INCOMMENSURABILITE & IRRATIONNALITE

Hervé Stève
herve.steve @hotmail.fr

KaféMath du 8 janvier 2009

Bibliographie

- « Le Fabuleux destin de √2 » de Benoît Rittaud, éditions Le Pommier

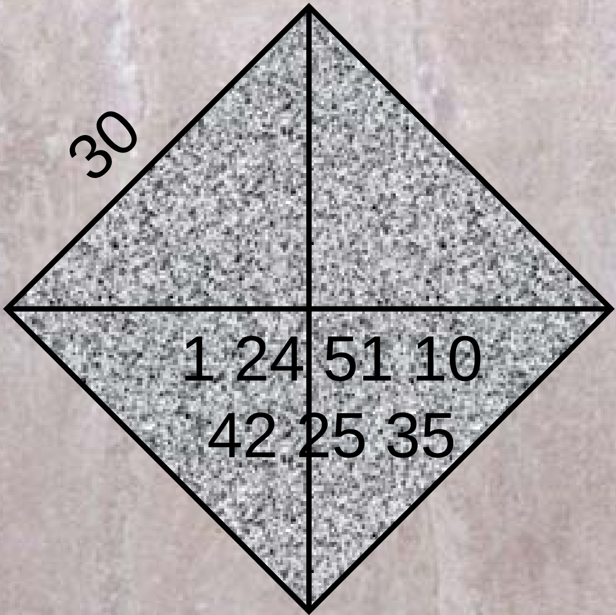
- « la racine carrée c'est ma préférée » de Boris Vian, chanson Racine Carrée , 1957

Plan

- Histoire de $\sqrt{2}$
  - La tablette babylonienne
  - Arithmétique et géométrie des Grecs
  - L'algèbre des Arabes
  - Passage à la limite
- La musique et l'incommensurabilité : $\log_2 3$

La tablette babylonienne

- Tablette YBC 7289, scribe vers -1700 JC
- 3 grandeurs d'un losange en base 60 : côté=30, diagonale=42;25,35 et 1;24,51,10



Les bases

- Nombre = suite de chiffres dans une base

$$a(\text{base}\, b) = \sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i \times b^i =$$

$$a_\alpha \times b^\alpha + a_{\alpha-1} \times b^{\alpha-1} + \ldots + a_\beta \times b^\beta$$

- Le système décimal (base 10) : {0,1,2,…,9}

  123,45 = 1x100 + 2x10 + 3 + 4/10 + 5/100

  centaine dizaine unité dixième centième

- Binaire (base 2) : {0,1}

  101011 = $1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 43$

- Base 60 : {0,1,2,…,9,10,11,…,59}

  59 sec + 1 sec = 1 x 60 + 0 = 1'0 = 1 minute

La tablette

- diagonale = 42;25,35 = 42 + 25/60 + 35/60^2

- diagonale/côté = 42;25,35 /30 =

  = 42x2/60 + 25/60x2/60 + 35/60^2 x2/60 =

  = 1 + 24/60 + $\underline{50/60^2 + 1/60^2}$ + 10/60^3 =

  = 1 + 24/60 + $\underline{51/60^2}$ + 10/60^3 = 1;24,51,10

$$\frac{diagonale}{côté} = \frac{42;25,35}{30} = 1;24,51,10 \approx \underline{1,41421}296\ldots$$

$$\text{or } \sqrt{2} \approx \underline{1,41421}3562\ldots$$

$$\text{avec } \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

Tablette (suite)

- Précision à 5 décimales : pourquoi ?
- Utilité courante : 1;25=<u>1,41</u>67
- Jeu : 1;24,51,10 optimal en base 60
- Egyptiens : 28/20=<u>1,4</u> ou 40/28=<u>1,4</u>28
- Indien Govindashwamin (10ème S) >5 décimales

Grecs

- Pensée grecque « tout est nombre »
- Nombre = rationnel = p / q avec p, q entiers
- Exemple 3 / 4 : a=3U, b=4U, U unité de mesure
- **Question** : soit 2 grandeurs a et b, existe t-il p et q entiers tels que a, b, p, q soient en proportion ?

  Existe-t-il p, q entiers tels que p x a = q x b ?

  Réponse : NON !

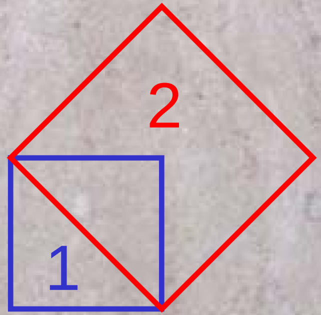
  le côté d'un carré a=1U et sa diagonale b

  théorème de Pythagore : $b^2=2a^2 \Rightarrow b^2=2=p^2/q^2$ impossible
- Des grandeurs incommensurables en géométrie

Grecs (suite)

- Scandale logique , crise intellectuelle

- Notion d'incommensurabilité :
  - mesure directe => valeur approchée de √2
  - aucune expression chiffrée ne peut approcher √2
  - justification mathématique
  - à quoi ça sert tout ça ?



- Textes : philosophie/mathématique
  - Platon : Ménon, La République, Théétète
  - Aristote : 30 évocations de l'incommensurabilité
  - Euclide : livre X des Eléments, preuve avec √n

Grecs (suite)

- Crise d'identité : Papus d'Alexandrie (IVè S) « les nombres sont rationnels et commensurables »
  - entiers, rationnels : arithmétique
  - Grandeurs incommensurables : géométrie

- Sortir de la crise : mathématique arabe Xè S

Arabes

- Evolution du statut de $\sqrt{2}$:

constante => phénomène => nombre
(Babylone) (Grecque) (arabe)

- Al-Khwarizmi (9è S) : l'algèbre

- Al Karaji (10è S) : « les quantités incommensurables sont des nombres »

Ainsi $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

- Symboles $\sqrt{}$: radix « r » 1525 ; lettre V

Passage à la limite

- L'analyse : XVIIème et XVIIIème

longueur diagonale $=\sqrt{2}$

ligne brisée = 1+1 = 4x1/2 = 8x1/4 = 16x1/8 = … = 2

ligne brisée $\rightarrow$ diagonale ; donc $\sqrt{2}=2$!

Faux car la longueur de la limite ≠ limite des longueurs

Musique et incommensurabilité

- Pythagore et l'harmonie musicale
- Corde de longueur l $\rightarrow$ son fréquence f
- Harmoniques des entiers : f,2f,3f,4f, …..
- Gamme des quintes justes ramenées entre f et 2f
  - f : do , fondamental
  - 2f: do aigu , octave (8 notes)
  - 3f/2 : sol , quinte (5 notes)
  - 9f/8 : ré , seconde (2 notes)
  - 27f/16 : la , sixte (6 notes) …
  - 12 Quintes : do, sol, ré, la, mi, si, fa#, do#, …, si# ~do

Musique (suite)

- Harmoniques des quintes : $(3^n/2^m)f$

- Question : existent-ils 2 notes égales ?

Supposons $3^n/2^m = 3^{n'}/2^{m'}$ alors $3^{n-n'}=2^{m-m'}$

Impossible car impair ≠ pair

Conclusion : infinité d'harmoniques donc pas de gamme complète et finie

- Donc $2^p=3^q$ impossible $\Rightarrow$ $p/q = \log_2 3$ impossible

Ainsi $\log_2 3 = 1,584962\ldots$ premier irrationnel !

logarithmes

- Base 10 : $y = 10^x \Leftrightarrow x = \log y$
  Base 2 : $y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y$
  Base e : $y = e^x = \exp x \Leftrightarrow x = \ln y$

ln logarithme népérien, exp exponentielle

$e = 2{,}718281828\ldots$ irrationnel transcendant comme π

Les transcendants ne sont pas algébriques

- $\ln xy = \ln x + \ln y$; produit devient une somme
  $e^{x+y} = e^x\, e^y$; somme devient un produit

- Applications : magnitudes, pH, décibels, ...

nombres

- Rationnels :
  - Entiers naturels N={0,1,2,...}
  - Entiers relatifs Z={...,-2,-1,0,1,2,...}
  - Fractions Q= {(a,b) $\in$ N x N tq q = a / b

- Réels R : rationnels et irrationnels
  - Algébriques K= {zéros des polynômes}

  $$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

  Exemple) p(x)=x²-2=0 => x= √2 ou - √2

  - Transcendants = R \ K ; e, π, constante de Liouville

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0{,}110001000000000000000001 0...$$

- Complexes C={(x,y) $\in$ R x R tq z = a + i b}

  i nombre Imaginaire $i^2 = -1$ i.e. i = √-1 !

Musique (suite)

- Gamme de Pythagore : rationnels $3^q / 2^p$
  - 12 quintes est proche de 7 octaves soit $(3/2)^{12} \approx 2^7$
  - Rapport = coma pythagoricien = c_π = 1,013643...
  - Soit 53 comas pour une octave, environ 9 comas pour un ton (6 tons = 1 octave)
- Gammes naturelles (physiciens) : rationnels p/q
  - quinte = tierce majeure + tierce mineure soit 3/2 = 5/4 x 6/5
  - sixte = tierce majeure + quarte soit 5/3 = 5/4 x 4/3
- Gamme tempérée : irrationnels $2^{p/q}$
  - Intervalles égaux 54 comas pour un octave $c = \sqrt[54]{2}$ = 1,012918...
  - quinte = 3,5 tons soit 1,498307... proche 3/2
  - seconde = 1 ton soit 1,122462... proche de 9/8=1,125
  - tierce majeure = 2 tons soit 1,25992... proche de 5/4=1,25

Triton do-fa#

- Fa# quarte augmentée "la dissonance parfaite"

Moyenne âge : "diabolus in musica"

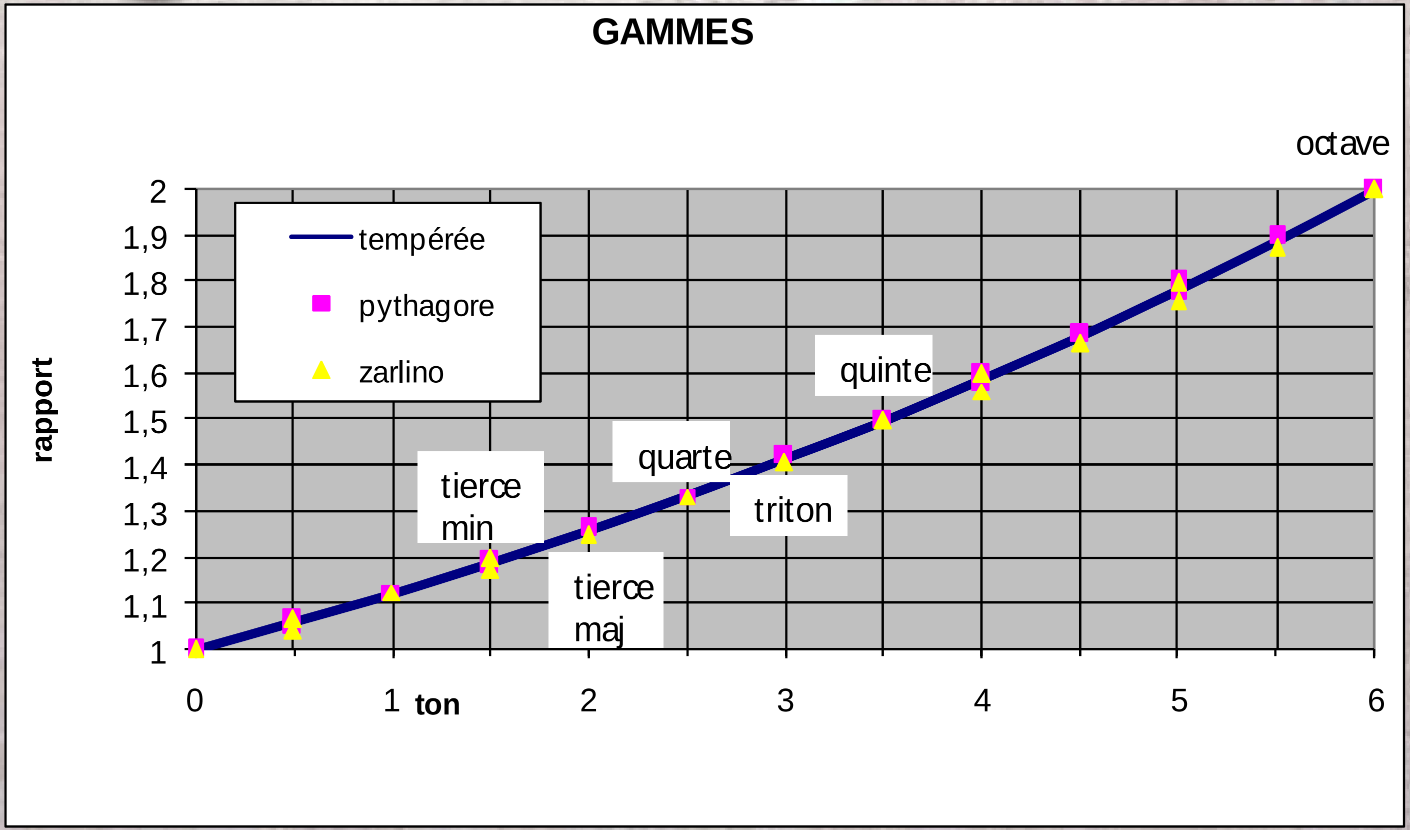
- Gamme tempérée : 1/2 octave soit **√2** (1,414)

- Gamme de Pythagore : 6 quintes soit 729/512 (1,424)

- Zarlino (16ème) : ton + tierce majeure soit 9/8 x 5/4 = 45/32 (1,406)

- Harmoniques plus simples : 7/5 (1,400) ou 10/7 (1,429)

Gammes



Trouver des harmoniques naturelles les plus simples (petits p/q) qui se rapprochent du tempérament égal