QUELQUES NOMBRES IRRATIONNELS TRANSCENDANTS

Hervé Stève
herve.steve@hotmail.fr
KaféMath du 30/09/2010

PLAN

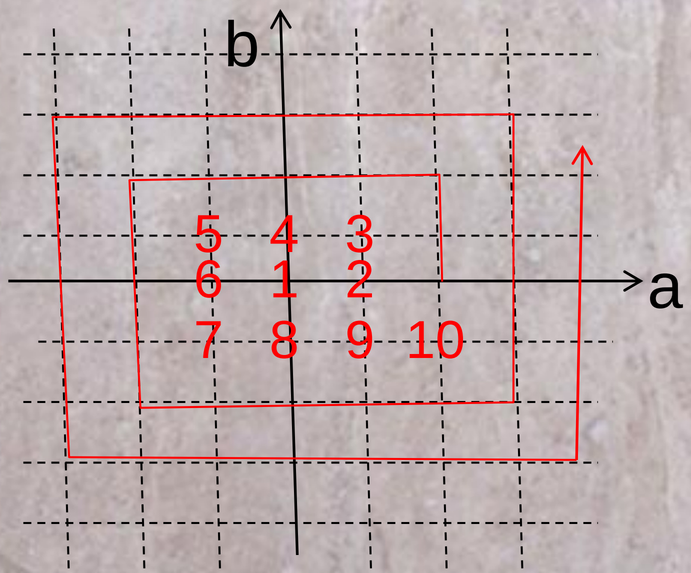
1. Généralités
2. L’exponentielle **e**
3. Le nombre **π**

Généralités

- **R** ensemble des réels, indénombrable
- **Q** ensemble des rationnels

  a / b avec a, b dans **Z** (entiers)

  Q est dense dans **R**, dénombrable



Q=Z x Z ⇔ Z

a / b ⇔ z

Généralités (suite)

- **R** \ **Q** irrationnels, indénombrable
- **K** ensemble des algébriques, dénombrable

racines des polynômes $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$

exemple) $\sqrt{2}$ solution de $p(x) = x^2 - 2 = 0$

- **R** \ **K** ensemble des transcendants indénombrable
- Joseph Liouville 1844 : premier transcendant

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,\underbrace{1}_{1!}\underbrace{1}_{2!}000\underbrace{1}_{3!}00000000000000000000\underbrace{1}_{4!}0000\ldots$$

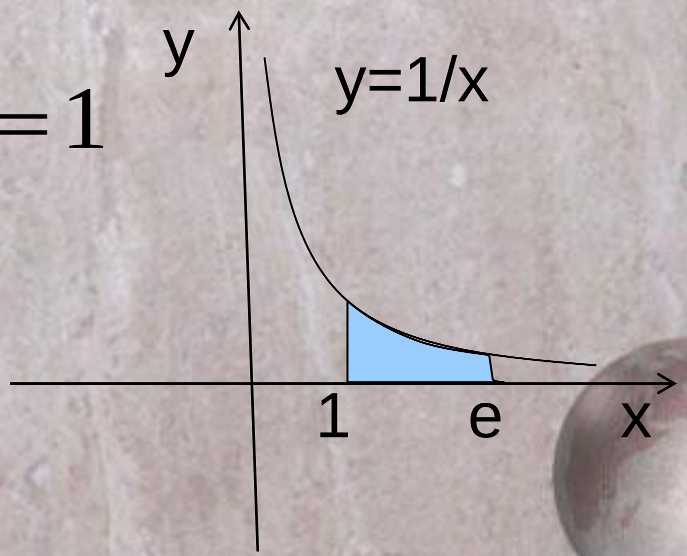
$$k! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times(k-1)\times k$$

L’exponentielle **e**

e ≈ 2,718 281 828 459 045 235 360 287 4…

- Constante de Neper (John Napier 1618)
  Logarithme népérien : ln(**e**)=1= **e**$^{\ln(1)}$
- L’aire sous l’hyperbole entre 1 et **e** vaut 1

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln(e) - \ln(1) = 1$$



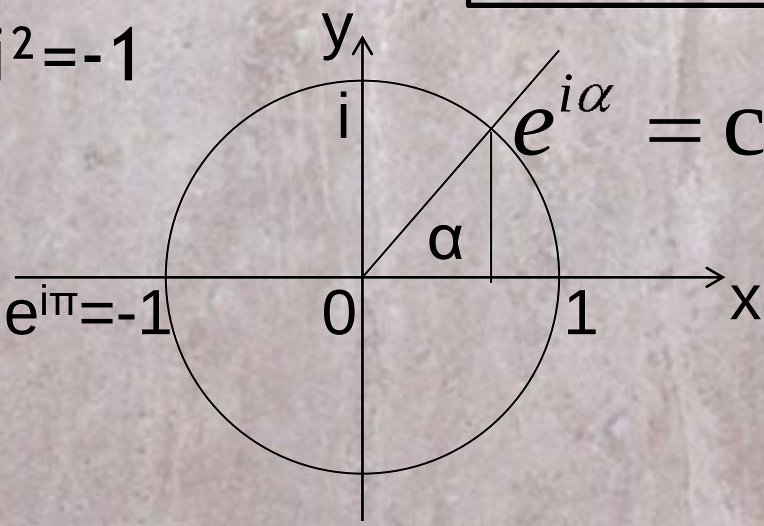
Exponentielle (Euler)

- **e** notation proposée par Léonard Euler (1731)

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \quad \text{avec } k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$$

- Identité d'Euler : $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

$i^2 = -1$



$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Irrationalité/transcendance

- Euler : ***e*** *a un développement en fraction continue Illimité* $\Rightarrow$ **e** irrationnel

$$\mathbf{e} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}$$

- Transcendance : Charles Hermite en 1873

Irrationalité de **e**

Si **e** irrationnel ⇔ pour tout entier b>0
alors **b e** non entier ⇔ **b! e** non entier

$$b!e = x + y = \left[b! \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} \right] + \left[b! \sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right]$$

$$x = \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{k!} = \sum_{k=0}^{b} b \times (b-1) \times \cdots \times (b-k+1) \text{ entier}$$

$$y = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \cdots$$

$$y < \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots = \frac{1}{b} \leq 1 \text{non entier}$$

$$\left(\mathrm{a} = \frac{1}{b+1} < 1 \Rightarrow 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a} = 1 + \frac{1}{b} \right)$$

donc **b! e** non entier => **e** irrationnel CQFD

Transcendance de **e**

Esquisse preuve David Hilbert (1862-1943) :

Si **e** algébrique alors $c_0+c_1\mathbf{e}+c_1\mathbf{e}^2+\ldots+c_n\mathbf{e}^n=0$ avec c_j entier, si k>0 entier grand, on note :

$$I_a^b := \int_a^b x^k \left[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right]^{k+1} e^{-x}\,dx$$

On a $c_0I_0^\infty+c_1\mathbf{e}I_0^\infty+c_1\mathbf{e}^2I_0^\infty+\ldots+c_n\mathbf{e}^nI_0^\infty=0=P_1+P_2$

$P_1= c_0I_0^\infty+c_1\mathbf{e}I_1^\infty+c_1\mathbf{e}^2I_2^\infty+\ldots+c_n\mathbf{e}^nI_n^\infty$

$P_2 = \qquad c_1\mathbf{e}I_0^1+c_1\mathbf{e}^2I_0^2+\ldots+c_n\mathbf{e}^nI_0^n$

$$\boxed{\int_0^\infty x^j e^{-x}\,dx = j!}$$

Alors $P_1/k!$ entier > 0 et $|P_2/k!| < 1$ non entier

Donc $(P_1+P_2)/k!$ non entier ne peut être nul !

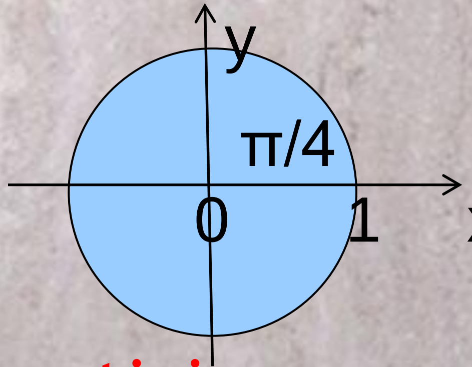
Le nombre **π**

- Constante d'Archimède, Pi

  π = C / d = circonférence d'un cercle de diamètre 1

  = A / r² = aire d'un cercle de rayon 1

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$



- Lorsqu'on demande à un mathématicien combien vaut π :

  il répond «π»

Antiquité de π

- <u>Nombre 3</u> : Bible, en Chine, …
- Tablettes babyloniennes (2000 avant J.-C.) :

  $\pi \approx 3 + 7/60 + 30/3600 = 3 + 1/8 = \underline{3,1}25$
- Papyrus de Rhind (scribe égyptien Ahmès) :

  $\pi \approx 256 / 81 \approx \underline{3,1}605\ldots$
- Texte indien : $\pi \approx 339 / 108 \approx \underline{3,1}39$
- Traité d'Archimède (-230) :

  $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$ soit $\pi \approx \underline{3,141}85\ldots$
- Ptolémée (+150) :

  $\pi = 3 + 8/60 + 30/3600 \approx \underline{3,1416}666\ldots$

  '*trois castors sans chaise*'

Histoire de π

- > 1400 : développements en série

$$\pi = 4\arctan(1) = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots$$

- En 1426, Al-Kachi (perse) donne 16 décimales
- Formule de Viète (1593), Wallis (1655),… Newton trouve 15 décimales et déclare « *j'ai honte de vous dire combien de décimales grâce à ces calculs, n'ayant aucune autre occupation à l'époque …* »
- Shanks (19ème) calcule 707 décimales en 15 ans ! seulement 527 sont correctes !

Calculs numériques

- ENIAC (1949) : John von Neumann obtient 2037 décimales en 70 heures !
- 1973 : un million de décimales avec la transformée de Fourier
- 5000 milliards de décimales calculées en août 2010 !
- Approximations utiles de Pi :

$$\pi \approx 355 / 113 \approx \underline{3,1415929}2\ldots$$

$$\pi = 4 \operatorname{atan}(1) = \operatorname{acos}(-1)$$

Mémorisation de Pi

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste, ingénieur
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages
…

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

8 9 7 9

3 2 3 8 4 6 2 6

4 3 3 8 3 2 7 9

…

Irrationalité de π

- Johann Heinrich Lambert (1761) : *le développement en fraction continue de tan(m/n) est illimité (avec m et n entiers non nuls)* $\Rightarrow$ tan(m/n) irrationnel

$$\text{tangente}\left(\frac{m}{n}\right)=\cfrac{m}{n-\cfrac{m^2}{3n-\cfrac{m^2}{5n-\cfrac{m^2}{7n+\cdots}}}}$$

Donc si x rationnel alors tan(x) est irrationnel

Par contraposée (si A alors B $\Rightarrow$ si non B alors non A)

si tan(x) est rationnel alors x irrationnel

Or tan(π/4)=1 rationnel donc π/4 et π irrationnel

- Ivan Niven (1946) : preuve directe simple …

Transcendance de π

- Ferdinand von Lindemann (1882) généralise Hermite (transcendance de **e**) : *si x est algébrique non nul alors* $\boldsymbol{e}^{x}$ *est transcendant*

Contraposée : si $\boldsymbol{e}^{x}$ est non transcendant alors x est non algébrique

Identité d'Euler : $\boldsymbol{e}^{i\pi}$ =-1 non transcendant donc **iπ** est non algébrique et **π** est transcendant

- Preuve directe : variante de Hilbert …
- Pierre-Laurent Wantzel (1837) : *tout nombre constructible* (règle, compas) *est algébrique* alors **π** est non constructible

=> non quadrature du cercle $\pi r^2 \neq c^2$