Densité des nombres premiers

Hervé Stève
herve.steve@hotmail.fr

Kafemath du 23 mai 2013

PLAN

1. Rappel (cf KΦM du 24/05/2012)
2. Densité et fonction log
3. Le théorème des nombres premiers (TNP)
4. La fonction zêta de Riemann

Rappel

- nombres entiers naturels : 1, 2, …,n ,n+1, …
- Nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, …

-Pas de facteurs propres

-Tout entier se décompose en facteurs premiers

-Ils sont infinis : n!+1 divisible par p premier > p_k < n

-Intervalles sans premiers : [n!+2 … n!+n]

-Crible d'Eratosthène (voir plus loin)

-Test de primalité : problème très difficile quand p grand

-Combien de nombres premiers ? Quelle densité ? existe-t-il une loi ?

Densité

- Combien de nombres de premiers ≤ N ? Fonction π(N)

N	π(N)
1 000	168
1 000 000	78 498
1 000 000 000	50 847 534
1 000 000 000 000	37 607 912 018
1 000 000 000 000 000	29 844 570 422 669
1 000 000 000 000 000 000	24 739 954 287 740 860

fonction log

- Si N = 1000 alors N/π(N) proche de log(N)=6,9…

Ici log = le logarithme naturel tq log(e=2,718…)=1

N	N/π(N)	log(N)
1 000	5,95	6,90
1 000 000	12,73	13,81
1 000 000 000	19,66	20,72
1 000 000 000 000	26,59	27,63
1 000 000 000 000 000	33,62	34,53
1 000 000 000 000 000 000	40,42	41,44

- log(N)- N/π(N) est fonction décroissante

Le Théorème des Nombres Premiers (TNP)

$\pi(N) \sim N/\log(N)$

le nombre de premiers inferieurs ou égal à N tend asymptotiquement vers N divisé par son logarithme naturel

$\Rightarrow$ La probabilité que N soit premier est

$\pi(N)/N \sim 1/\log(N)$

$\Rightarrow$ le Nième premier est $\sim N/\log(N)$

TNP suite

- Conjecturé par Carl Friedrich Gauss (1777-1855) vers l'âge de 16 ans (à 10 ans il calculait 1+2+3+…+99+100 de tête !)
- Adrien Marie-Legendre (1752-1833) publie vers 1798 une variante du TNP
- Démontré en 1896 par Jacques Hadamard (1865-1963) et Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866-1962). Méthode de **l'analyse complexe** utilisant la **fonction** zêta ζ de Bernhard Riemann (1826-1866)

TNP amélioré : π(N) ~ Li(N)

avec Li **fonction** logarithme **intégral**

$$x \neq 1,\ Li(x) = \int_0^x dt / \log(t)$$

Fonction

Fonction : Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

- Fonction = exécution (1692)
- Argument x et valeur f(x), par exemple $f(x)=(1-x^2)/x$
- Représentée par un graphe
- Zéros d'une fonction : x tq $f(x)=0$
- Limite d'une fonction au point x :
  - par valeurs inférieures ou supérieures à x
  - Exemple) en 0 ? à l'infini ?
- Continuité d'une fonction : les limites inférieures et supérieures en x sont égales à f(x)
  - $f(x)=(1-x^2)/x$ n'est pas continue en 0
  - $f(x)=|x|$ est continue dans R

Dérivée

Dérivée : Leibniz et Isaac Newton (1643-1727) ont introduit le calcul différentiel

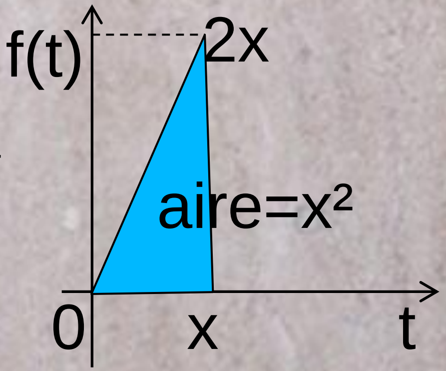
- Fonction notée f’ ou df/dx : f’(x) est le nombre dérivé de f en x. Par exemple : df/dt est la vitesse
- Nombre dérivé : coefficient directeur de la tangente au graphe de la fonction f au point x
- Calcul de la dérivée : limite du rapport f(x+h)-f(x) sur h quand h tend vers 0
- par exemple $f(x)=x^2-1$ et $f'(x)=2x$

  $[f(x+h)-f(x)]/h = [(x+h)^2-1-x^2+1]/h=(2xh+h^2)/h=2x+h \rightarrow 2x$ quand $h\rightarrow 0$
- Linéarité : $(af)' = a f'$
- Somme : $(f+g)' = f' + g'$
- Produit : $(fg)'=f'g+fg'$
- Fonction continue pas toujours dérivable : ex) $f(x)=|x|$ en 0

Primitive et intégrale

Primitive ou « antidérivée » / **calcul intégral**

- Fonction F primitive de f : F'(x)=f(x) (si F est dérivable!)
- F(x) intégrale de f : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$
- Intégration : $I(a,b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$
- L'intégrale I(a,b) est l'aire de la forme sous le graphe de la fonction f et au dessous de l'axe des x comprise entre les points a et b
- Exemple 1) si $f(t)=2t$ alors $F(x)=F(0)+\int_0^x 2t\,dt=x^2$
- Exemple 2) la primitive de 1/x est log(x) !



Le logarithme intégral

x	$\pi(x)$	$\pi(x) - x / \log(x)$	$\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$	$x / \pi(x)$
10^{1}	4	0	2	2,500
10^{2}	25	3	5	4,000
10^{3}	168	23	10	5,952
10^{4}	1 229	143	17	8,137
10^{5}	9 592	906	38	10,430
10^{6}	78 498	6 116	130	12,740
10^{7}	664 579	44 159	339	15,050
10^{8}	5 761 455	332 774	754	17,360
10^{9}	50 847 534	2 592 592	1 701	19,670
10^{10}	455 052 511	20 758 029	3 104	21,980
10^{11}	4 118 054 813	169 923 159	11 588	24,280
10^{12}	37 607 912 018	1 416 705 193	38 263	26,590
10^{13}	346 065 536 839	11 992 858 452	108 971	28,900
10^{14}	3 204 941 750 802	102 838 308 636	314 890	31,200
10^{15}	29 844 570 422 669	891 604 962 452	1 052 619	33,510
10^{16}	279 238 341 033 925	7 804 289 844 392	3 214 632	35,810
$4 \cdot 10^{16}$	1 075 292 778 753 150	28 929 900 579 949	5 538 861	37,200

plus précis

L'Hypothèse de Riemann

1859 : exposé de Riemann à l'Académie de Berlin « *Sur le nombre de premiers inférieurs à une grandeur donnée* »

basée sur la conjecture :

Tous les zéros non triviaux de la fonction zêta ont une partie réelle égale à un demi

Cette conjecture est devenu en 1900 (sommet de Paris) le huitième problème de David Hilbert …

Fonction zêta de Riemann

Dirichlet (1805-1859) :

La série $\sum 1/n^s$ converge pour s entier > 1

$$\zeta(s) = \sum 1/n^s = 1 + 1/2^s + 1/3^s + \ldots + 1/n^s + \ldots$$

- $\zeta(2)=\pi^2/6$ calculé par Euler (1707-1783) en 1735
- s pair, $\zeta(s)=q\,\pi^s$
- $\zeta(3)=$? Irrationnel (Roger Apéry 1978)

mais $\zeta(1)$ diverge : preuve par Oresme au 14ème

En effet $1/3 + 1/4 > 2 \times ¼ = 1/2$

$$1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 > 4 \times 1/8 = 1/2$$

$$1/9 + \ldots + 1/16 > 8 \times 1/16 = 1/2 \ldots$$

Fonction zêta et nombres premiers

- Euler : formule *magique* entre somme infinie et produit infini, pour s > 1

$$\sum_{n\ entiers} 1/n^s = \prod_{p\ premiers} 1/\left(1-1/p^s\right)$$

- Basée sur le crible d'Eratosthène :

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 …

On élimine les multiples de p = 2 puis 3 puis 5 puis 7 … et il reste

2 3 . 5 . 7 . . . 11 . 13 . . . 17 . 19 . . . 23 . . . . . 29 . 31 . . . . . 37 . . . 41 . 43 . . . 47 . . . . . 53 . . . . . 59 . 61 . . . . . 67 . . . 71 . 73 . . . . . 79 . . . 83 . . . . . 89 . 91 . . . . . 97 . . . 101

x

Preuve de la formule

$$\varsigma(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + 1/6^s + 1/7^s + 1/8^s + 1/9^s + \ldots$$

$$\varsigma(s)/2^s = 1/2^s + 1/4^s + 1/6^s + 1/8^s + 1/10^s + 1/12^s + 1/14^s + \ldots$$

$$\varsigma(s) - \varsigma(s)/2^s = (1 - 1/2^s)\varsigma(s) =$$

$$1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + 1/9^s + 1/11^s + 1/13^s + 1/15^s \ldots$$

$$1/3^s(1 - 1/2^s)\varsigma(s) =$$

$$1/3^s + 1/9^s + 1/15^s + 1/21^s + 1/27 + 1/33^s + 1/39^s + 1/45^s \ldots$$

$$(1 - 1/2^s)\varsigma(s) - 1/3^s(1 - 1/2^s)\varsigma(s) = (1 - 1/3^s)(1 - 1/2^s)\varsigma(s) =$$

$$1 + 1/5^s + 1/7^s + 1/11^s + 1/13^s + 1/17^s + 1/19^s + \ldots$$

$$\ldots(1 - 1/11^s)(1 - 1/7^s)(1 - 1/5^s)(1 - 1/3^s)(1 - 1/2^s)\varsigma(s) = 1$$

Zéros de la fonction zêta

- Zéros s_0 : $\zeta(s_0)=0$?

Extension aux nombres complexes C : $s=\Re(s)+\Im(s)i$

Riemann : prolongement analytique

La somme infinie $\sum 1/n^s$ n'est valable que pour $\Re(s)>1$ qui est la zone de convergence

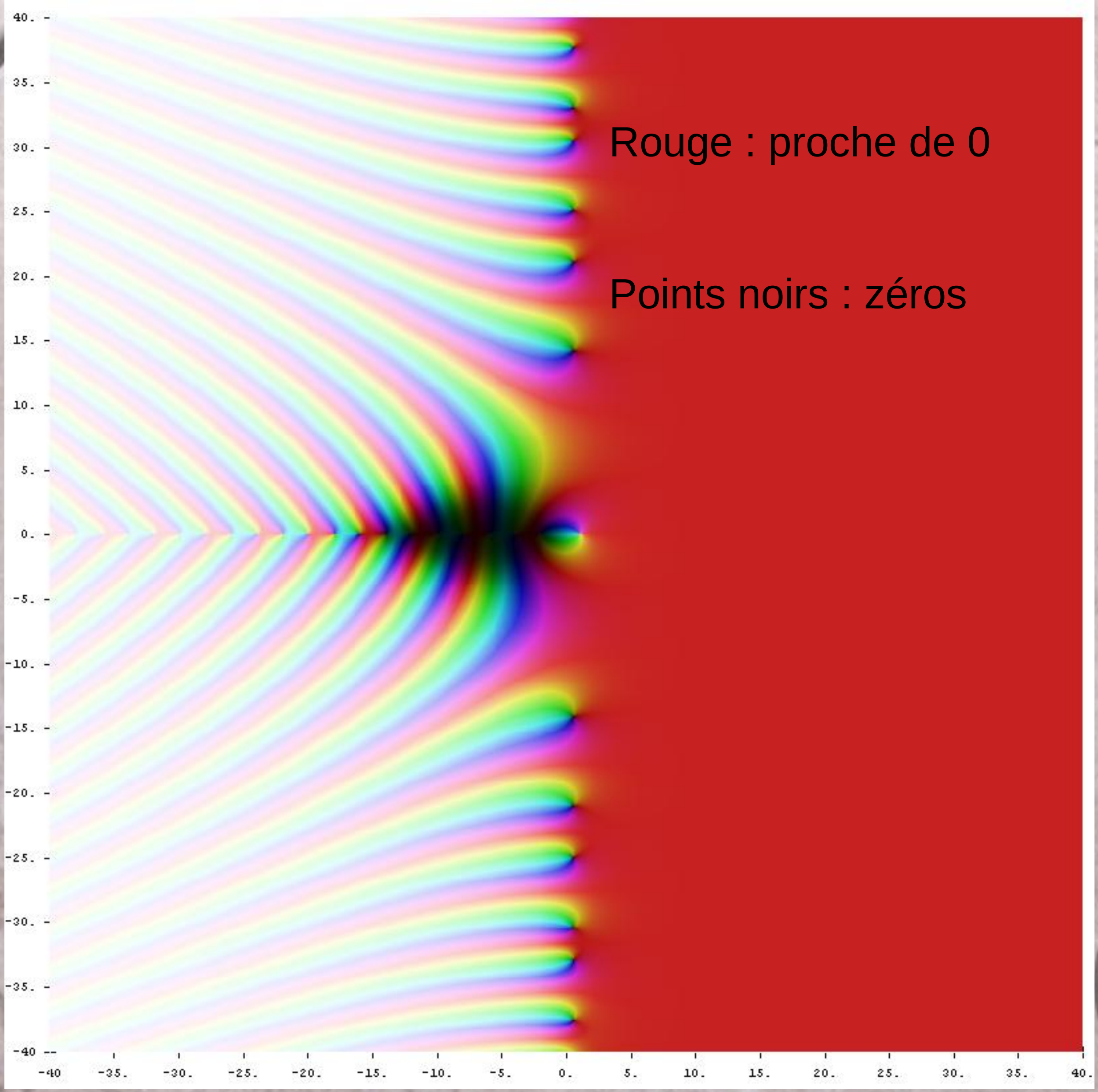
Alors on utilise la formule : $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$

avec pour n entier, $\Gamma(n) = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

Infinité de zéros *triviaux* pour $s_0=-2n$ avec $n>0$

Y a t-il d'autres zéros ? Que se passe t-il en s=1/2 ?

fonction zêta



Bande critique

la bande critique : $0 \leq \Re(s) \leq 1$:

-1896 : Hadamard et de la Vallée Poussin prouvent qu'il n'y a pas de zéros pour $\Re(s)=1$ et c'est suffisant pour démontrer le TNP

- Il y a des zéros non triviaux sur la droite critique $\Re(s)=1/2$

- **Question** : sont-ils tous sur la droite critique ? Si oui alors l'hypothèse de Riemann est vraie => le 8ème problème de Hilbert

- Calculs numériques des zéros non triviaux : $s_0=1/2 + i\,t$

- Répartition pseudo aléatoires, lien avec la mécanique quantique …

lien entre les zéros de ζ(s) et π(N)

Objet de l'exposé de Riemann en 1859

π(N) concerne la théorie des nombres (arithmétique)

ζ(s) concerne la théorie des fonctions (analyse)

- fonction J : $J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \ldots$

- Inversion de Moëbius : $\pi(x) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} J(\sqrt[n]{x})$

- Formule magique différentielle : $\frac{1}{s}\log\zeta(s) = \int_0^\infty J(x) x^{-s-1} dx$

dernières formules …

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$$

avec ρ zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$

Von Koch (1901) : si l'Hypothèse de Riemann est vraie alors

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\log(x))$$