Marcher sur le fil ?

François Dubois[1]

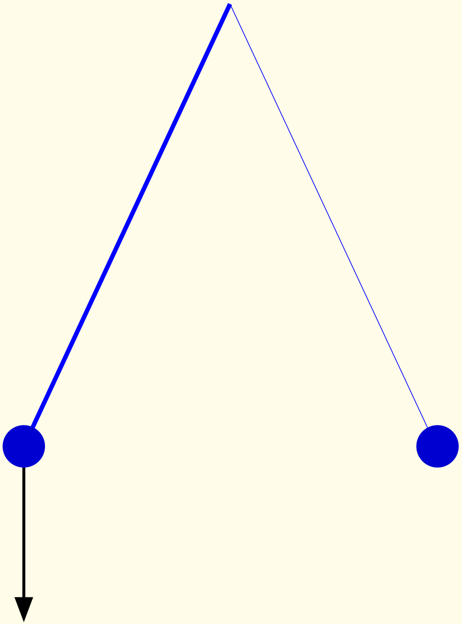
Kafemath au “Moulin à Café”

27 octobre 2012

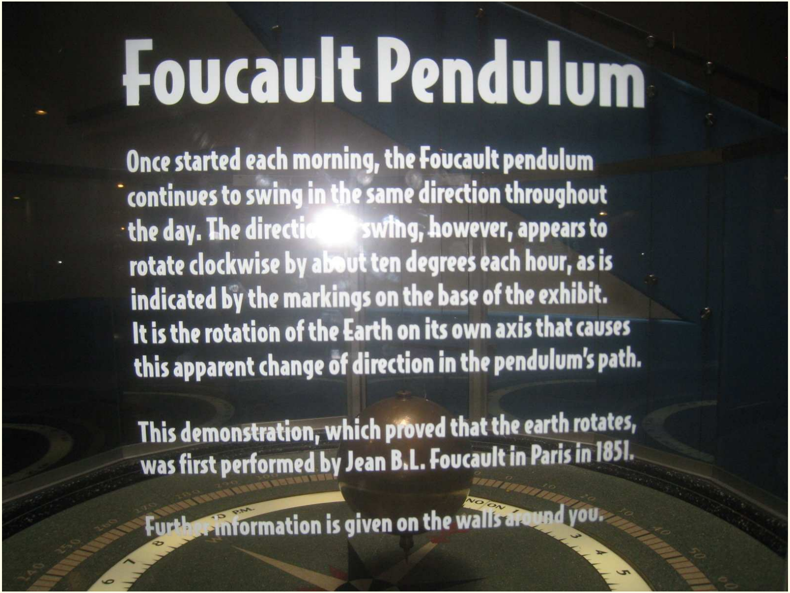
pendule simple
contrôle du pendule inversé

[1] co-animateur du “Kafemath”, café mathématique à Paris

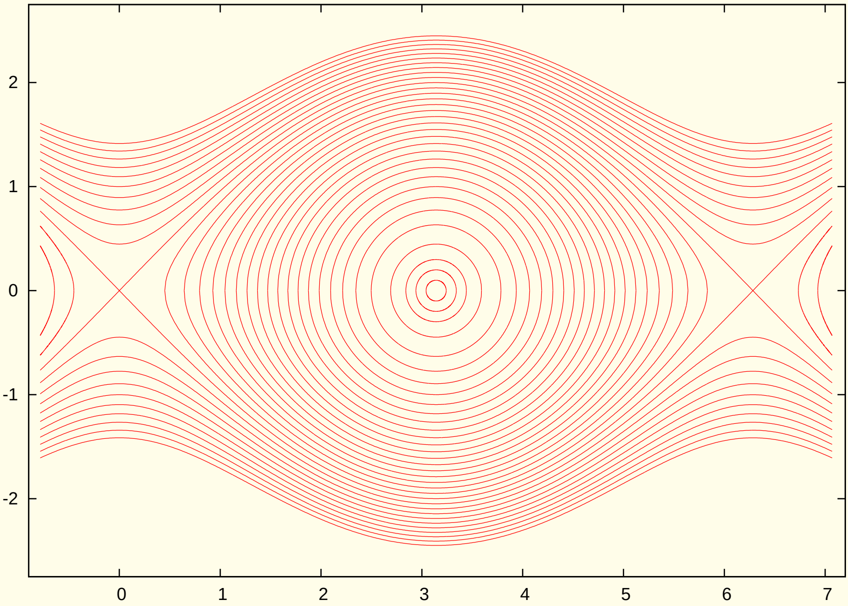
Pendule simple



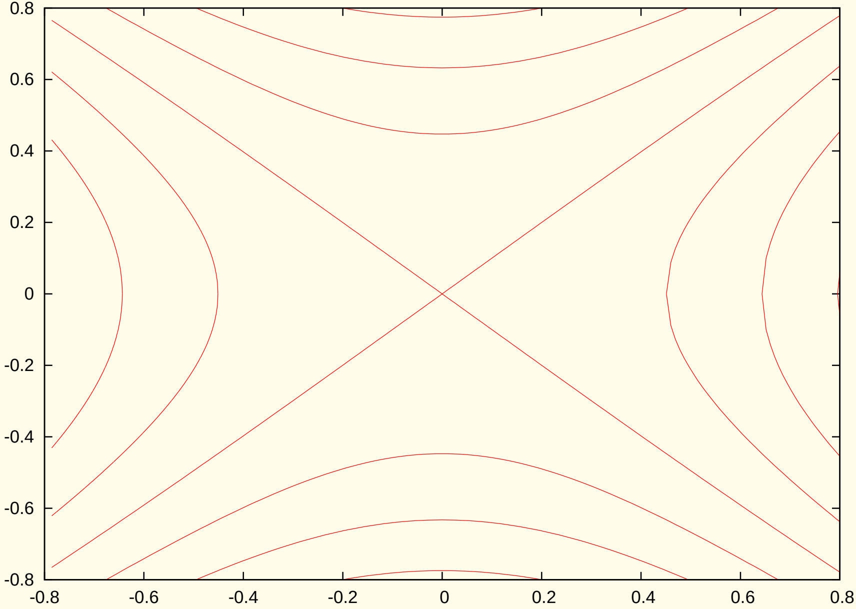
Pendule de Foucault à Chicago (août 2011)



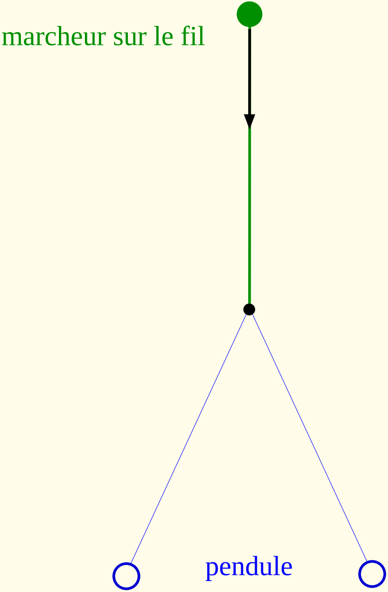
portrait de phase du pendule simple



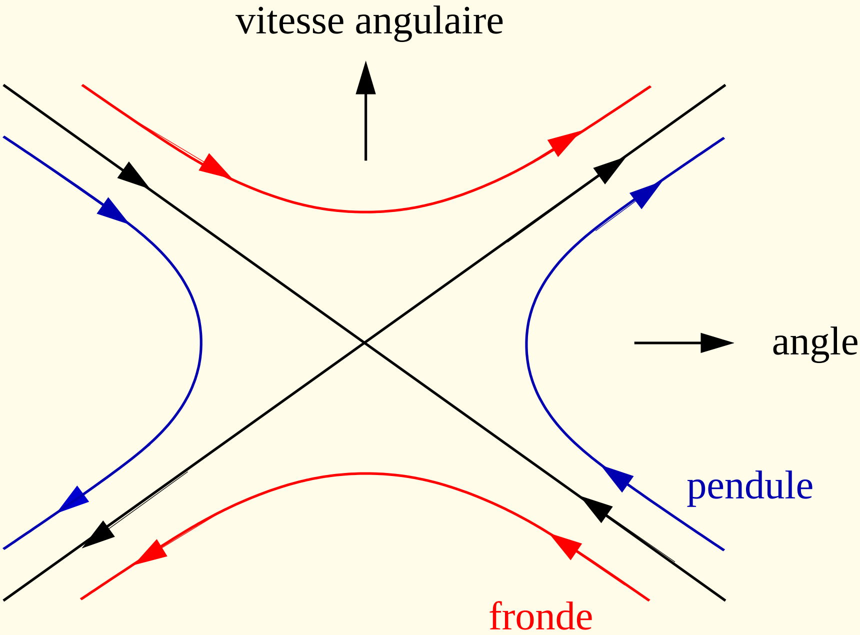
Zoom autour de l'instabilité



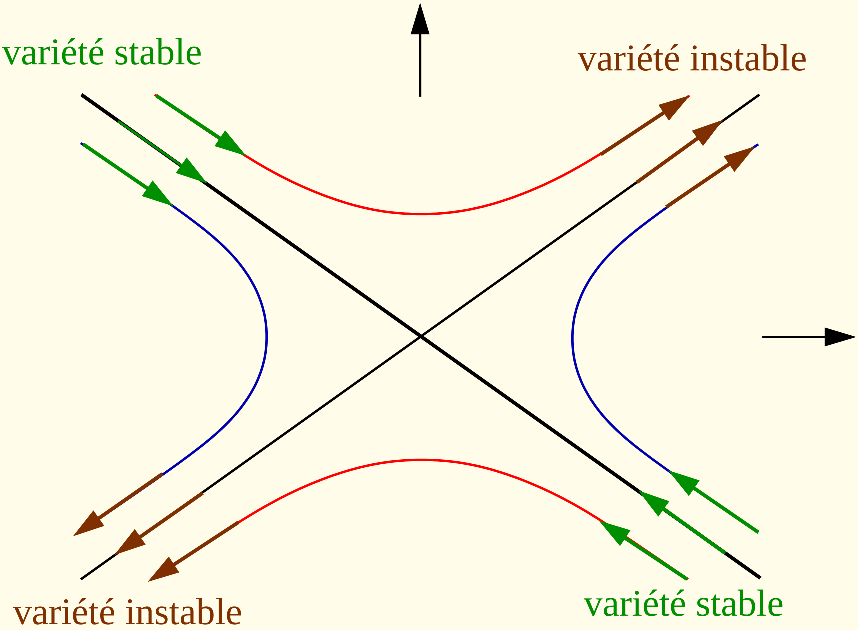
L'instabilité vue depuis le pendule



Pendule ou fronde ?



Quelle dynamique autour de l'instabilité ?



Quelle dynamique autour de l'instabilité ?

θ angle par rapport à la direction verticale
Il vaut zéro pour l'équilibre instable

Equation de la dynamique linéarisée autour de l'équilibre instable

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{T^2}\,\theta$$

Solution stable $\theta \simeq \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$

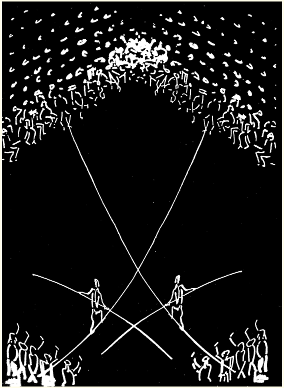
Solution instable $\theta \simeq \exp\left(\frac{t}{T}\right)$

Quelle dynamique autour de l'instabilité ?

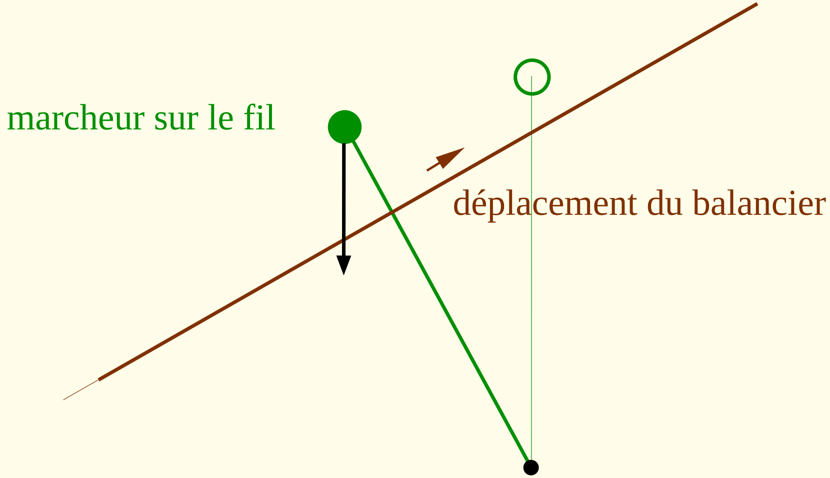
Contrôle de la solution :

rester le plus près possible de la variété stable

Modifier le système avec un nouvel élément : le balancier



un balancier pour le contrôle de l'instabilité



Nouvelle dynamique avec le contrôle

θ angle par rapport à la direction verticale

φ déplacement du balancier (unités *ad hoc*)

Equation de la dynamique obtenue

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{T^2}\,\theta - \frac{\varphi}{\tau^2}$$

Loi de commande proportionnelle : $\varphi = \beta\,\theta$

Dynamique contrôlée : $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{\beta^2}{\tau^2} - \frac{1}{T^2}\right)\theta$$

Système stable pour $\beta > \dfrac{\tau}{T}$.