume III, 446 pages
 - 2013, volume IV, 452 pages
 - Dernier volume attendu (en 2015 ?)

Citations 1

- « *Des formules telles que, s'il ne les avait pas écrites, personne ne les aurait trouvées, même dans cent ans, même dans deux cents ans* » (Berndt)
- « *Sans aucun doute, Ramanujan pensait comme tout autre mathématicien, il pensait simplement "with more insight" que la majorité d'entre nous* » (Berndt)

Citations 2

- « *Ramanujan savait parfaitement quand ses méthodes heuristiques le conduisaient à des résultats corrects, et quand ce n'était pas le cas* » (Berndt)
- « *Personne, dans l'histoire des mathématiques, ne possédait l'habileté de Ramanujan dans le domaine des fractions continues ou des radicaux imbriqués* » (Berndt)

A piece of aged, yellowed parchment with a decorative border of rolled-up scrolls. The parchment is rectangular with irregular, torn edges. The word "Florilège" is written in the center in a bold, black, sans-serif font. The background is white.

Florilège

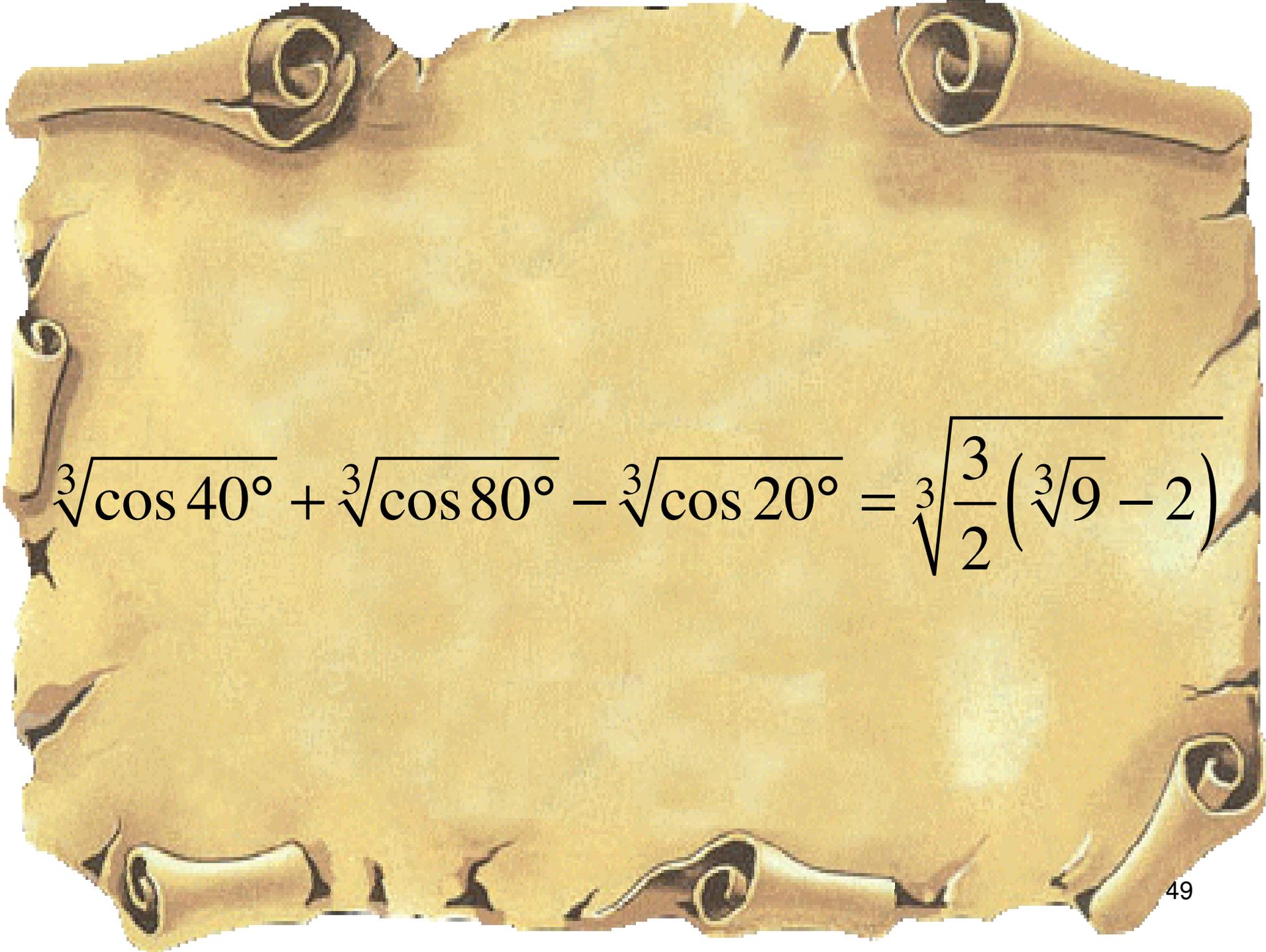
$$\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = 3,1416\dots$$

370

- (1) $\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = 3.14164\dots = \pi + .00005$ (11)
- (2) $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{13}{4^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 + \frac{19}{4^3} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots$
- (3) $\frac{16}{\pi} = 5 + \frac{47}{64} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{89}{64^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 + \frac{131}{64^3} \cdot \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots$ (Klein's)
- (4) $\frac{8(1+\sqrt{5})}{\pi} = (6+\sqrt{5}) + (66+19\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 + \dots$ Scop. 1

$$2 \sin \frac{\pi}{18} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{\dots}}}}}$$

où la suite des signes $-$, $+$, $+$ a pour période 3


$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left(\sqrt[3]{9} - 2 \right)$$

$$\frac{\sum_{n \geq 0} e^{-7\pi n^2}}{\sum_{m \geq 0} e^{-\pi m^2}} = \frac{\sqrt[8]{28} \left(\sqrt{13 + \sqrt{7}} + \sqrt{13 + 3\sqrt{7}} \right)}{14}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) e^{\frac{2\pi}{5}}$$

Page 209 du carnet perdu

Add me a 924 (50)

$$\left\{ \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \right)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^n \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \right)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^n \right\}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \right)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^n \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \right)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^n \right\}$$

$$= e^{\frac{\pi^2}{2}} \frac{n + \binom{n}{3} 3^2 + \binom{n}{5} 5^2 + \dots}{1 + \binom{n}{3} 3^2 + \binom{n}{5} 5^2 + \dots}$$

$\psi(x) = e^{\frac{\pi^2 x^2}{2}}$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \psi(x+t) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{\pi^2 (x+t)^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{\pi^2 (x+t)^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{\pi^2 x^2}{2} + \pi^2 x t + \frac{\pi^2 t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi^2 x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi^2 x t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi^2 x^2}{2}} \left[\frac{e^{\pi^2 x t}}{\pi^2 x} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi^2 x^2}{2}} \left(\frac{1}{\pi^2 x} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi^2 x^2}{2}} \frac{1}{\pi^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi^2 x^2}{2}} \frac{1}{\pi^2 x}$$

Page 209
du carnet perdu

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}, \quad 0 < k < 1.$$

$$\left(\prod_{n \geq 0} \left(\frac{1 - (-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}}{1 + (-1)^n q^{\frac{2n+1}{2}}} \right)^{2n+1} \right)^{\log q} \left(\prod_{m \geq 1} \left(\frac{1 + (-1)^m i q'^m}{1 - (-1)^m i q'^m} \right)^m \right)^{2i\pi} = \exp \left(\frac{\pi^2}{4} - k \frac{\sum_{r \geq 0} \frac{((r+1)!)^3 k^{2r}}{r! \left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \dots \times \frac{2r+3}{2} \right)^2}}{\sum_{j \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{2j+1}{2} \right)^2 k^{2j}}{j!(j+1)!}} \right)$$

Déchiffrage

- Formule presque illisible (copie médiocre)
- Seuls les trois premiers termes de chaque série sont écrits
- K et K' non définis
- Aucune telle formule dans la littérature
- Pas même dans les travaux de Ramanujan !

$$K = K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K' = K(k'), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

Explication (?)

- Découle d'une connexion unique et presque miraculeuse entre séries hypergéométriques et fonctions elliptiques
- Cette connexion n'est pas comprise
- Accident, ou y en a-t-il d'autres ?
- Comment concevoir qu'une telle formule existe ?
- Comment en déterminer les éléments ?

Voici cette connexion :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{ch} \left(\frac{2n+1}{2} \frac{\operatorname{K}(\sqrt{1-k^2})}{\operatorname{K}(k)} \right)} = \frac{k \sum_{r \geq 0} \frac{r+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{2r+3}{2}\right)^2} \frac{((r+1)!)^2 k^{2r}}{2 \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}{(m!)^2} \frac{k^{2m}}{m+1}}$$

Fonctions elliptiques

Séries hypergéométriques

On trouve cette formule dans le carnet 2...

Un génie

« Son talent était exceptionnellement hors du commun, et il est l'un des rares mathématiciens contemporains que je qualifierais de génie au sens populaire du terme » (Tao)

Mystères...

« Les méthodes de Ramanujan pour calculer les invariants de classe demeurent en grande partie dans une obscurité impénétrable ; c'est regrettable qu'il ne nous ait laissé aucun indice » (Berndt)

Références

The Man Who Knew Infinity – A Life of the Genius Ramanujan. Robert Kanigel, Washington Square Press, 1991

Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan. Bernard Randé, Cassini, 2002

An Overview of Ramanujan's Notebooks.

In:

*Charlemagne and his Heritage:
1200 Years of Civilization and Science
in Europe, volume 2 (Mathematical Arts),
édité par P.L. Butzer, H.T. Jongen et
W. Oberschelp, Brepolz, Turnhout,
pp. 119–146, 1998*

Ramanujan's Notebooks – Part I.

Bruce Berndt, Springer, 1985

Ramanujan's Notebooks – Part II.

Bruce Berndt, Springer, 1989

Ramanujan's Notebooks – Part III.

Bruce Berndt, Springer, 1991

Ramanujan's Notebooks – Part IV.

Bruce Berndt, Springer, 1994

Ramanujan's Notebooks – Part V.

Bruce Berndt, Springer, 1998



Ramanujan's Lost Notebook – Part I.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2005

Ramanujan's Lost Notebook – Part II.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2009

Ramanujan's Lost Notebook – Part III.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2012

Ramanujan's Lost Notebook – Part IV.
George Andrews et Bruce Berndt,
Springer, 2013

Partitions

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

On écrit : $p(4) = 5$.

On calcule que $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3 \dots$

$$p(7) = 15, p(100) = 190\ 569\ 292 \dots$$

Question :

quelles sont les propriétés
de la fonction p ?

Un exemple

- 50,04 % des $p(n)$ inférieurs à 10^6 sont pairs, et 49,96 % sont impairs...

La proportion des nombres pairs est-elle $\frac{1}{2}$?

- 33,1 % des $p(n)$ inférieurs à 3 200 sont multiples de 3. La proportion est-elle $\frac{1}{3}$?
- 34,6 % des $p(n)$ inférieurs à 2 000 sont multiples de 5...
- **Quelle est la distribution des valeurs $p(n)$?**
- Pas le moindre angle d'attaque...

Des réponses

- $p(5k + 4)$ est un multiple de 5
- $p(7k + 5)$ est un multiple de 7
- $p(11k + 6)$ est un multiple de 11

- $$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

- Vers une formule *exacte* (Rademacher, 1943)