

## Les allumettes d'Antonino <sup>□</sup>

- Voici la devinette posée par Antonino : « tu as dix allumettes ; tu as le droit de les déplacer une par une pour les placer sur une autre, mais en en sautant **deux**, comme indiqué à la figure 1.

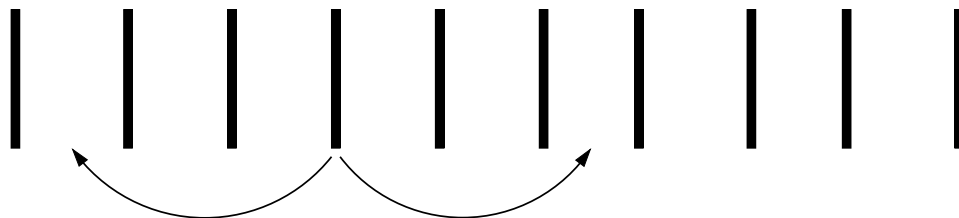


Figure 1. *Position initiale des allumettes et règle de déplacement.*

Quelle suite de mouvements proposes-tu pour atteindre une position finale avec cinq paquets de deux, comme indiqué à la figure 2 ? »

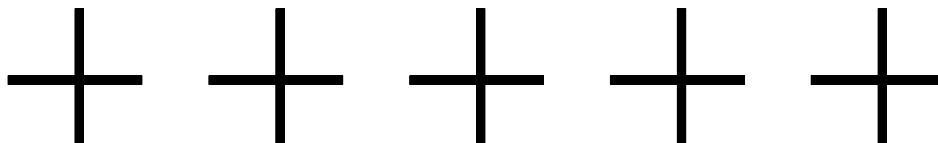


Figure 2. *Position finale des allumettes.*

- Je pars de la solution ! Oui, de la figure 2. Et je mets des numéros aux allumettes. Disons de 6 à 10 pour celles qui sont restées verticales et de 1 à 5 pour celles qui sont placées horizontalement sur leurs copines. Je note maintenant la figure 2 sous une forme arithmétique :  $6_1 \ 7_2 \ 8_3 \ 9_4 \ 10_5$ .

- Il n'est pas bien difficile d'imaginer une suite de mouvements pour passer de la figure 2 à un ensemble aligné d'allumettes comme à la figure 1, tout en respectant le fait de toujours sauter deux allumettes d'un coup. Je fais par exemple [opération numéro 1, ou  $op_1$  pour le petit discours de la fin...] passer l'allumette numéro 1 au dessus du « paquet »  $7_2$ , pour obtenir la séquence  $6 \ 7_2 \ 1 \ 8_3 \ 9_4 \ 10_5$ . Puis je recommence [opération numéro 2, ou  $op_2$ ] avec l'allumette numéro 3 [pas la numéro 2 qui, elle, ne peut pas bouger !] et je trouve :  $6 \ 7_2 \ 1 \ 8 \ 9_4 \ 3 \ 10_5$ . L'allumette numéro 2 peut maintenant passer au dessus du « paquet » (1, 8), ce qui conduit

---

<sup>□</sup> « La Taverne », avril 2003, « Kafémath », 5 octobre 2005.

à 6 7 1 8 2 9<sub>4</sub> 3 10<sub>5</sub>. Je fais alors glisser l'allumette numéro 4 de deux pas vers la gauche, « au dessus » du groupe (8, 2), ce qui me donne la suite 6 7 1 4 8 2 9 3 10<sub>5</sub>. Il ne reste qu'un mouvement (évident !) à faire pour obtenir une suite de dix allumettes bien alignées : 6 7 1 4 8 2 5 9 3 10.

• Et maintenant, comment fais-tu pour résoudre le problème « à l'endroit », comment fais-tu pour répondre à la question posée ? C'est facile, je fais l'envers de l'envers ! Mais attention ! De la même façon que l'envers de « mettre ses chaussettes puis ses chaussures » est « enlever ses chaussures puis enlever ses chaussettes », je commence par la fin. J'ai dix allumettes, avec la curieuse numérotation : 6 7 1 4 8 2 5 9 3 10. Je veux d'abord aboutir à la configuration « précédente », c'est à dire la suite 6 7 1 4 8 2 9 3 10<sub>5</sub>. Il suffit donc de faire passer l'allumette numéro 5 au dessus de la paire (9, 3). Je remarque que l'allumette numéro 5 est la quatrième en partant de la droite. Je prends donc la quatrième allumette en partant de la droite et je la place au dessus de l'allumette la plus à droite, comme illustré à la figure 3.



Figure 3. *Position des allumettes après la première étape.*

Puis je dois arriver à la position 6 7 1 8 2 9<sub>4</sub> 3 10<sub>5</sub>. Je prends l'allumette numéro 4 en partant de la gauche cette fois et je la fais glisser de deux pas vers la droite, pour aboutir à la figure 4.



Figure 4. *Position des allumettes après la seconde étape.*



Figure 5. *Position des allumettes après la troisième étape.*

La suite est claire : je prends la cinquième allumette en partant de la gauche (celle qui porte le numéro 2) et je la fais sauter de deux crans vers la gauche. Ceci conduit à la position proposée à la figure 5. Puis je prends la troisième allumette en partant de la droite, oui, celle qui à la figure 5 est seule entre deux couples déjà constitués, et je la fais sauter au dessus du paquet qui est à sa gauche. D'où la nouvelle position.

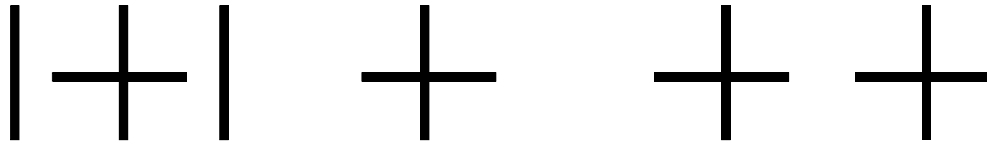


Figure 6. *Position des allumettes après la quatrième étape.*

Je termine en faisant de même avec la quatrième allumette en partant de la droite, que je place sur celle qui est juste à sa gauche. Et le tour est joué !

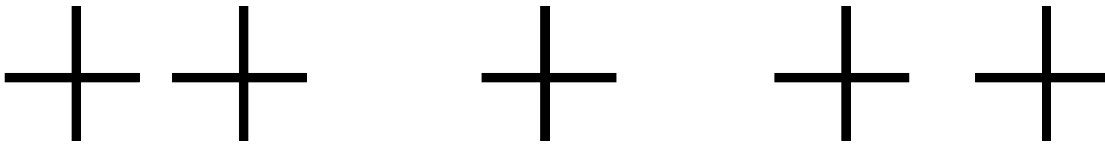


Figure 7. *Position finale des allumettes après la cinquième étape.*

De plus, la solution proposée n'est pas la seule ! J'invite le lecteur à en créer une autre en partant toujours de la position finale, mais en « déliant » les allumettes d'une autre manière.

- Le point important du point de vue mathématique est que pour faire l'inverse des opérations  $op_1$ , puis  $op_2$ , puis  $op_3$  et ce jusqu'à  $op_5$ , opération qu'on note de droite à gauche en suivant l'écriture arabe, c'est à dire sous la forme  $op_5 \bullet op_4 \bullet op_3 \bullet op_2 \bullet op_1$ , on doit d'abord effectuer l'inverse  $(op_5)^{-1}$  de  $op_5$ , puis l'inverse  $(op_4)^{-1}$  de  $op_4$ , etc, c'est à dire l'opération qui s'écrit de droite à gauche ainsi :  $(op_1)^{-1} \bullet (op_2)^{-1} \bullet (op_3)^{-1} \bullet (op_4)^{-1} \bullet (op_5)^{-1}$ . On a donc la relation générale :

$$(op_5 \bullet op_4 \bullet op_3 \bullet op_2 \bullet op_1)^{-1} = (op_1)^{-1} \bullet (op_2)^{-1} \bullet (op_3)^{-1} \bullet (op_4)^{-1} \bullet (op_5)^{-1}.$$

- Il suffit d'ailleurs d'écrire la relation précédente pour deux arguments, notés symboliquement  $x$  et  $y$  :  $(x \bullet y)^{-1} = y^{-1} \bullet x^{-1}$ . Et de retenir l'évidence : l'envers de « mettre ses chaussettes (opération  $y$ ) puis ses chaussures (opération  $x$ ) » est « enlever ses chaussures (opération  $x^{-1}$ ) puis enlever ses chaussettes (opération  $y^{-1}$ ) » !

François Dubois, 04 octobre 2005.