Racines carrées et 7ème PROBLEME DE HILBERT

Hervé Stève
herve.steve@hotmail.fr
Kafemath du 28/04/2011

PLAN

1. Généralités
2. Racine carrée de 2
3. David Hilbert
4. Irrationalité de $2^{\sqrt{2}}$

Généralités

- **N** entiers , **N*** entiers non nuls, **Z** entiers relatifs
- **R** réels, **C=R x iR** complexes (i x i = -1)

R indénombrable : pas de bijection avec **N** ou **N***

<u>Preuve (Cantor):</u> par l'absurde

soit bijection entre [0 , 1[et **N*** alors

on numérote $x_1 = 0,\mathbf{a_{11}}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\ldots$ (0,239837373903…)

$x_2 = 0,a_{21}\mathbf{a_{22}}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\ldots$

$x_3 = 0,a_{31}a_{32}\mathbf{a_{33}}a_{34}a_{35}a_{36}\ldots$

…

soit $y = 0,b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots$ sur [0,1[avec

$b_1=0$ si $a_{11}\neq 0$, $b_1=1$ sinon $\Rightarrow y \neq x_1$

$b_2=0$ si $a_{22}\neq 0$, $b_2=1$ sinon $\Rightarrow y \neq x_2$

$b_3=0$ si $a_{33}\neq 0$, $b_3=1$ sinon $\Rightarrow y \neq x_3$ … etc

donc la bijection est impossible !

Généralités (suite)

- **Q** rationnels : $r = a / b$ avec a,b dans **N x N***

  Q dénombrable (*cf. Kafemath du 30/09/2010*)

  Q dense dans **R** :

  *pour tout (x,y) dans **R x R** avec $x < y$,*

  *il existe $r=p/q$ dans **Q** tel que $x \leq r \leq y$*

Preuve : choisissons $p = E(q\ y)$ (E = partie entière)

alors $p \leq q\ y < p + 1 \Rightarrow y \geq p/q=r$

de plus $q\ y < p + 1 \Rightarrow p/q > y - 1/q$

et on aura $r=p/q > y - 1 / q \geq x$ si $q \geq 1 / (y-x)$

Prenons par exemple $q = E(1/(y-x))+1$ CQFD

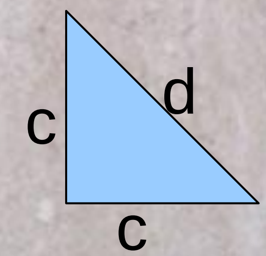
Généralités (suite)

- **R \ Q** irrationnels, indénombrable
- **K** algébriques : solutions des polynômes
  $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots c_nx^n=0$, avec c_j entiers
  au plus n solutions dans **R :** $x^2-2=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$
  n solutions dans **C** : $x^2+1=0 \Rightarrow x=i$ ou $-i$
  dénombrable, dense dans **R** …
- **R \ K** transcendants, indénombrables
  Kafemath du 30/09/2010 : l, e, π, e^x (x dans K sauf 0)
  sont des transcendants
  $2^{\sqrt{2}}$ transcendant (pbm de Hilbert)
  problèmes ouverts : $e+\pi$, e^e , π^π , …

Rappels sur √2

- $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$
  c'est bien le carré de sa racine carrée !
  $\sqrt{2} = 2^{1/2}$: en effet $(2^{1/2})^2 = 2^{2/2} = 2$

- Théorème de Pythagore :
  √2 est valeur de de la diagonale d'un carré de côté 1
  En effet $d^2 = c^2 + c^2 = 2$ donc $d = \sqrt{2}$
  $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623730950488\ldots$



- √2 est irrationnel non transcendant
  il est solution de $x^2 - 2 = 0$
  il n'est pas le rapport de 2 entiers …

Irrationalité de $\sqrt{2}$

<u>Preuve par l'absurde</u>

Hypothèse : supposons que $\sqrt{2}$ rationnel
donc il existe p et $q \neq 0$ entiers tels que $\sqrt{2} = p / q$
p/q fraction irréductible c.a.d. $pgcd(p,q)=1$
$\Leftrightarrow$ p ou q non pairs

$\sqrt{2}=p/q \Leftrightarrow 2=p^2/q^2 \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$ pair $\Leftrightarrow$ p pair
On a $p=2p'$ d'où $2q^2=4p'^2 \Leftrightarrow q^2=2p'^2$ pair $\Leftrightarrow$ q pair
IMPOSSIBLE car le principe de non contradiction
"*on ne peut avoir une chose et son contraire*"
L'hypothèse est donc fausse CQFD

Fraction continue de √2

- Irrationalité des fractions continues illimitées

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}} = \ldots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}$$

Fraction continue du nombre d'Or

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{\phi - 1} \approx 1{,}61803398874989490\ldots$$

$$\phi = 1 + (\phi - 1) = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

Formule de Viète (1540-1603)

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \cdots$$

C'est quoi ce nombre $2^{\sqrt{2}}$?

- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- $2^{3/2} = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \sim 2{,}8284\ldots$
- Suite $2, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \ldots \rightarrow 2^{\sqrt{2}} \sim 2{,}6651\ldots$

$2^{1,4} = 2^{7/5} = (\sqrt[5]{2})^7 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \ldots \times \sqrt[5]{2}$ puissance 7ème de la racine 5ème de 2 $\sim 2{,}6390\ldots$

$2^{1,41} = 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}} \sim 2{,}6574\ldots$

$2^{1,414} \sim 2{,}6647\ldots$

…

- Nombres $x^{e/r} = \sqrt[r]{x^e}$ avec $\sqrt[r]{x^r} = x$

$$x^y = \exp(y \ln(x)) = 10^{y \log_{10}(x)}$$

David Hilbert (1862-1943)

- Mathématicien allemand (Université de Göttingen)

  Doctorat supervisé par Ferdinand von Lindemann (π transcendant)
- Principaux travaux :
  - théorie des invariants (thèse)
  - axiomatisation de la géométrie euclidienne (de 5 à 21 axiomes !)
  - espaces de Hilbert en analyse fonctionnelle (équations intégrales)
  - bases mathématiques de la relativité d'Einstein et de la mécanique quantique
- En 1900 à Paris : présentation des 23 problèmes
- Programme de Hilbert (1920) :

  Cohérence de toutes les mathématiques à partir des axiomes

  Echec en 1931 : théorème d'incomplétude de Kurt Gödel d'un système incluant au moins l'arithmétique …

7ème problème de Hilbert

- **Irrationalité de $2^{\sqrt{2}}$** ? Hilbert 1900
- H7 (problème de Hilbert) : existe-t-il a,b irrationnels tels que a^b rationnel ?
  Fait appel au problème du tiers exclu
  $a=b=\sqrt{2}$ et $c= a^b= \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$
- Gelfond + Schneider 1934 : *transcendance de a^b avec a algébrique non nul, b algébrique non rationnel* $\Rightarrow$ **$2^{\sqrt{2}}$** transcendant

Tiers exclu

a=b=$\sqrt{2}$ irrationnels ; c= a^b= $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationnel ?

Principe du tiers exclu (Aristote) :

« on peut avoir une chose ou son contraire »

1) soit c est rationnel, H7 est prouvé
2) Soit c est irrationnel, H7 est prouvé car

$$c^a = \left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2 \quad \text{rationnel}$$

- Conclusion : existence non explicite de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$!
- Intuitionnistes : pas obligé de croire "*Les licornes existent mais on ne peut pas les voir*"

Logique

- Proposition A, son contraire est (non A)
- Théorie T = ensemble d'axiomes

non contradictoire entre eux

si A prouvée dans T alors P(A)

si A non prouvée dans T alors $\underline{P}$(A)

- Non contradictoire dans T :

« on ne peut pas dire une chose et son contraire »

P(A) et $\underline{P}$(non A) ; P(non A) et $\underline{P}$(A)

- Contradictoire dans T :

P(A) et P(non A)

Indécidabilité

- Indécidable dans T : Gödel

  P(A) et P(non A) : théorie T incomplète

Donc le contraire de l'indécidabilité c'est :

P(A) ou P(non A)

autrement dit le principe du tiers exclus

Le principe du tiers exclus est en contradiction avec l'indécidabilité et peut conduire à des existences non explicites !

Les licornes existent …
'la vue'

Et Dieu ?
On ne peut voir, démontrer
Seulement croire … ou pas

Les trous noirs existent mais on ne peut pas les voir !