Perspective et projective

François Dubois [1]

Kafemath
"La Coulée Douce", Paris 12$^{\text{ième}}$
jeudi 01 octobre 2009

[1] animateur du Kafemath, café mathématique à Paris.

Le métro à Canton, juillet 2009

Les droites parallèles dans la “vraie vie” convergent dans l’image !

Débuts de la perspective...

On propose de se reporter en particulier aux œuvres suivantes :

Giotto (1276-1336), Le Miracle du Crucifix, Basilique d'Assise.

Paolo Uccello (1397-1475), Le Miracle de l'Hostie,
Galleria Nazionale delle Marche, palais ducal, Urbino.

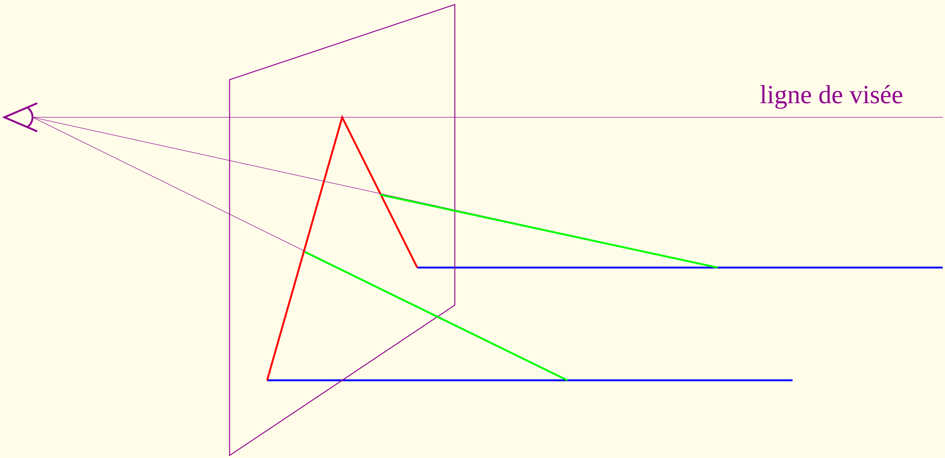
Piero della Francesca (1420-1492), La Cité Idéale,
Galleria Nazionale, Urbino.

Perugino (1448-1523), Remise des clefs à Saint Pierre,
Chapelle Sixtine, Rome.

Albrecht Dürer (1471-1528), Le Portillon,
Instruction sur la manière de mesurer à l'aide du compas et de l'équerre.

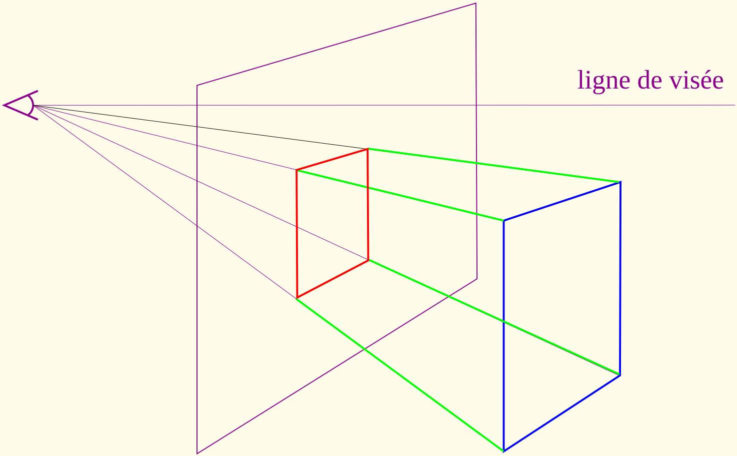
Diderot et d'Alembert, *L'Encyclopédie* (1751-1780), perspective.

Vue en perspective



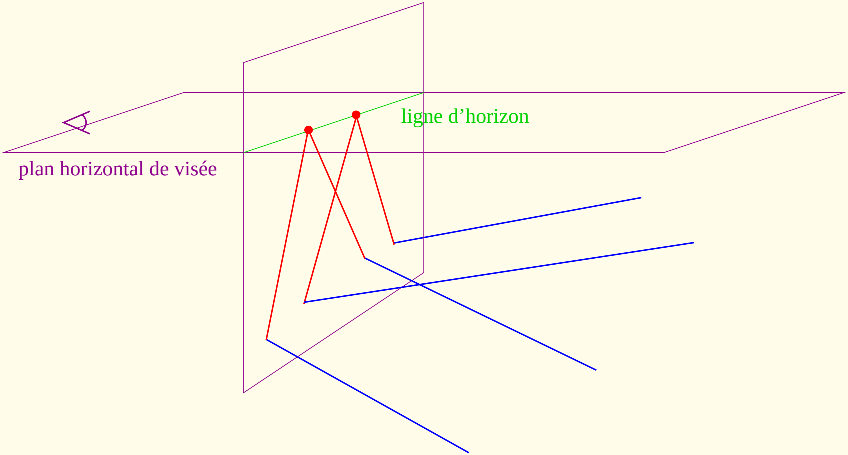
Les deux droites parallèles bleues se projettent selon les deux droites rouges

Vue en perspective



Les droites parallèles au plan de projection
restent des parallèles qui ne se coupent pas !

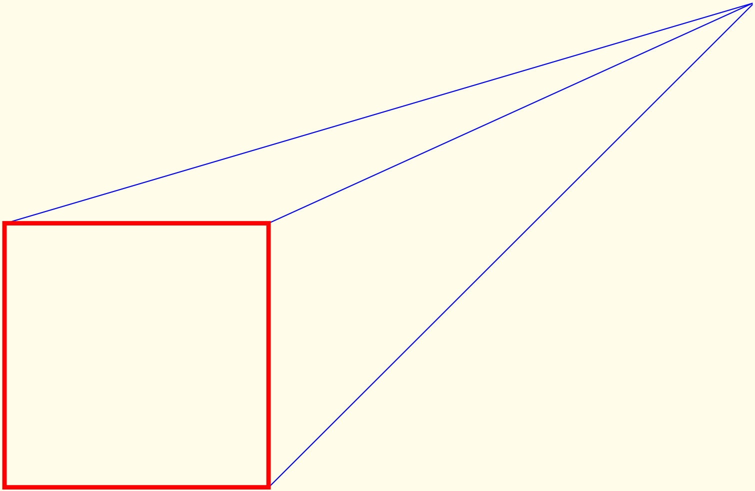
Vue en perspective



Les droites parallèles au plan horizontal

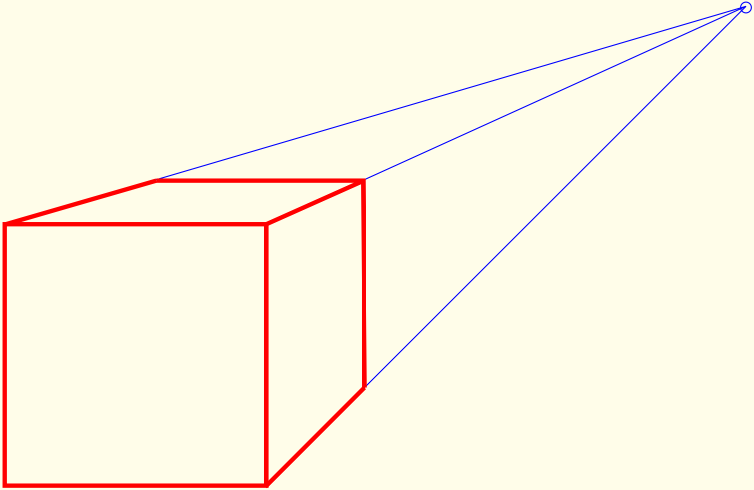
on leur "point de fuite" sur la ligne d'horizon

Un cube en perspective *(i)*



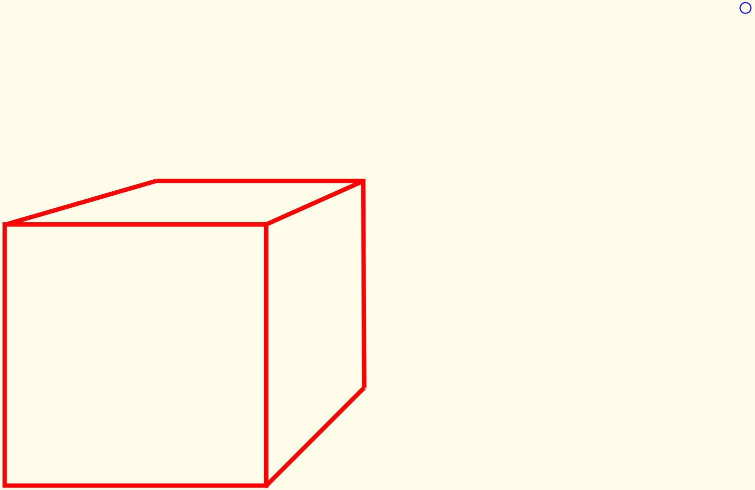
Perspective à un point de fuite

Perspective à un point de fuite



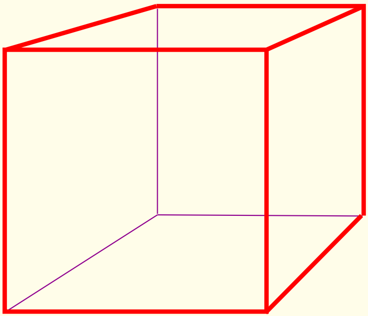
On ajoute les faces latérales

Perspective à un point de fuite



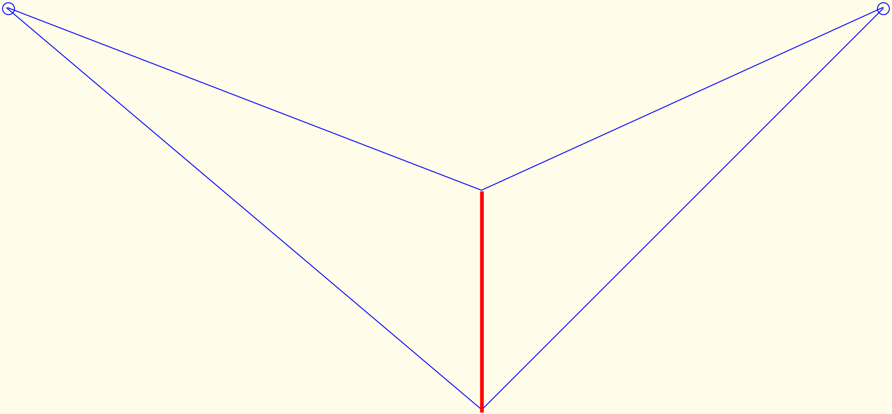
Le cube sans les traits de construction

Perspective à un point de fuite



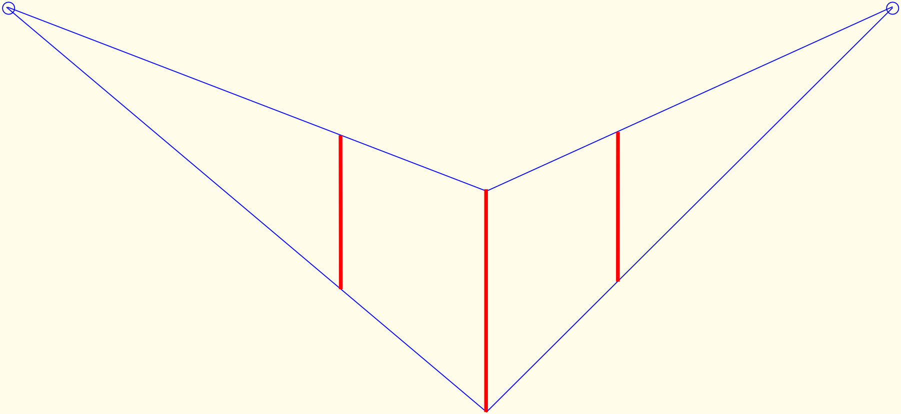
Avec les traits cachés

Un cube en perspective *(ii)*



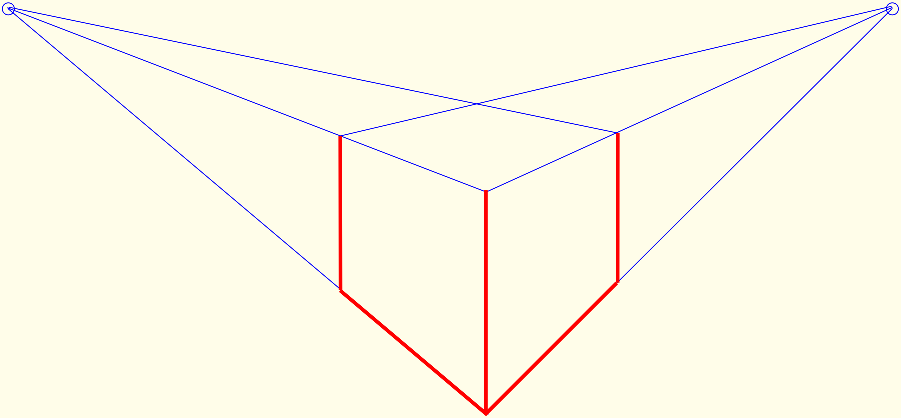
Perspective à deux points de fuite

Perspective à deux points de fuite



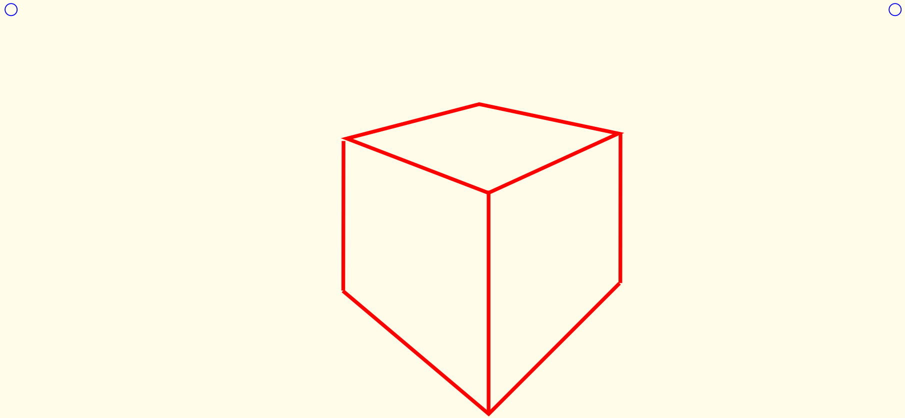
On rajoute deux faces latérales

Perspective à deux points de fuite



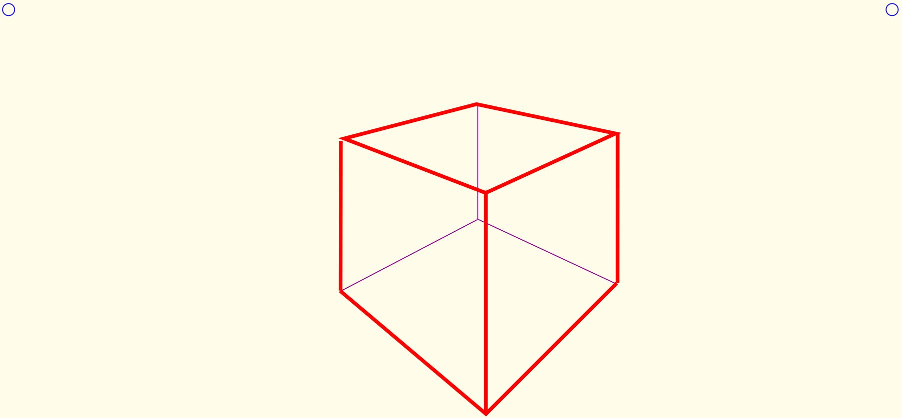
Puis la face du dessus

Perspective à deux points de fuite



Le cube est terminé

Perspective à deux points de fuite



On peut y rajouter les traits cachés

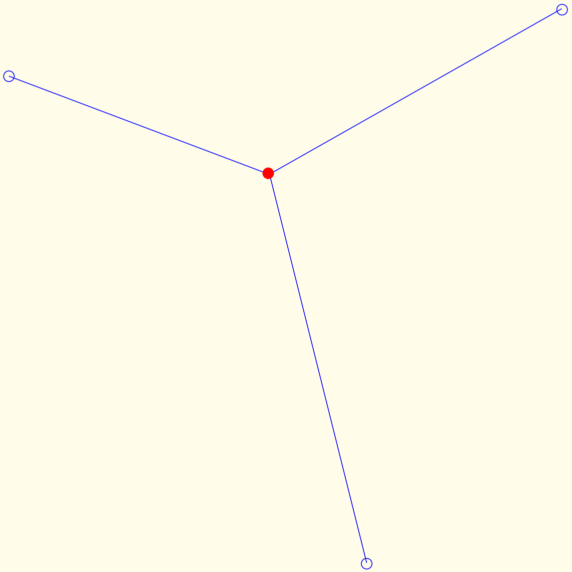
Exemple de perspective à deux points de fuite

jardin public à Canton (juillet 2009)

un second exemple moins convaincant...

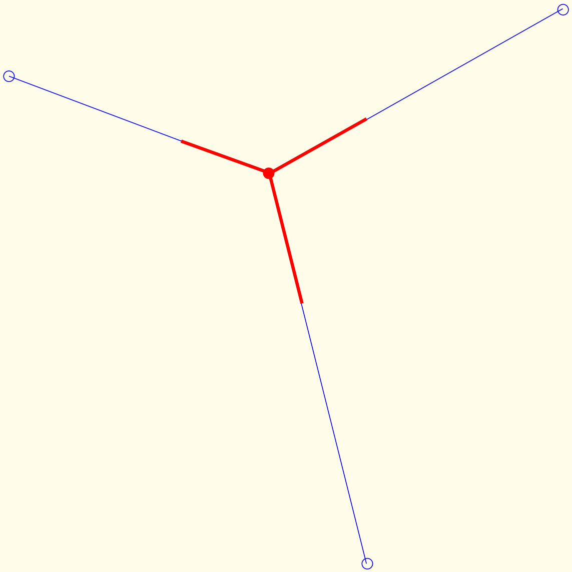
...depuis la rivière des Perles à Canton (juillet 2009)

Un cube en perspective *(iii)*



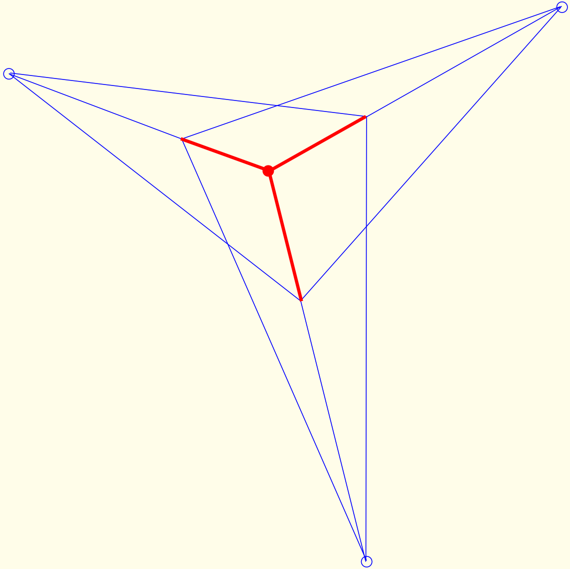
Perspective à trois points de fuite

Perspective à trois points de fuite



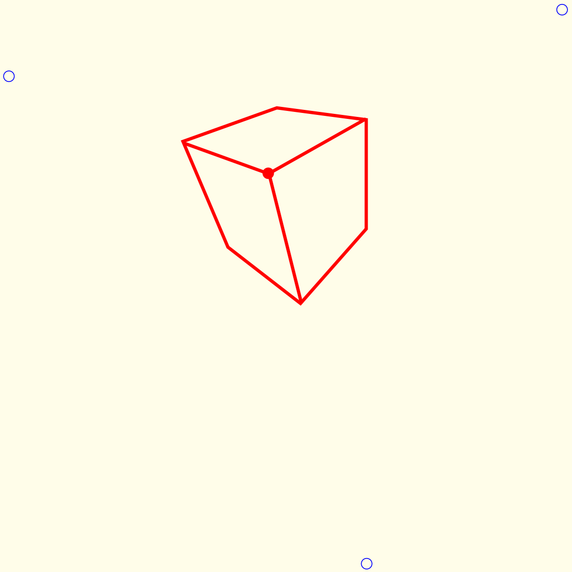
On place trois côtés

Perspective à trois points de fuite



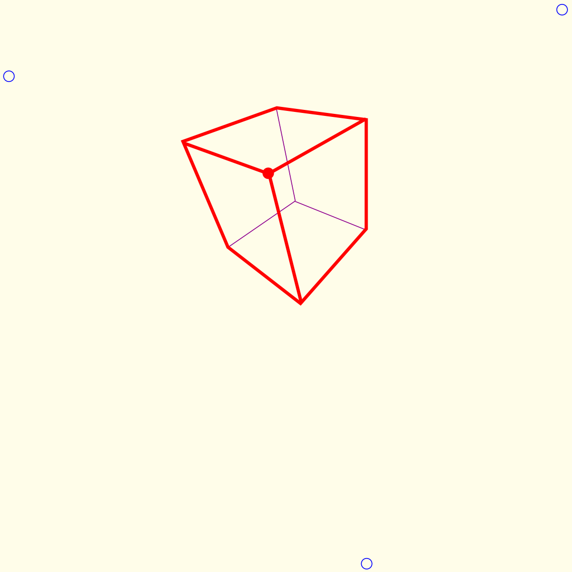
Puis les trois faces associées

Perspective à trois points de fuite



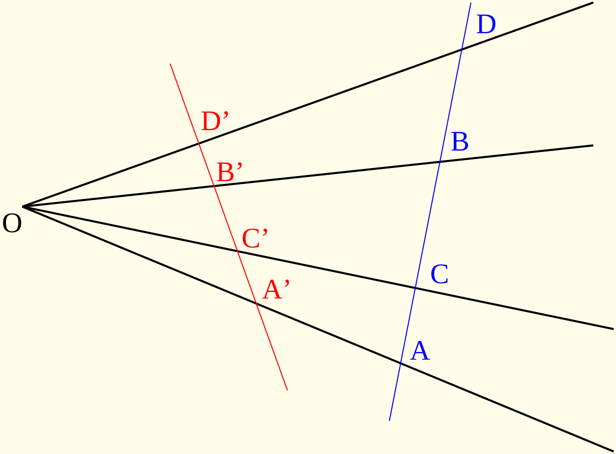
Le cube est terminé

Perspective à trois points de fuite



On peut aussi dessiner les faces cachées

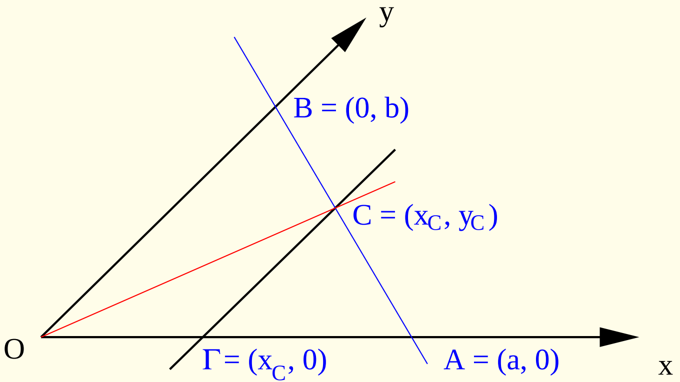
La perspective conserve le birapport



birapport $[A, B, C, D] \equiv \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$

Proposition. On a $[A', B', C', D'] = [A, B, C, D]$

La perspective conserve le birapport (preuve)



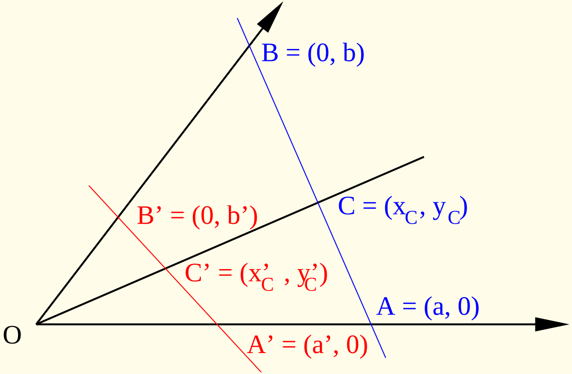
Grâce au théorème de Thalès, $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma 0}} = \dfrac{a - x_C}{0 - x_C} = 1 - \dfrac{a}{x_C}$

Dans le repère $x0y$ de la figure, la droite AB

a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Donc $\dfrac{y_C}{x_C} = \dfrac{b}{x_C} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{a}{x_C} - 1\right) = -\dfrac{b}{a}\,\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

Conservation du birapport (suite d'une preuve possible)

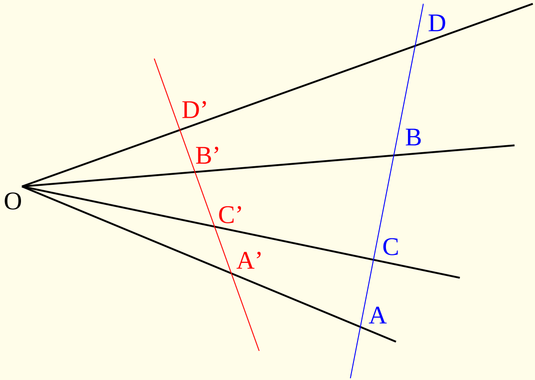


On a vu que $\frac{y_C}{x_C} = -\frac{b}{a}\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

De plus, les points O, C' et C sont alignés. Donc $\frac{y'_C}{x'_C} = \frac{y_C}{x_C}$

On déduit des deux point précédents $\frac{b'}{a'}\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \frac{b}{a}\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

Conservation du birapport (fin d'une preuve)

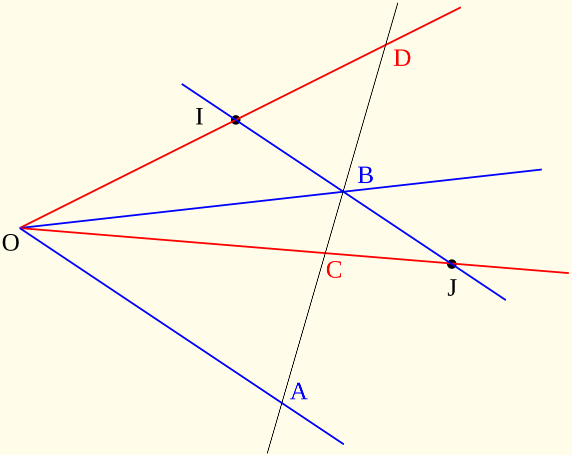


On a vu que $\frac{b'}{a'}\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \frac{b}{a}\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

De façon analogue, $\frac{b'}{a'}\frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \frac{b}{a}\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Donc

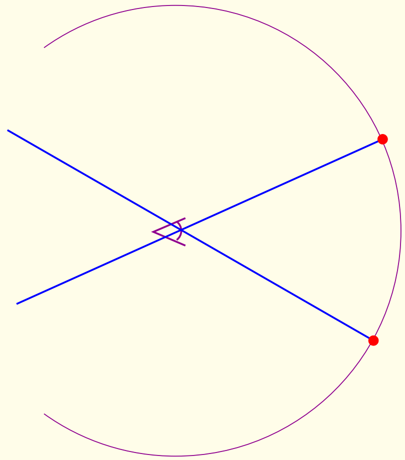
$$[A', B', C', D'] = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}\frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'A'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = [A, B, C, D] \bullet$$

Division harmonique



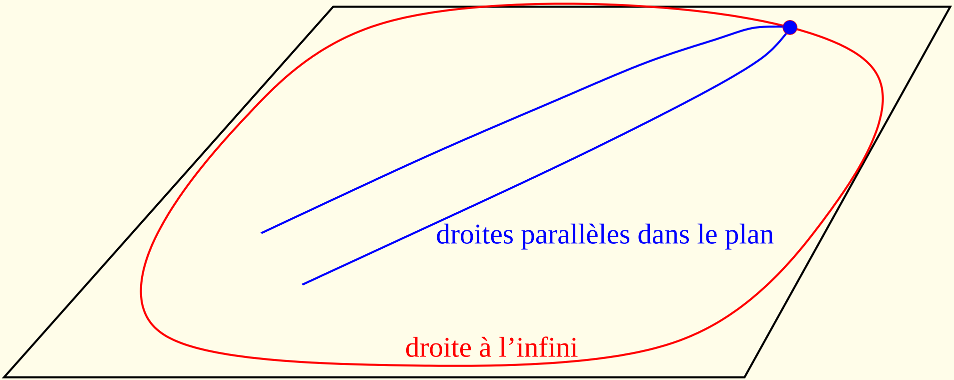
$[A, B, C, D] = -1$. Un faisceau de quatre droites est harmonique si et seulement si une parallèle à l'un de ses rayons est divisée par les trois autres en deux segments égaux. ($IB = BJ$ dans ce cas de figure)

Géométrie projective



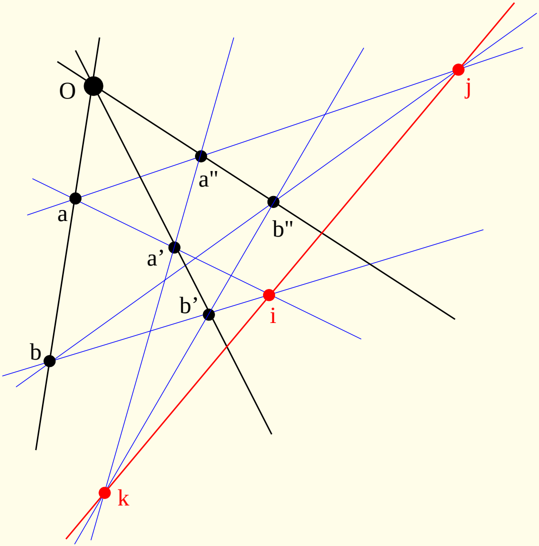
Les droites passant par l'origine (l'oeil de l'observateur)
deviennent les points de la "géométrie projective".

Géométrie projective



Le "plan projectif" peut être identifié à un plan affine usuel
auquel on adjoint une "droite à l'infini".
Deux droites parallèles se coupent en un "point à l'infini" .
Deux droites du plan projectif
ont toujours exactement un point d'intersection (!)

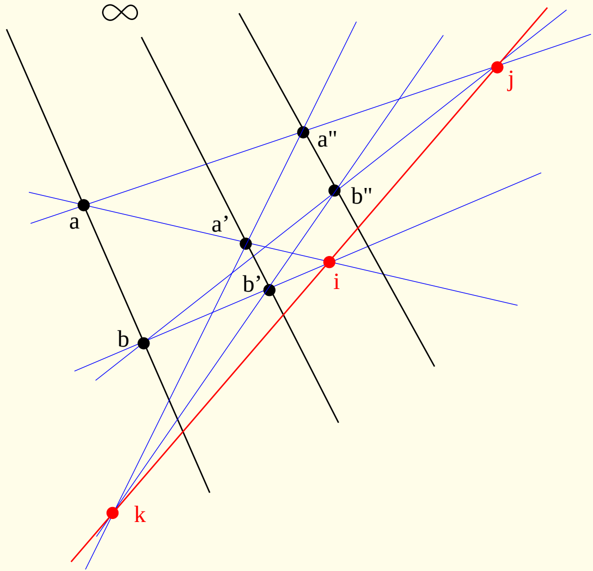
Théorème de Girard Désargues (1591-1661)



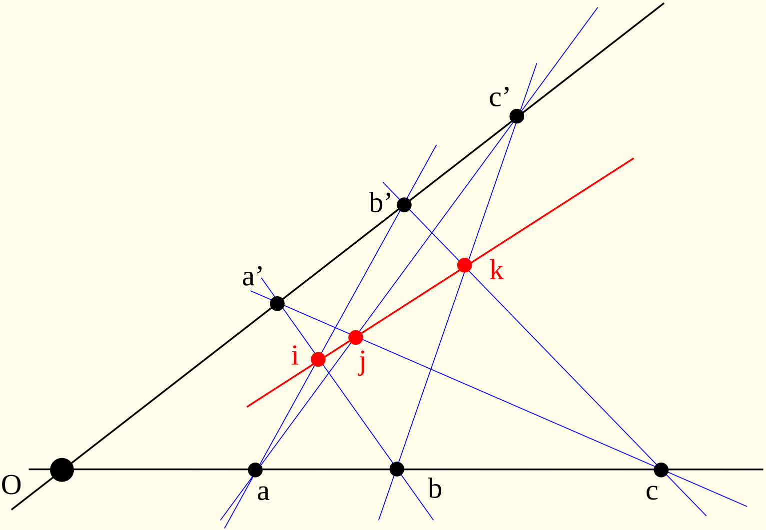
On pose : $i = aa' \cap bb'$, $j = aa'' \cap bb''$, $k = a'a'' \cap b'b''$.

Les points i, j, k sont alignés.

Théorème de Désargues avec des droites parallèles



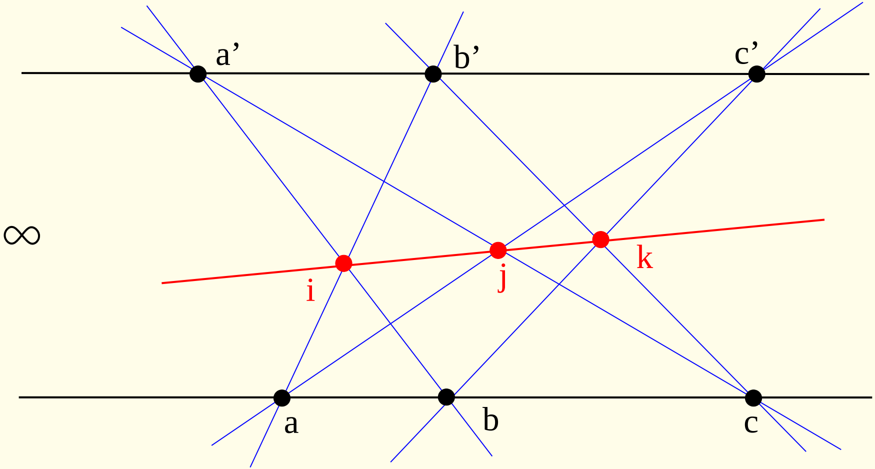
Théorème de Pappus d'Alexandrie ($\simeq$ 290 - 350)



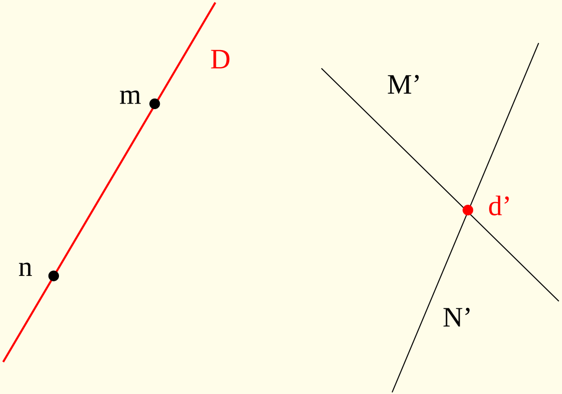
On pose : $i = ab' \cap a'b$, $j = ac' \cap ca'$, $k = bc' \cap cb'$.

Les points i, j, k sont alignés.

Théorème de Pappus avec deux droites parallèles

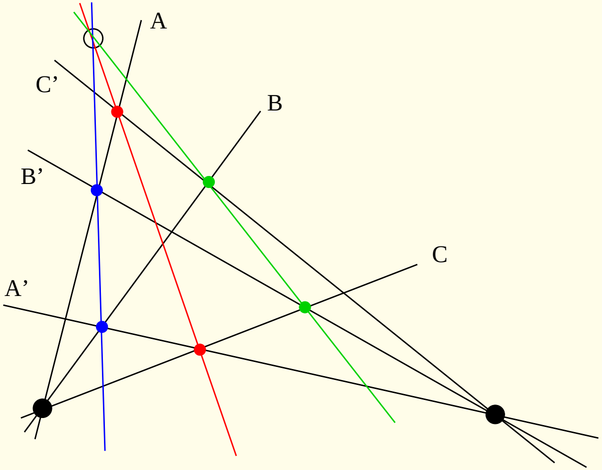


Dualité : échanger les points et les droites !



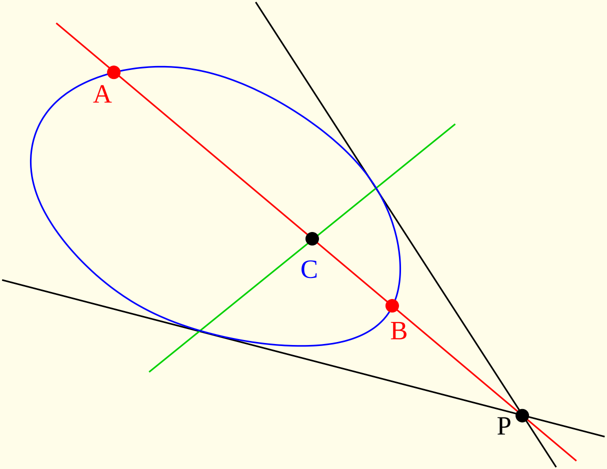
point m	$\longleftrightarrow$	droite M'
droite D	$\longleftrightarrow$	point d'
$m \in D$	$\longleftrightarrow$	$d' \in M'$
$m, n \in D$	$\longleftrightarrow$	$d' = M' \cap N'$

Dual du théorème de Pappus



Les droites bleue $(AB' \cap A'B)$, rouge $(AC' \cap A'C)$ et verte $(BC' \cap B'C)$ sont concourantes.

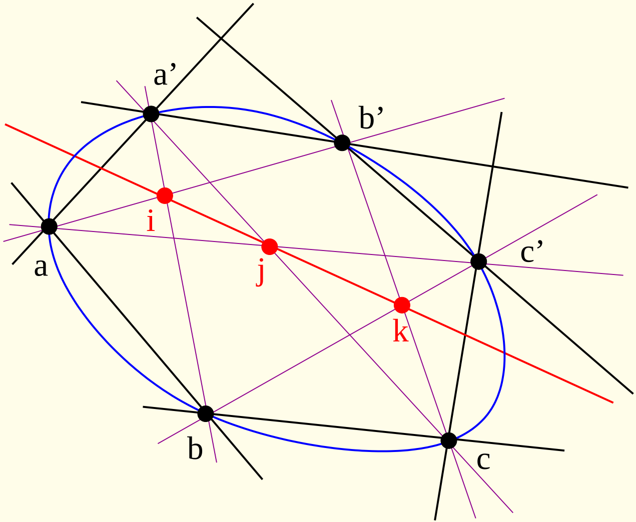
Polarité



La courbe bleue est une cônique

Les quatre points $[A, B, C, P]$ forment une division harmonique

Hexagramme mystique de Blaise Pascal (1623-1662)



Avec $i = ab' \cap a'b$, $j = ac' \cap ca'$, $k = bc' \cap cb'$.

les points i, j, k sont alignés.

Anamorphoses, ou le jeu avec la perspective

On pourra aller regarder le tableau historique

Hans Holbein le Jeune (1497-1543), Les Ambassadeurs.
National Gallery, Londres.

En particulier, on pourra consulter l'ouvrage

Jeanette Zwingenberger, "Holbein le Jeune : l'ombre de la mort",
Parkstone, 1999.

Lectures utiles

Pierre Pansu, "Géométrie projective", mars 2007
http://www.math.u-psud.fr/∼pansu/

Marie Bouazzi, "Géométrie projective", octobre 2006
http://adsl.hexabyte.tn/bouazzi/geoarch/Prj1/prj.htm

Marc Frantz, "Lessons in Mathematics and Art", 2005
http://mypage.iu.edu/ mathart/viewpoints/lessons

Denis Favennec et Emmanuel Riboulet-Deyris
Douce Perspective. Une histoire d'art et de science,
Editons Ellipses 2007.

Jean-Claude Sidler, "Géométrie projective", Dunod, 2000.

Pierre Samuel, "Géométrie projective",
Presses Universitaires de France, 1986.